



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Dritter Abschnitt. Biegung des geraden Stabes.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84594](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84594)

Dritter Abschnitt.

Biegung des geraden Stabes.

§ 13. Begriff der Biegung. Willkürliche Annahmen von Bernouilli und Navier.

An einem stabförmigen Körper mögen sich beliebig gegebene äussere Kräfte das Gleichgewicht halten. Ich denke mir den Stab an irgend einer Stelle durchschnitten. An jedem der beiden Theile des Stabes müssen die Spannungen, die in dem Querschnitte übertragen werden, im Gleichgewichte mit den äusseren Kräften stehen, die an diesem Theile angreifen. Um hierauf die Gleichgewichtsbedingungen der gewöhnlichen Statik anwenden zu können, brauchen wir übrigens nicht genauer zu wissen, wie sich die äusseren Kräfte am einen Theil des Stabes vertheilen; es genügt dazu, wenn wir eine Resultirende oder überhaupt ein äquivalentes Kräftesystem dafür angeben können.

In der That besteht der erste Schritt zur Berechnung der Spannungen, die in einem Querschnitte übertragen werden, immer darin, dass man die äusseren Kräfte am einen Theile des Stabes nach den Regeln über die Zusammensetzung von Kräften zusammenfasst. Man denkt sich jede äussere Kraft nach einem bestimmten Punkte hin parallel verlegt, und zwar wählt man dazu am besten den Schwerpunkt des Querschnitts. Bei dieser Parallelverlegung tritt jedesmal noch ein Kräftepaar auf. Dann setzt man alle Kräfte am Querschnittsschwerpunkte zu einer Resultirenden und ebenso alle Kräftepaare zu

einem resultirenden Paare zusammen. Die äusseren Kräfte sind dann zu einer Einzelkraft, die durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und zu einem Kräftepaare, das man in seiner Ebene oder parallel zu ihr beliebig verschieben kann, zusammengesetzt, und man weiss, dass die im Querschnitte übertragenen Spannungen, um Gleichgewicht herzustellen, eine Einzelkraft und ein Kräftepaar liefern müssen, die jenen genau entgegengesetzt sind.

Je nach dem Ergebnisse der vorhergehenden Kräftezusammensetzung unterscheidet man verschiedene Beanspruchungsarten des Stabes. Wenn das resultirende Kräftepaar verschwindet und die durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende Resultirende in der Richtung der Stabaxe geht, haben wir den schon wiederholt besprochenen Fall der einfachen Zug- oder Druckbelastung. Ist das Kräftepaar immer noch Null, die Resultirende aber senkrecht zur Stabaxe gerichtet, so ist der Stab auf Abscheeren belastet. Dieser Fall wird aber immer nur bei einzelnen Querschnitten eintreten. Sobald man den Querschnitt ein wenig verrückt, kommt zu der Scheerkraft noch ein Kräftepaar, das der Parallelverlegung der vorher gefundenen Resultirenden nach dem Schwerpunkte des neuen Querschnitts entspricht.

Wir wollen ferner den Fall betrachten, dass die vorher erwähnte Resultirende verschwindet, so dass sich alle äusseren Kräfte am einen Theile des Stabes auf ein Kräftepaar zurückführen lassen. Geht die Ebene dieses Kräftepaares durch die Stabaxe oder ist sie parallel zu ihr (in welchem Falle das Kräftepaar so verschoben werden kann, dass seine Ebene durch die Stabaxe geht), so liegt der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung vor. Steht dagegen diese Ebene senkrecht zur Stabaxe, so haben wir den Fall der ausschliesslichen Beanspruchung auf Torsion (auf Verdrehung oder auf Verwindung). Wenn die Ebene des Kräftepaares einen beliebigen Winkel mit der Stabaxe einschliesst, ist das Kräftepaar in zwei Componenten zu zerlegen, von deren Ebenen die eine parallel, die andere senkrecht zur Stabaxe steht. Der Stab

wird dann gleichzeitig von dem einen Kräftepaare auf Biegung und von dem anderen auf Verwindung beansprucht. Nach dem Gesetze der Superposition, das für die meisten Materialien als genau genug gültig angesehen werden kann (für Steine und Gusseisen aber nicht), genügt es, den Spannungszustand, der durch jedes dieser Kräftepaare hervorgerufen wird, für sich zu ermitteln, denn man erhält den wirklich eintretenden Spannungszustand durch Uebereinanderlagerung jener beiden Spannungszustände. Wie diese Zusammensetzung auszuführen ist, habe ich schon in den vorausgehenden Abschnitten gezeigt; es wird sich also jetzt nur noch darum handeln, den Spannungszustand für jeden einfachen Belastungsfall zu erforschen. Für Körper, bei denen das Superpositionsgesetz ungültig ist, vermag man Aufgaben dieser Art überhaupt nicht genau zu lösen. Man behilft sich damit, dass man sie so wie die anderen berechnet und dabei in Erinnerung behält, dass die Lösung nur ungefähr richtig sein kann.

Auch dann, wenn weder die Resultirende im Schwerpunkte des Querschnitts noch das resultirende Kräftepaar verschwindet, wird der Körper auf zusammengesetzte Festigkeit — wie man zu sagen pflegt — beansprucht. Dies gilt also auch für den Fall, dass die Resultirende im Schwerpunkte senkrecht zur Stabaxe steht und die Ebene des resultirenden Kräftepaars durch die Stabaxe geht; wir haben dann gleichzeitig Belastung auf Abscheeren und auf Biegung. Indessen kommt dieser Fall so häufig vor, dass er geradezu die Regel bei den praktischen Anwendungen der Theorie bildet, und man ist daher übereingekommen, ihn von vornherein als den allgemeinsten Fall der Biegungsbeanspruchung zu bezeichnen. Von zusammengesetzter Festigkeit pflegt man also, insofern ein biegendes Kräftepaar dabei betheiligt ist, nur dann zu reden, wenn ausserdem noch eine Zug- oder Druckbelastung oder eine Verwindung hinzutritt, d. h. wenn die Resultirende im Querschnittsschwerpunkte nicht senkrecht zur Stabaxe steht oder wenn die Ebene des resultirenden Kräftepaars nicht parallel zur Stabaxe ist.

