



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 16. Berechnung der Spannungsvertheilung bei schiefer Belastung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

auf solche Fälle ausdehnen, bei denen die Axe einen beliebigen Winkel mit der Querschnittsebene bildet (oder ihr parallel ist). In der Festigkeitslehre kommt indessen nur noch einer von diesen Fällen in Frage, nämlich das Trägheitsmoment für eine zur Querschnittsebene senkrechte Axe. Dieses wird als das polare Trägheitsmoment bezeichnet. Gebraucht man dafür den Buchstaben Θ_p , so ist es definirt durch den Ansatz

$$\Theta_p = \int r^2 dF,$$

wenn r der senkrechte Abstand zwischen dF und der Axe ist. Zieht man durch den Schnittpunkt der Axe mit der Querschnittsebene wieder zwei Coordinatenachsen, so hat man

$$r^2 = y^2 + z^2$$

und daher

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z. \quad (63)$$

Θ_p ist also mit gegeben, wenn man die Centralellipse kennt. Bezeichnet man speciell die Hauptträgheitsmomente mit Θ_1 und Θ_2 und beachtet, dass die Coordinatenachsen jetzt in beliebiger Richtung gezogen sein durften, so erhält man aus Gl. (63) noch die einfache Beziehung

$$\Theta_y + \Theta_z = \Theta_1 + \Theta_2,$$

d. h. die Summe der Trägheitsmomente für irgend zwei auf einander rechtwinklige Axen, die in der Querschnittsfläche durch einen gegebenen Punkt gezogen sind, ist constant.

§ 16. Berechnung der Spannungsvertheilung bei schiefer Belastung.

Schief nennt man die Belastung eines auf Biegung beanspruchten Stabes, wenn die Ebene der äusseren Kräfte oder die Ebene des Biegemomentes nicht durch eine Hauptaxe des Querschnitts geht. Wenn die Kräfte alle in einer einzigen Ebene, der Kraftebene, enthalten sind, zerlegt man jede Kraft in zwei Componenten parallel zu den beiden Querschnittshauptaxen und setzt die Componenten von jeder Richtung zu

einem Biegemomente zusammen, dessen Ebene dann ebenfalls durch eine Hauptaxe geht. Im anderen Falle kann man wenigstens nachträglich das Biegemoment in zwei Kräftepaare zerlegen, deren Ebenen durch die Hauptaxen gehen. Wird der Winkel, den die Ebene des Biegemoments M mit einer der Hauptaxen bildet, mit α bezeichnet, so sind die Momente der beiden Componenten gleich $M \cos \alpha$ und gleich $M \sin \alpha$. Dann berechnet man die Spannungen, die durch jede Componente für sich genommen im Querschnitte hervorgerufen werden, nach Gl. (48) oder Gl. (50), die hier anwendbar sind. Die durch das Zusammenwirken beider Componenten entstehenden Spannungen findet man daraus durch algebraische Summirung der beiden Werthe. Im Ganzen hat man daher

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{\Theta_z} \cdot y + \frac{M \sin \alpha}{\Theta_y} \cdot z. \quad (64)$$

Eine einfache Betrachtung lässt nachträglich erkennen, an welcher Stelle des Querschnitts σ seinen grössten Werth annimmt.

Zur Begründung dieses Verfahrens kann man sich entweder auf das Gesetz der Superposition verschiedener Spannungszustände berufen oder man kann auch darauf hinweisen, dass die durch Gl. (64) angegebene Spannungsvertheilung linear ist und dabei das Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Kräften herstellt. Bei linearer Spannungsvertheilung ist ein solches Gleichgewicht nur auf eine einzige Art möglich, denn die Richtung der Nulllinie bestimmt eindeutig die Ebene des aus den Spannungen resultirenden Kräftepaars und die Grösse der Spannung in einem gegebenen Abstände von der Nulllinie bestimmt ebenfalls eindeutig die Grösse des statischen Moments dieses Kräftepaars. — Wenn das Gesetz der Superposition für den betreffenden Stoff nicht gültig ist, verliert die zuerst gegebene Begründung ihre Bedeutung. In diesem Falle ist aber auch kaum anzunehmen, dass die Spannungsvertheilung linear ist und die andere Begründung versagt daher ebenfalls. In der That darf man in

diesem Falle nicht darauf rechnen, dass Gl. (64) ziemlich genau richtig ist; ihre Anwendung kann vielmehr zu erheblichen Abweichungen von der Wirklichkeit führen. Indessen gilt dies, wie schon öfters bemerkt, bei allen Festigkeitsberechnungen, die sich auf solche Stoffe beziehen.

