



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 14. Folgerungen aus dem Gradliniengesetze.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

punkte aller dieser Strecken nach Navier auf einer Ebene, die die Querschnittsebene in der Nulllinie schneidet. In Anlehnung an jenen Sprachgebrauch bezeichnet man das Navier'sche Spannungsvertheilungsgesetz auch als das lineare oder als das Gradliniengesetz. Die Bezeichnungen „lineare Spannungsvertheilung“ und „linearer Spannungszustand“ dürfen nicht verwechselt werden. Bei der letzten denkt man nur an die Spannungen, die in demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen hin auftreten; bei der ersten handelt es sich nur um Spannungen für dieselbe Schnittrichtung, die aber in verschiedenen Punkten des Querschnitts vorkommen. Im Falle der „reinen“ Biegungsbeanspruchung ist übrigens auch der Spannungszustand in jedem Punkte linear.

§ 14. Folgerungen aus dem Gradliniengesetze.

Wir denken uns die Coordinatenachsen der y und z im Querschnitte so gelegt, dass die Z -Achse mit der Nulllinie zusammenfällt. Dann ist σ überall unabhängig von z , und da es zu Null wird für $y = 0$, verschwindet auch das constante Glied, das in der linearen Function im Allgemeinen auftritt. Bezeichnen wir die Spannung in irgend einem bestimmten Punkte, der den Abstand y_0 von der Nulllinie hat, mit σ_0 , so hat man für jeden anderen Punkt nach dem Gradliniengesetze

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \text{ oder } \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}. \quad (45)$$

Im Falle der reinen Biegung müssen die Normalspannungen ein Kräftepaar liefern; die Summe der Zugspannungen muss daher gleich der Summe der Druckspannungen sein. Dabei ist zu beachten, dass Gl. (45) die Spannung σ auch schon dem Vorzeichen nach richtig angibt, indem die nach verschiedenen Seiten der Nulllinie gerichteten Abstände y mit entgegengesetzten Vorzeichen zu rechnen sind. Wir können daher auch einfacher sagen, dass die algebraische Summe aller Normalspannungen für den ganzen Querschnitt gleich Null sein muss. In Form einer Gleichung heisst dies

$$\int \sigma dF = 0,$$

wenn die Summierung über den ganzen Querschnitt ausgeführt wird. Nach Einsetzen von σ aus Gl. (45) wird daraus

$$\int \frac{\sigma_0}{y_0} y dF = \frac{\sigma_0}{y_0} \int y dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int y dF = 0. \quad (46)$$

Die Summe $\int y dF$ stellt aber das statische Moment der Querschnittsfläche in Bezug auf die Z -Axe dar, und die Bedingung, dass dieses Moment Null sein muss, lehrt uns, dass die mit der Z -Axe zusammenfallende Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

Ferner muss das statische Moment des aus den Spannungen gebildeten Kräftepaars gleich dem Biegemomente M sein. Dabei genügt es indessen nicht, dass beide nur der Grösse nach einander gleich sind; beide Kräftepaare müssen vielmehr auch in derselben Ebene liegen — und wir werden nachher sehen, dass diese letzte Bedingung ebenso wichtig ist, als die andere. Wenn der Querschnitt des Stabs, wie es sehr häufig bei den Anwendungen der Fall ist, symmetrisch gestaltet ist und alle äusseren Kräfte in der Symmetrieebene liegen, ist diese Bedingung freilich von selbst erfüllt, sobald man die Nulllinie, wie es wegen der Symmetrieeigenschaften nicht anders sein kann, senkrecht zur Symmetrieebene annimmt. Wir wollen hier zunächst den einfachsten Fall behandeln, nämlich den Fall, dass die Nulllinie in der That senkrecht zur Ebene des Kräftepaars M steht. Dagegen wollen wir nicht gerade von vornherein annehmen, dass der Querschnitt symmetrisch gestaltet sei; vielmehr wollen wir ganz allgemein untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser einfachste Fall eintritt.

Die Momentengleichung für die Nulllinie (oder die Z -Axe) liefert

$$\int \sigma dF y = M$$

oder wenn man σ aus Gl. (45) einsetzt,

$$\frac{\sigma_0}{y_0} \int y^2 dF = M. \quad (47)$$

Die über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Summengrösse $\int y^2 dF$ ist nur noch von der Gestalt des Querschnittes abhängig und kann, wenn diese gegeben ist, entweder durch Ausführung der Integration oder, wenn diese zu viel Schwierigkeit machen sollte, durch eine mechanische Quadratur immer leicht berechnet werden. Sie wird das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Z -Axe genannt. Bezeichnet man dieses mit Θ , so folgt aus Gl. (47)

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0. \quad (48)$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, für irgend einen vorher in's Auge gefassten Punkt des Querschnitts mit dem Abstände y_0 von der Z -Axe die Spannung σ_0 zu berechnen. Mit Rücksicht auf Gl. (45) kann man auch die Zeiger 0 in Gl. (48) nachträglich noch streichen.