Für die Gleichgewichtsbedingungen der äusseren Kräfte

mit den im Querschnitte übertragenen Spannungen kommt von den Kräftepaaren ausser der Ebene, in der sie wirken, nur noch die Grösse und der Sinn ihres statischen Momentes in Betracht. Insofern es sich um ein Kräftepaar handelt, das eine Biegung hervorbringt, dessen Ebene also durch die Stabaxe geht, bezeichnet man dieses statische Moment als das *Biegemoment*, während das Moment eines Kräftepaars, dessen Ebene senkrecht zur Stabaxe steht, als *Torsionsmoment* (Verdrehungs- oder Verwindungsmoment) bezeichnet wird.

Auch die beiden Componenten der im Schwerpunkte des Querschnittes angreifenden Resultirenden werden durch besondere Namen unterschieden. Die in die Richtung der Stabaxe fallende wird im Allgemeinen als *axiale Belastung* (oder mit Hervorhebung des Vorzeichens als *Zug- oder Druckbelastung*) und die senkrecht zu dieser Richtung stehende als *Scheerkraft* bezeichnet.

Für den allgemeinen Fall der Biegung, wie er vorher beschrieben wurde, genügt es hiernach, wenn man für jeden Querschnitt, den man in Betracht ziehen will, das Biegemoment und die Scheerkraft angeben kann. Man braucht sich dann nicht weiter darum zu kümmern, wie sich die äusseren Kräfte im Uebrigen über den Stab vertheilen. Natürlich ist es auch gleichgültig, ob man diese beiden Grössen für den einen oder den anderen der beiden Theile des Stabes, die durch den betreffenden Querschnitt getrennt sind, aufsucht. Nimmt man den anderen Theil, so kehren sich die Richtungen beider Grössen um, da alle äusseren Kräfte des ganzen Stabes nach Voraussetzung im Gleichgewichte mit einander stehen. Gleichzeitig kehren sich dann aber auch die Richtungen aller Spannungen im Querschnitte um, so dass es in der That einerlei ist, ob man das Gleichgewicht des einen oder des anderen Stabtheiles untersucht. Es geschieht nur aus Bequemlichkeit, dass man von dem in horizontaler Lage gezeichneten Stabe immer das Gleichgewicht der Kräfte an dem links vom Querschnitte liegenden Theile betrachtet.

Gewöhnlich liegen bei Biegungsaufgaben alle Kräfte, die am Stabe angreifen, in derselben Ebene (in der Regel in einer lothrechten); namentlich liegt aber, wenn dies auch einmal nicht zutreffen sollte, wenigstens die Scheerkraft in derselben Ebene mit dem biegenden Kräftepaare. Wir wollen dies daher ein für alle Male voraussetzen. Wenn es ausnahmsweise nicht zutrifft, kann man übrigens die Rechnung auf Grund der hier gegebenen Betrachtungen ebenfalls ohne jede Schwierigkeit durchführen.

Das Biegemoment wird hier immer mit M bezeichnet; es soll positiv gerechnet werden, wenn in der Zeichnung des Stabes (die von irgend einer der beiden Ansichtsflächen aus aufgenommen sein kann) das Kräftepaar der äusseren Kräfte für sich genommen den linken Theil des Stabes im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht. Die Scheerkraft wird stets mit V bezeichnet und sie gilt als positiv, wenn sie am linken Theile des Stabes in der Zeichnung nach oben hin gerichtet ist. Diese Festsetzungen sind in der technischen Mechanik ganz allgemein eingeführt und man muss sich daher, obschon sie an sich willkürlich sind, daran halten.

Die nächste Aufgabe, die uns gestellt ist, besteht darin, die Spannungen zu berechnen, die in den einzelnen Theilen des Querschnitts auftreten, wenn M und V gegeben sind. Wir wollen sie zuerst noch dadurch vereinfachen, dass wir den

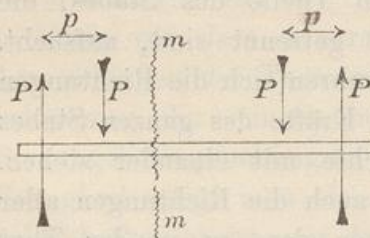


Abb. 17.

Fall der reinen Biegung voraussetzen, also $V=0$ annehmen. Auf den allgemeineren Fall werden wir dann leicht dadurch gelangen, dass wir die durch V für sich bewirkten Spannungen hinzufügen. Der Fall der reinen Biegung (ohne Scheerbeanspruchung) liegt z. B. im mittleren Theile einer Eisenbahnwagenaxe vor oder auch bei der

in Abb. 17 schematisch gezeichneten Belastung des Stabes. Für den Querschnitt mm , der irgendwo im mittleren Abschnitte des Stabes gezogen sein kann, reduciren sich alle

äußeren Kräfte am linken Theile des Stabes auf ein Kräftepaar, dessen Moment $= Pp$ und das nach den vorausgehenden Vorzeichenbestimmungen positiv zu rechnen ist.

Die Aufgabe, die Spannungen zu berechnen, ist statisch unbestimmt. Wenn wir auf die elastischen Formänderungen keine Rücksicht zu nehmen hätten, könnten wir jede beliebige Vertheilung der Spannungen über den Stabquerschnitt als gleich gut möglich ansehen, wenn sie nur zu einem Kräftepaare vom Momente M führte.