Ein einfaches Beispiel möge noch die Anwendung von Gl. (64) zeigen. Ein Holzbalken sei als Dachpfette verwendet, so dass eine Querschnittsseite in die Neigung der Dachfläche fällt. Der Querschnitt des Balkens ist in Abb. 21 gezeichnet. Nimmt man an, dass die Belastung Q des ganzen Balkens (samt Eigengewicht) gleichmässig über die ganze Spannweite l vertheilt ist, so hat man zunächst für das Biegemoment in der Mitte, wie man leicht findet,

$$M = \frac{Ql}{8}.$$

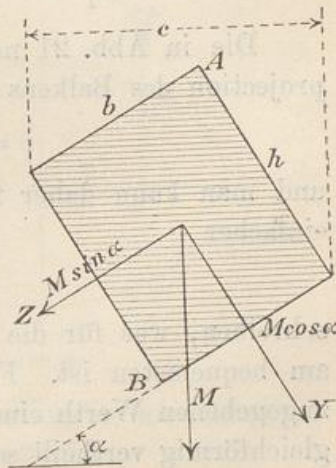


Abb. 21.

Die Ebene von M steht lothrecht und bildet daher Winkel von α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ mit den Hauptachsen. Die Componenten von M in den durch die Hauptachsen gelegten Ebenen sind in die Abbildung eingeschrieben.

Das Trägheitsmoment Θ_z eines Rechtecks folgt aus

$$\Theta_z = \int y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

und das Widerstandsmoment W_z daher

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Die Momente für die andere Hauptaxe findet man daraus durch Vertauschung von b mit h . — Durch das Axenkreuz der Y und Z wird das Rechteck in vier Quadranten zerlegt, von denen zwei durch die Belastungskomponenten $M \sin \alpha$ und

$M \cos \alpha$ Spannungen entgegengesetzten Vorzeichens erfahren, während sich bei den beiden anderen die Spannungen addiren. Man erkennt daraus, dass an der Ecke A die grösste Druck- und bei B die grösste Zugspannung auftritt und dass beide von einerlei Grösse sind. Diese grösste Spannung folgt daher aus

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{W_x} + \frac{M \sin \alpha}{W_y} = \frac{6 M \cos \alpha}{bh^2} + \frac{6 M \sin \alpha}{b^2h}.$$

Die in Abb. 21 mit c bezeichnete Breite der Horizontalprojection des Balkens ist

$$c = b \cos \alpha + h \sin \alpha$$

und man kann daher für den vorausgehenden Ausdruck auch einfacher

$$\sigma = \frac{6 M c}{b^2 h^2} \quad (65)$$

schreiben, was für die practische Ausführung der Berechnung am bequemsten ist. Für M hat man entweder den vorher angegebenen Werth einzusetzen, oder wenn die Belastung nicht gleichförmig vertheilt sein sollte, das anderweitig in der Kraftebene berechnete Biegemoment. Mit $c = b$ geht der Fall in den einfacheren über, dass die zu h parallele Symmetrieaxe in die lothrechte Kraftebene fällt.

§ 17. Excentrische Zug- oder Druckbelastung eines Stabes.

Wir nehmen jetzt an, dass die äusseren Kräfte am einen Theile des Stabes sich auf eine einzige Kraft zurückführen lassen, die senkrecht zum Querschnitte steht, dabei aber nicht durch den Schwerpunkt geht. Dieser Belastungsfall führt die in der Ueberschrift angegebene Bezeichnung. Offenbar handelt es sich hierbei um einen Fall der zusammengesetzten Festigkeit, nämlich um das Zusammenwirken einer axialen Belastung mit einer reinen Biegeb Belastung. Denn nach den früher gegebenen Vorschriften ist die äussere Kraft zu ersetzen durch eine ihr gleiche und parallele, die im Schwerpunkte angreift und durch das bei dieser Parallelverlegung