Gewöhnlich will man die grösste Spannung σ berechnen, die überhaupt im Querschnitte auftritt. Man hat dann unter y_0 in Gl. (48) den grössten Abstand von der Nulllinie zu verstehen, der im Querschnitte vorkommt. In diesem Falle kann man die beiden nur von der Querschnittsgestalt abhängigen Grössen in Gl. (48) zu einer einzigen zusammenfassen, indem man setzt

$$\frac{\Theta}{y_0} = W. \quad (49)$$

Die Grösse W wird das Widerstandsmoment des Querschnitts genannt. Hiermit geht Gl. (48) über in

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad (50)$$

wobei der Zeiger der Einfachheit wegen weggelassen ist, ob schon man sich wohl zu erinnern hat, dass diese Spannung σ nur an der äussersten Kante auftritt. Aus der Bedeutung von Θ folgt, dass es eine Grösse von der Dimension cm^4 ist, d. h., dass es die vierte Potenz einer Länge darstellt. Die Dimension von W ist cm^3 . In den von den Hüttenwerken herausgegebenen Verzeichnissen der von ihnen gewalzten Eisenträger ist zur Bequemlichkeit des Benutzers für jedes Profil sowohl

Θ als W angegeben. Gewöhnlich beziehen sich diese Angaben auf 1 mm als Längeneinheit; will man in cm rechnen, wie es hier immer geschieht, so muss man demnach bei Θ vier und bei W drei Stellen abschneiden.

Um uns zu überzeugen, dass Gl. (48) den Dimensionen nach richtig ist, setzen wir die Dimensionen der auf der rechten Seite vorkommenden Grössen ein, indem wir die zugehörigen Zahlenwerthe unbeachtet lassen. Wir erhalten dann, da M in cm kg anzugeben ist,

$$\frac{\text{cm kg}}{\text{cm}^4} \cdot \text{cm} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

und dies ist in der That die Dimension einer specifischen Spannung.

Die vorausgehenden Gleichungen gelten aber nur unter der Voraussetzung, von der aus sie abgeleitet sind, dass nämlich die Nulllinie senkrecht zur Ebene des Biegemoments M steht. Ob und unter welchen Umständen diese Voraussetzung zutrifft, lehrt uns eine zweite Momentengleichung, die ausspricht, dass die Ebene des aus den Spannungen σ zusammengesetzten Kräftepaars mit der Ebene des Biegemoments zusammenfällt. Dazu bilden wir die statischen Momente in Bezug auf die Y -Achse des Querschnitts. Diese Axe sei in der Ebene des Biegemoments angenommen, also durch den Querschnittsschwerpunkt senkrecht zur Nulllinie gezogen, und das statische Moment der äusseren Kräfte ist daher für sie gleich Null. Dasselbe muss also auch von dem statischen Momente der Spannungen zutreffen. Wir haben also

$$\int \sigma dFz = 0 \quad \text{oder} \quad \int yz dF = 0, \quad (51)$$

wobei die letzte Form der Gleichung wieder durch Einsetzen von σ aus Gl. (45) aus der vorhergehenden gefunden wird.

Auch die Summengrösse $\int yz dF$ hängt nur von der Gestalt des Querschnitts und von der Richtung der Schwerpunktsaxe ab, die mit der Nulllinie zusammenfällt. Alle Summengrössen, die über den Querschnitt zu erstrecken sind

und die Producte aus den Flächenelementen und den Querschnittscoordinaten enthalten, bezeichnet man als Momente und bemisst deren Grad nach der Zahl der Querschnittscoordinaten, die als Factoren in jenen Producten auftreten. Wie das Trägheitsmoment ist daher auch $\int yz dF$ als ein Moment zweiten Grades des Querschnitts zu bezeichnen. Man hat ihm noch die besonderen Namen „Centrifugalmoment“ oder auch „Deviationsmoment“ gegeben. Es soll mit Φ bezeichnet werden, wobei die besonderen Axenrichtungen durch angehängte Zeiger kenntlich gemacht werden können. Gl. (51) kann hiernach auch in der Form

$$\Phi_{yz} = 0 \quad (52)$$

ausgesprochen werden. Damit ist die gesuchte Bedingung gefunden; nur dann, wenn das Centrifugalmoment des Querschnitts für ein durch den Schwerpunkt gelegtes rechtwinkliges Axenkreuz, von dem eine Axe in die Ebene des Moments der äusseren Kräfte fällt, gleich Null ist, können die Spannungen nach den einfachen Formeln (48) oder (50) berechnet werden.

Ein Trägheitsmoment kann nie zu Null werden, da es sich aus lauter positiven Gliedern zusammensetzt. Dagegen tragen alle Flächentheile des Querschnitts, die im ersten und dritten Quadranten des Axenkreuzes liegen, positive, alle im zweiten und vierten Quadranten negative Glieder zum Centrifugalmomente bei. Das Centrifugalmoment kann daher ebenso wohl negativ als positiv oder gleich Null werden. Der letzte Fall wird, wie man ohne Weiteres einsieht, immer bei symmetrischen Querschnitten eintreten, wenn eine Axe des Axenkreuzes mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, denn die Beiträge von je zwei spiegelbildlich zu einander liegenden Flächentheilen heben sich gegen einander gerade auf.

Ehe wir die Berechnung der Spannungen auf den Fall ausdehnen, dass Φ_{yz} nicht gleich Null ist, müssen wir einige geometrische Betrachtungen über die Momente zweiten Grades einschalten.