Ueber die elastische Formänderung, die der Stab unter dem Einflusse der in Abb. 17 angegebenen Kräfte erfährt, lässt sich zunächst nur aussagen, dass sich die Angriffspunkte der Kräfte im Sinne dieser Kräfte relativ gegen einander etwas verschieben müssen. Denkt man sich diese Angriffspunkte alle auf der Stabaxe gelegen, so werden die Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Angriffspunkte nach der Formänderung einen Linienzug bilden, der nach oben hin hohl ist. Wegen der Stetigkeit des Zusammenhangs kann aber die Stabaxe selbst an keiner Stelle einen Knick erfahren; die ursprünglich gerade Stabaxe wird daher in eine flache Curve übergehen. Diese Curve heisst die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Diese allgemeinen Bemerkungen sind noch zu unbestimmt, um ein Urtheil über die Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt darauf gründen zu können. Um diese Unbestimmtheit zu heben, nimmt man an, dass jeder Querschnitt, der senkrecht zur Stabaxe gezogen wurde, nach der Formänderung eben bleibt. Diese Annahme wird zunächst rein willkürlich eingeführt; sie ist zuerst von Bernoulli aufgestellt worden und dient seit den Arbeiten von Navier allgemein als Ausgangspunkt der Biegungslehre in der technischen Mechanik.

Gegen die Einführung einer solchen Annahme ohne jede weitere Begründung ist natürlich ein ernstes Misstrauen am Platze. In der That wird man sich durchaus nicht befriedigt fühlen können, wenn diese Annahme, wie es oft genug geschieht, in der Form eines Axioms eingeführt wird. Besser

ist es, sie als einen Satz hinzustellen, der seine Rechtfertigung dadurch findet, dass die aus ihm gezogenen Folgerungen im Einklange mit der Erfahrung sind.

In einem späteren Abschnitte werden wir sehen, dass man die Zulässigkeit der Bernouilli'schen Annahme auch noch einer strengeren Prüfung unterwerfen kann. Für Körper, die dem Hooke'schen Gesetze gehorchen, werden wir sie bei jener Gelegenheit wenigstens für den Fall der reinen Biegung bestätigt finden. Für andere Körper kann indessen nur durch eine unmittelbare Beobachtung festgestellt werden, ob und bis zu welchem Grade der Genauigkeit sie in Wirklichkeit erfüllt ist.

Eine solche Prüfung habe ich auf folgende Weise vorgenommen. Ein Steinbalken von 20×30 cm Querschnitt wurde auf 150 cm Spannweite frei aufgelagert und in der Mitte belastet. Die Lastebene war parallel der grösseren Querschnittsseite. Auf den Ansichtsflächen des Balkens liess ich mehrere Reihen von kleinen Stiften einkitten, auf die man Spiegel aufschraubte. Wenn der Balken belastet wurde, drehten sich diese Spiegel zusammen mit dem Theile des Balkens, an dem sie befestigt waren. Die kleine Drehung der Spiegel wurde mit Hülfe eines Fernrohrs beobachtet. Dabei zeigte sich, dass alle Spiegel, die zu demselben Querschnitte gehörten, ziemlich genau dieselbe Drehung ausführten. Das ist aber in der That nur möglich, wenn der Querschnitt — mit dem gleichen Grade der Annäherung — eben bleibt. Zum mindesten ist zu schliessen, dass die Umfangsseiten des Querschnittsumrisses geradlinig geblieben sind. Denn wenn sich eine dieser Seiten merklich krümmen sollte, müssten verschiedene Linienelemente der Seite verschiedene Winkel mit der Anfangslage bilden und die verschiedene Drehung hätte sich bei der Beobachtung der Spiegel verrathen müssen.

Es kann daher als nachgewiesen gelten, dass auch selbst bei solchen Materialien, die dem Hooke'schen Gesetze nicht gehorchen, die Bernouilli'sche Annahme als hinreichend genau zutreffend angesehen werden kann. Unter „hinreichend genau“

ist hier ein solcher Grad der Annäherung zu verstehen, der die weiteren Schlüsse aus der Bernouilli'schen Annahme vor den grössten Fehlern schützt; namentlich ist die Krümmung der Querschnitte im Allgemeinen nicht erheblich gegenüber der Krümmung, die die Stabaxe erfährt.

Für den Fall der reinen Biegung (Scheerkraft $V = 0$) haben wir keine Veranlassung, ein Auftreten von Schubspannungen im Querschnitte zu vermuthen. Zum mindesten müssten alle Schubspannungen unter sich im Gleichgewichte mit einander stehen. Wenn der Querschnitt in der That genau eben bleiben soll, können aber überhaupt keine Schubspannungen übertragen werden, denn diese hätten Winkeländerungen γ zur Folge, die an verschiedenen Stellen nicht nur von verschiedener Grösse, sondern auch von entgegengesetztem Vorzeichen sein müssten. Es handelt sich dabei um die ursprünglich rechten Winkel zwischen der Querschnittsebene und den zur Stabaxe parallel gezogenen Linien. Wenn sich diese an verschiedenen Stellen um verschiedene Beträge änderten, könnte der Querschnitt offenbar nicht eben bleiben.

Wir werden also festhalten, dass für den Fall $V = 0$ auch die Schubspannungen τ überall im Querschnitte gleich Null zu setzen sind. Daraus folgt dann sofort weiter, dass der Querschnitt nach der Formänderung senkrecht zur elastischen Linie steht.

