Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Nullinie geht durch Schwerpunkt.

$$\int \sigma dF = 0,$$

wenn die Summirung über den ganzen Querschnitt ausgeführt wird. Nach Einsetzen von σ aus Gl. (45) wird daraus

$$\int \frac{\sigma_0}{y_0} y dF = \frac{\sigma_0}{y_0} \int y dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int y dF = 0. \quad (46)$$

Die Summe $\int y dF$ stellt aber das statische Moment der Querschnittsfläche in Bezug auf die Z-Axe dar, und die Bedingung, dass dieses Moment Null sein muss, lehrt uns, dass die mit der Z-Axe zusammenfallende Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

Ferner muss das statische Moment des aus den Spannungen gebildeten Kräftepaars gleich dem Biegungsmomente M sein. Dabei genügt es indessen nicht, dass beide nur der Grösse nach einander gleich sind; beide Kräftepaare müssen vielmehr auch in derselben Ebene liegen — und wir werden nachher sehen, dass diese letzte Bedingung ebenso wichtig ist, als die andere. Wenn der Querschnitt des Stabs, wie es sehr häufig bei den Anwendungen der Fall ist, symmetrisch gestaltet ist und alle äusseren Kräfte in der Symmetrieebene liegen, ist diese Bedingung freilich von selbst erfüllt, sobald man die Nulllinie, wie es wegen der Symmetrieeigenschaften nicht anders sein kann, senkrecht zur Symmetrieebene annimmt. Wir wollen hier zunächst den einfachsten Fall behandeln, nämlich den Fall, dass die Nulllinie in der That senkrecht zur Ebene des Kräftepaars M steht. Dagegen wollen wir nicht gerade von vornherein annehmen, dass der Querschnitt symmetrisch gestaltet sei; vielmehr wollen wir ganz allgemein untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser einfachste Fall eintritt.

Die Momentengleichung für die Nulllinie (oder die Z-Axe) liefert

$$\int \sigma dF y = M$$

oder wenn man σ aus Gl. (45) einsetzt,

$$\frac{\sigma_0}{y_0} \int y^2 dF = M. \quad (47)$$

Die über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Summengrösse $\int y^2 dF$ ist nur noch von der Gestalt des Querschnittes abhängig und kann, wenn diese gegeben ist, entweder durch Ausführung der Integration oder, wenn diese zu viel Schwierigkeit machen sollte, durch eine mechanische Quadratur immer leicht berechnet werden. Sie wird das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Z-Axe genannt. Bezeichnet man dieses mit Θ, so folgt aus Gl. (47)

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0. \tag{48}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, für irgend einen vorher in's Auge gefassten Punkt des Querschnitts mit dem Abstande y_0 von der Z-Axe die Spannung σ_0 zu berechnen. Mit Rücksicht auf Gl. (45) kann man auch die Zeiger 0 in Gl. (48) nachträglich noch streichen.

Gewöhnlich will man die grösste Spannung σ berechnen, die überhaupt im Querschnitte auftritt. Man hat dann unter y_0 in Gl. (48) den grössten Abstand von der Nulllinie zu verstehen, der im Querschnitte vorkommt. In diesem Falle kann man die beiden nur von der Querschnittsgestalt abhängigen Grössen in Gl. (48) zu einer einzigen zusammenfassen, indem man setzt

$$\frac{\Theta}{y_0} = W. \tag{49}$$

Die Grösse W wird das Widerstandsmoment des Querschnitts genannt. Hiermit geht Gl. (48) über in

$$\sigma = \frac{M}{W}, \tag{50}$$

wobei der Zeiger der Einfachheit wegen weggelassen ist, obschon man sich wohl zu erinnern hat, dass diese Spannung σ nur an der äussersten Kante auftritt. Aus der Bedeutung von Θ folgt, dass es eine Grösse von der Dimension cm^4 ist, d. h., dass es die vierte Potenz einer Länge darstellt. Die Dimension von W ist cm^3. In den von den Hüttenwerken herausgegebenen Verzeichnissen der von ihnen gewalzten Eisenträger ist zur Bequemlichkeit des Benutzers für jedes Profil sowohl