Man betrachte jetzt ein Längenelement des Stabes, das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten liegt. Nach der Formänderung schneiden sich die beiden Querschnittsebenen in einer Geraden, die durch den Krümmungsmittelpunkt der elastischen Linie geht. Jedem Flächenelemente dF des Querschnitts entspricht ein Theil des Stabes, den wir als eine Faser bezeichnen wollen. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Querschnitten liegenden Fasern waren ursprünglich gleich lang; nach der Formänderung sind aber die auf der Hohlseite der elastischen Linie liegenden kürzer als die auf der convexen Seite — und zwar verhalten sich die Längen unmittelbar wie die Abstände der Fasern vom Krümmungsmittelpunkte der

elastischen Linie. Den Längenänderungen, die diese Fasern erfuhren, entsprechen nach dem Elasticitätsgesetze die Normalspannungen σ , die in den Querschnittselementen übertragen werden.

Wir wissen schon, dass sich die Normalspannungen σ zu einem Kräftepaare vom Momente M zusammensetzen müssen. Daraus folgt, dass im Querschnitte sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden. Die Fasern auf der convexen Seite sind also jedenfalls länger geworden, als sie ursprünglich waren und die auf der Hohlseite haben sich verkürzt. Dazwischen liegt eine Faserschicht, die sich weder verkürzt noch verlängert hat. Die ihr im Querschnitte entsprechende Linie wird die neutrale Axe oder auch die Nulllinie des Querschnitts genannt.

Proportional mit dem Abstände von der neutralen Axe wachsen die elastischen Längenänderungen der Fasern. Wenn ausser der Bernouilli'schen Annahme auch noch das Hooke'sche Gesetz gilt, müssen wir daher schliessen, dass auch die Normalspannungen σ , die im Querschnitte übertragen werden, ihrem Abstände von der neutralen Axe proportional zu setzen sind. Diesen wichtigen Schluss hat zuerst Navier aus der Bernouilli'schen Annahme gezogen.

Diese ganze Betrachtung lässt sich auch noch durch eine andere ersetzen. Ohne uns auf die an sich willkürliche Bernouilli'sche Annahme zu stützen, können wir davon ausgehen, dass im Querschnitte jedenfalls sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden müssen. Die Normalspannung σ in irgend einem Punkte des Querschnitts kann dann als eine zunächst unbekannte Function der Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf zwei im Querschnitte rechtwinklig zu einander gezogene Coordinatenachsen der y und z betrachtet werden. Wir setzen also

$$\sigma = f(yz).$$

Immer wenn man keinen bestimmten Anhaltspunkt für die Form einer solchen unbekanntem Function hat, versucht man zunächst, mit den einfachsten Annahmen dafür auszu-

kommen. Dass σ nicht constant sein kann, hat uns schon die oberflächlichste Betrachtung der elastischen Formänderung gelehrt. Die hiernach noch mögliche einfachste Annahme besteht darin, dass σ eine Function ersten Grades der Querschnittscoordinaten yz ist. Das ist aber gerade die von Navier vorausgesetzte oder aus der Bernouilli'schen Voraussetzung gefolgerte Spannungsvertheilung.

Diese Art der Begründung unseres Ansatzes hat den Vorzug, dass sie nicht den Anschein erweckt, als ob es sich dabei um ein streng gültiges Naturgesetz handle; wir treten in die weitere Untersuchung sofort mit dem Bewusstseine ein, dass unsere Biegungstheorie nur angenäherte Gültigkeit hat und werden dadurch vor dem häufig vorkommenden Fehler bewahrt, alle Folgerungen, die daraus fliessen, als buchstäblich genau anzusehen. Der fortwährende Vergleich unserer Rechnungen mit den Beobachtungsthatfachen allein kann uns zeigen, wie weit wir diesen Rechnungen vertrauen dürfen. Mit dem blossen Nachgrübeln ist es hier nicht gethan. In anderen Gebieten der Mechanik, die ausschliesslich auf streng gültigen Naturgesetzen beruhen, ist man damit — wenn man dies so auffassen will — in günstigerer Lage. Man kann dort unter Umständen die wichtigsten Entdeckungen bloss am Schreibtische machen. In der Festigkeitslehre müssen aber die theoretisch abgeleiteten Folgerungen immer erst durch den Versuch geprüft werden, ehe man volles Vertrauen in sie setzen darf. Glücklicherweise liegt eine solche Bestätigung durch den Versuch indessen in fast allen wichtigeren Fällen schon vor und man braucht daher die Besorgniss gegen die theoretischen Lehren auch nicht zu übertreiben.

Eine Function ersten Grades wird auch als eine lineare Function bezeichnet, weil sie durch das Bild einer geraden Linie — oder bei zwei unabhängigen Veränderlichen durch eine Ebene — zur Darstellung gebracht werden kann. Denken wir uns also in jedem Punkte des Querschnitts die dort auftretende Normalspannung σ durch eine in deren Richtung gezogene Strecke in einem beliebigen Maassstabe dargestellt, so liegen die End-

punkte aller dieser Strecken nach Navier auf einer Ebene, die die Querschnittsebene in der Nulllinie schneidet. In Anlehnung an jenen Sprachgebrauch bezeichnet man das Navier'sche Spannungsvertheilungsgesetz auch als das lineare oder als das Gradliniengesetz. Die Bezeichnungen „lineare Spannungsvertheilung“ und „linearer Spannungszustand“ dürfen nicht verwechselt werden. Bei der letzten denkt man nur an die Spannungen, die in demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen hin auftreten; bei der ersten handelt es sich nur um Spannungen für dieselbe Schnittrichtung, die aber in verschiedenen Punkten des Querschnitts vorkommen. Im Falle der „reinen“ Biegungsbeanspruchung ist übrigens auch der Spannungszustand in jedem Punkte linear.

§ 14. Folgerungen aus dem Gradliniengesetze.

Wir denken uns die Coordinatenachsen der y und z im Querschnitte so gelegt, dass die Z -Achse mit der Nulllinie zusammenfällt. Dann ist σ überall unabhängig von z , und da es zu Null wird für $y = 0$, verschwindet auch das constante Glied, das in der linearen Function im Allgemeinen auftritt. Bezeichnen wir die Spannung in irgend einem bestimmten Punkte, der den Abstand y_0 von der Nulllinie hat, mit σ_0 , so hat man für jeden anderen Punkt nach dem Gradliniengesetze

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \text{ oder } \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}. \quad (45)$$

Im Falle der reinen Biegung müssen die Normalspannungen ein Kräftepaar liefern; die Summe der Zugspannungen muss daher gleich der Summe der Druckspannungen sein. Dabei ist zu beachten, dass Gl. (45) die Spannung σ auch schon dem Vorzeichen nach richtig angibt, indem die nach verschiedenen Seiten der Nulllinie gerichteten Abstände y mit entgegengesetzten Vorzeichen zu rechnen sind. Wir können daher auch einfacher sagen, dass die algebraische Summe aller Normalspannungen für den ganzen Querschnitt gleich Null sein muss. In Form einer Gleichung heisst dies

$$\int \sigma dF = 0,$$

wenn die Summierung über den ganzen Querschnitt ausgeführt wird. Nach Einsetzen von σ aus Gl. (45) wird daraus

$$\int \frac{\sigma_0}{y_0} y dF = \frac{\sigma_0}{y_0} \int y dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int y dF = 0. \quad (46)$$

Die Summe $\int y dF$ stellt aber das statische Moment der Querschnittsfläche in Bezug auf die Z -Axe dar, und die Bedingung, dass dieses Moment Null sein muss, lehrt uns, dass die mit der Z -Axe zusammenfallende Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

Ferner muss das statische Moment des aus den Spannungen gebildeten Kräftepaars gleich dem Biegemomente M sein. Dabei genügt es indessen nicht, dass beide nur der Grösse nach einander gleich sind; beide Kräftepaare müssen vielmehr auch in derselben Ebene liegen — und wir werden nachher sehen, dass diese letzte Bedingung ebenso wichtig ist, als die andere. Wenn der Querschnitt des Stabs, wie es sehr häufig bei den Anwendungen der Fall ist, symmetrisch gestaltet ist und alle äusseren Kräfte in der Symmetrieebene liegen, ist diese Bedingung freilich von selbst erfüllt, sobald man die Nulllinie, wie es wegen der Symmetrieeigenschaften nicht anders sein kann, senkrecht zur Symmetrieebene annimmt. Wir wollen hier zunächst den einfachsten Fall behandeln, nämlich den Fall, dass die Nulllinie in der That senkrecht zur Ebene des Kräftepaars M steht. Dagegen wollen wir nicht gerade von vornherein annehmen, dass der Querschnitt symmetrisch gestaltet sei; vielmehr wollen wir ganz allgemein untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser einfachste Fall eintritt.

Die Momentengleichung für die Nulllinie (oder die Z -Axe) liefert

$$\int \sigma dF y = M$$

oder wenn man σ aus Gl. (45) einsetzt,

$$\frac{\sigma_0}{y_0} \int y^2 dF = M. \quad (47)$$

Die über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Summengrösse $\int y^2 dF$ ist nur noch von der Gestalt des Querschnittes abhängig und kann, wenn diese gegeben ist, entweder durch Ausführung der Integration oder, wenn diese zu viel Schwierigkeit machen sollte, durch eine mechanische Quadratur immer leicht berechnet werden. Sie wird das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Z -Axe genannt. Bezeichnet man dieses mit Θ , so folgt aus Gl. (47)

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0. \quad (48)$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, für irgend einen vorher in's Auge gefassten Punkt des Querschnitts mit dem Abstände y_0 von der Z -Axe die Spannung σ_0 zu berechnen. Mit Rücksicht auf Gl. (45) kann man auch die Zeiger 0 in Gl. (48) nachträglich noch streichen.

Gewöhnlich will man die grösste Spannung σ berechnen, die überhaupt im Querschnitte auftritt. Man hat dann unter y_0 in Gl. (48) den grössten Abstand von der Nulllinie zu verstehen, der im Querschnitte vorkommt. In diesem Falle kann man die beiden nur von der Querschnittsgestalt abhängigen Grössen in Gl. (48) zu einer einzigen zusammenfassen, indem man setzt

$$\frac{\Theta}{y_0} = W. \quad (49)$$

Die Grösse W wird das Widerstandsmoment des Querschnitts genannt. Hiermit geht Gl. (48) über in

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad (50)$$

wobei der Zeiger der Einfachheit wegen weggelassen ist, ob schon man sich wohl zu erinnern hat, dass diese Spannung σ nur an der äussersten Kante auftritt. Aus der Bedeutung von Θ folgt, dass es eine Grösse von der Dimension cm^4 ist, d. h., dass es die vierte Potenz einer Länge darstellt. Die Dimension von W ist cm^3 . In den von den Hüttenwerken herausgegebenen Verzeichnissen der von ihnen gewalzten Eisenträger ist zur Bequemlichkeit des Benutzers für jedes Profil sowohl

Θ als W angegeben. Gewöhnlich beziehen sich diese Angaben auf 1 mm als Längeneinheit; will man in cm rechnen, wie es hier immer geschieht, so muss man demnach bei Θ vier und bei W drei Stellen abschneiden.

Um uns zu überzeugen, dass Gl. (48) den Dimensionen nach richtig ist, setzen wir die Dimensionen der auf der rechten Seite vorkommenden Grössen ein, indem wir die zugehörigen Zahlenwerthe unbeachtet lassen. Wir erhalten dann, da M in cm kg anzugeben ist,

$$\frac{\text{cm kg}}{\text{cm}^4} \cdot \text{cm} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

und dies ist in der That die Dimension einer specifischen Spannung.

Die vorausgehenden Gleichungen gelten aber nur unter der Voraussetzung, von der aus sie abgeleitet sind, dass nämlich die Nulllinie senkrecht zur Ebene des Biegemoments M steht. Ob und unter welchen Umständen diese Voraussetzung zutrifft, lehrt uns eine zweite Momentengleichung, die ausspricht, dass die Ebene des aus den Spannungen σ zusammengesetzten Kräftepaars mit der Ebene des Biegemoments zusammenfällt. Dazu bilden wir die statischen Momente in Bezug auf die Y -Achse des Querschnitts. Diese Axe sei in der Ebene des Biegemoments angenommen, also durch den Querschnittsschwerpunkt senkrecht zur Nulllinie gezogen, und das statische Moment der äusseren Kräfte ist daher für sie gleich Null. Dasselbe muss also auch von dem statischen Momente der Spannungen zutreffen. Wir haben also

$$\int \sigma dFz = 0 \quad \text{oder} \quad \int yz dF = 0, \quad (51)$$

wobei die letzte Form der Gleichung wieder durch Einsetzen von σ aus Gl. (45) aus der vorhergehenden gefunden wird.

Auch die Summengrösse $\int yz dF$ hängt nur von der Gestalt des Querschnitts und von der Richtung der Schwerpunktsaxe ab, die mit der Nulllinie zusammenfällt. Alle Summengrössen, die über den Querschnitt zu erstrecken sind

und die Producte aus den Flächenelementen und den Querschnittscoordinaten enthalten, bezeichnet man als Momente und bemisst deren Grad nach der Zahl der Querschnittscoordinaten, die als Factoren in jenen Producten auftreten. Wie das Trägheitsmoment ist daher auch $\int yz dF$ als ein Moment zweiten Grades des Querschnitts zu bezeichnen. Man hat ihm noch die besonderen Namen „Centrifugalmoment“ oder auch „Deviationsmoment“ gegeben. Es soll mit Φ bezeichnet werden, wobei die besonderen Axenrichtungen durch angehängte Zeiger kenntlich gemacht werden können. Gl. (51) kann hiernach auch in der Form

$$\Phi_{yz} = 0 \quad (52)$$

ausgesprochen werden. Damit ist die gesuchte Bedingung gefunden; nur dann, wenn das Centrifugalmoment des Querschnitts für ein durch den Schwerpunkt gelegtes rechtwinkliges Axenkreuz, von dem eine Axe in die Ebene des Moments der äusseren Kräfte fällt, gleich Null ist, können die Spannungen nach den einfachen Formeln (48) oder (50) berechnet werden.

Ein Trägheitsmoment kann nie zu Null werden, da es sich aus lauter positiven Gliedern zusammensetzt. Dagegen tragen alle Flächentheile des Querschnitts, die im ersten und dritten Quadranten des Axenkreuzes liegen, positive, alle im zweiten und vierten Quadranten negative Glieder zum Centrifugalmomente bei. Das Centrifugalmoment kann daher ebenso wohl negativ als positiv oder gleich Null werden. Der letzte Fall wird, wie man ohne Weiteres einsieht, immer bei symmetrischen Querschnitten eintreten, wenn eine Axe des Axenkreuzes mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, denn die Beiträge von je zwei spiegelbildlich zu einander liegenden Flächentheilen heben sich gegen einander gerade auf.

Ehe wir die Berechnung der Spannungen auf den Fall ausdehnen, dass Φ_{yz} nicht gleich Null ist, müssen wir einige geometrische Betrachtungen über die Momente zweiten Grades einschalten.

§ 15. Trägheits- und Centrifugalmomente von Querschnittsflächen.

Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, die Trägheitsmomente eines Querschnitts für alle Axen, die man in der Querschnittebene ziehen kann, unter einander zu vergleichen. In Abb. 18 gebe die schraffierte Fläche eine Querschnittsfläche von beliebiger Gestalt an; AA sei die Axe, für die man das Trägheitsmoment berechnen soll und S sei der Schwerpunkt der Fläche. Man ziehe durch S eine zweite Axe, die zu AA parallel ist. Das Trägheitsmoment für diese

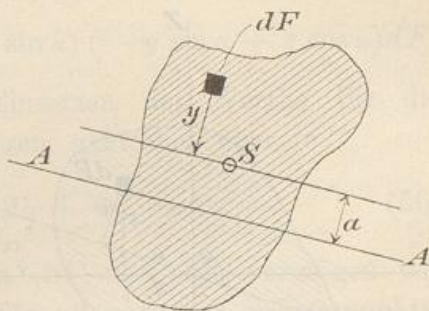


Abb. 18.

Schwerpunktsaxe sei einfach mit Θ , das für die Achse AA' , die den Abstand a von S hat, mit Θ_a bezeichnet. Der Abstand eines Flächenelementes dF von der Schwerpunktsaxe sei gleich y , das positiv oder negativ gerechnet werden soll, je nachdem es in entgegengesetzter oder in gleicher Richtung mit a liegt. Dann hat man:

$$\Theta_a = \int (y + a)^2 dF = \int y^2 dF + 2a \int y dF + a^2 \int dF.$$

Das erste Glied gibt das Trägheitsmoment Θ für die Schwerpunktsaxe an. Das zweite Glied ist gleich Null, denn $\int y dF$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse und dieses verschwindet für alle Schwerlinien. Im dritte Gliede kann man $\int dF$ zur ganzen Querschnittsfläche F zusammenfassen. Die vorige Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$\Theta_a = \Theta + a^2 \cdot F. \quad (53)$$

Man kann hiernach auf sehr einfache Weise für alle übrigen Axen die Trägheitsmomente angeben, sobald man sie für alle Schwerpunktsaxen kennt. Dieser Satz wird häufig gebraucht, um das Trägheitsmoment eines Querschnitts zu be-

rechnen, der sich aus verschiedenen Flächen von einfacher Gestalt, z. B. aus lauter Rechtecken, wie der I-förmige Querschnitt zusammensetzt, wovon bei den Aufgaben noch weiter die Rede sein wird.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Trägheitsmomente für die in verschiedenen Richtungen durch den

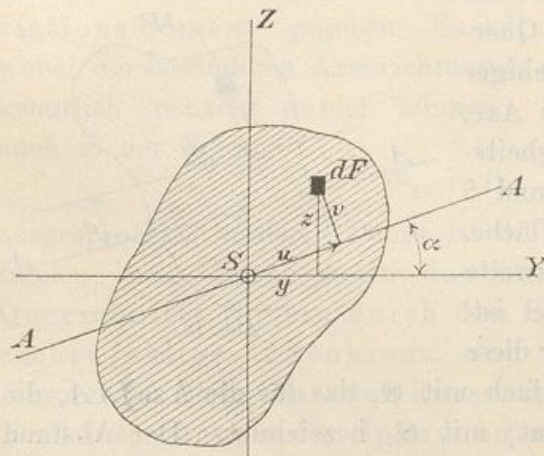


Abb. 19.

Schwerpunktgezogenen Axen mit einander zu vergleichen. Wir legen in Abb. 19 durch den Schwerpunkt in beliebiger Richtung ein rechtwinkliges Axenkreuz der YZ und ziehen noch eine dritte Schwerlinie AA' , die mit der Y -Richtung den beliebigen Winkel α bildet. Die Koordinaten eines Flächenelementes dF

seien mit yz , der Abstand zwischen dF und AA' mit v und

$$u = y \cos \alpha + z \sin \alpha,$$

$$v = -y \sin \alpha + z \cos \alpha.$$

der Abschnitt, den v auf AA' von S an gerechnet bildet, mit u bezeichnet. Dann ist

$$\Theta_a = \int v^2 dF = \int (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dF.$$

Beim Ausquadriren geht dies über in

$$\Theta_a = \cos^2 \alpha \int z^2 dF + \sin^2 \alpha \int y^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int yz dF.$$

Die hier noch vorkommenden Summengrößen bilden aber die Momente zweiten Grades für die Koordinatenachsen der y und z . Versteht man unter Θ_y das Trägheitsmoment in Bezug auf die Y -Axe, also

$$\Theta_y = \int z^2 dF$$

und entsprechend bei den anderen Momenten, so hat man auch

$$\Theta_\alpha = \cos^2 \alpha \Theta_y + \sin^2 \alpha \Theta_z - \sin 2\alpha \Phi_{yz}. \quad (54)$$

Wir bilden sofort auch das Centrifugalmoment Φ_α für die Axe AA und eine zu ihr senkrecht gezogene. Nach der Definition des Centrifugalmoments ist

$$\Phi_\alpha = \int uv dF = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha) (-y \sin \alpha + z \cos \alpha) dF.$$

Nach Ausmultipliciren und Einsetzen der Werthe für die dabei auftretenden Summengrößen, geht dies über in

$$\Phi_\alpha = \frac{\Theta_y - \Theta_z}{2} \sin 2\alpha + \Phi_{yz} \cos 2\alpha. \quad (55)$$

Mit Hülfe der Gleichungen (54) und (55) vermögen wir die Momente zweiten Grades für alle anderen Schwerpunktsaxen anzugeben, wenn sie für irgend zwei zu einander senkrechte Axen bereits bekannt sind. Wir wollen jetzt untersuchen, für welche Richtungen der Schwerpunktsaxe das Trägheitsmoment zu einem Maximum oder Minimum wird. Dazu differentiiren wir Θ_α nach α und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_\alpha}{d\alpha} &= -2 \cos \alpha \sin \alpha \Theta_y + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Theta_z - 2 \cos 2\alpha \Phi_{yz} \\ &= (\Theta_z - \Theta_y) \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha \Phi_{yz} \\ &= -2 \Phi_\alpha. \end{aligned}$$

Für ein Maximum oder Minimum von Θ_α muss der Differentialquotient verschwinden und wir sehen, dass dies bei jenen Axen zutrifft, für die das Centrifugalmoment verschwindet. Durch Auflösen der Gleichung $\Phi_\alpha = 0$ erhalten wir für diese ausgezeichneten Richtungen

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \Phi_{yz}}{\Theta_z - \Theta_y}. \quad (56)$$

Welchen Werth auch der Bruch auf der rechten Seite haben möge, man kann immer zwei zwischen 0 und 2π liegende Winkel, die sich um zwei Rechte von einander unterscheiden, angeben, deren Tangente gleich diesem Werthe ist.

Es gibt also auch immer zwei zwischen 0 und π liegende Winkel α , von denen der eine um einen Rechten grösser ist, als der andere, für die das Centrifugalmoment zu Null wird und Θ einen grössten oder kleinsten Werth annimmt. Ob der eine oder der andere Fall vorliegt, vermag man leicht mit Hülfe des zweiten Differentialquotienten zu entscheiden. Es genügt aber auch, darauf aufmerksam zu machen, dass sich Θ stetig ändert, wenn man die Axe AA eine Umdrehung ausführen lässt, und dass daher von den beiden ausgezeichneten Werthen nothwendig der eine ein Maximum, der andere ein Minimum sein muss. Die beiden zu einander senkrechten Richtungen, die durch Gl. (56) bestimmt sind, werden die Hauptaxen des Querschnitts genannt.

Jeder beliebig gestaltete Querschnitt hat also immer mindestens zwei durch den Schwerpunkt gehende Hauptaxen. War zufällig $\Phi_{yz} = 0$, so sind die Coordinatenaxen nach Gl. (56) selbst die Hauptaxen. Es kann aber auch vorkommen, dass jede Schwerpunktsaxe des Querschnitts zugleich eine Hauptaxe ist, nämlich dann, wenn $\Phi_{yz} = 0$ und zugleich $\Theta_x = \Theta_y$ ist. Der Bruch auf der rechten Seite von Gl. (56) nimmt dann die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; wir erkennen aber aus Gl. (55), dass in diesem Falle Φ_α für jede Axe AA zu Null wird und aus Gl. (54) folgt, dass dann alle Trägheitsmomente Θ_α unter einander gleich sind. Dieser Fall liegt z. B. bei einem Quadrate oder überhaupt bei jedem regelmässigen Vielecke vor.

Um die Centrifugalmomente brauchen wir uns in der Folge nicht weiter zu kümmern. Dagegen wollen wir noch eine geometrische Darstellung ableiten, mit deren Hülfe man die in den vorausgehenden Formeln ausgesprochenen Gesetzmässigkeiten leicht zu überblicken vermag. Zu diesem Zwecke können wir uns die Coordinatenaxen der y und z von vornherein in die Richtungen der Hauptaxen gelegt denken. Gl. (54) vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu

$$\Theta_\alpha = \cos^2 \alpha \Theta_y + \sin^2 \alpha \Theta_z. \quad (57)$$

An Stelle der Trägheitsmomente selbst wollen wir in diese Gleichung die Trägheitsradien einführen. Dividirt man nämlich jedes Trägheitsmoment durch die Fläche des Querschnitts, so erhält man eine Grösse, die das Quadrat einer Länge darstellt. Setzt man also

$$t_\alpha^2 = \frac{\Theta_\alpha}{F}, \quad (58)$$

so bedeutet t_α den quadratischen Mittelwerth der Abstände aller Flächenelemente des Querschnitts von der Axe. Dieser Mittelwerth wird als Trägheitshalbmesser bezeichnet; man rechnet, da er eine Strecke bildet, mit ihm oft viel bequemer als mit dem Trägheitsmomente selbst. Durch Division mit F geht Gl. (57) über in

$$t_\alpha^2 = \cos^2 \alpha t_y^2 + \sin^2 \alpha t_z^2. \quad (59)$$

Um t_α als Funktion des Richtungswinkels α geometrisch darzustellen, würde es am nächsten liegen, die Grösse von t_α auf jeder Schwerpunktsaxe abzutragen und alle Endpunkte durch eine Curve zu verbinden. Wenn auch gegen diese Darstellung nichts einzuwenden ist, so wäre sie doch nicht bequem, da die erhaltene Curve vom vierten Grade wäre und über deren Eigenschaften nichts als bekannt vorausgesetzt werden könnte. Man muss bei solchen Darstellungen immer suchen, mit wohlbekanntem Curven, also namentlich mit Curven zweiten Grades auszukommen. Dies ist hier auch leicht möglich, wenn man auf jeder Schwerpunktsaxe nicht t_α selbst, sondern eine Strecke abträgt, die ihr umgekehrt proportional ist. Zu diesem Zwecke wähle man eine beliebige Strecke m und bilde zu jedem Trägheitshalbmesser t den Werth

$$\tau = \frac{m^2}{t}. \quad (60)$$

Setzt man den Werth von t aus dieser Gleichung in Gl. (59) ein, so geht sie nach einer einfachen Umformung über in

$$1 = \left(\frac{\tau_\alpha \cos \alpha}{\tau_y} \right)^2 + \left(\frac{\tau_\alpha \sin \alpha}{\tau_z} \right)^2 \quad (61)$$

und dies ist, wenn τ_α als Radiusvector auf jedem Strahle α abgetragen wird, die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, auf der die Endpunkte der Radienvectoren enthalten sind. Der Maassstab, in dem die Ellipse gezeichnet ist, hängt von der Wahl des beliebigen Factors m in Gl. (60) ab.

Noch etwas übersichtlicher wird die Darstellung, wenn man sich einer bekannten Eigenschaft der Ellipse erinnert.

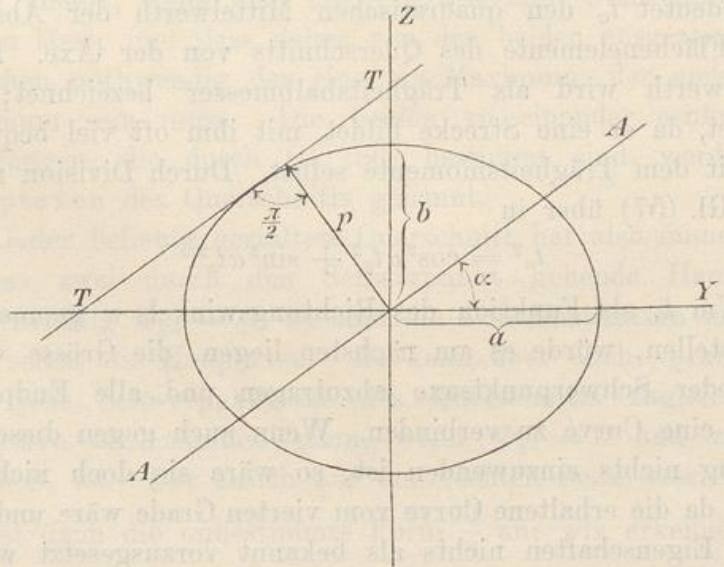


Abb. 20.

Zieht man nämlich in Abb. 20 zu dem Durchmesser AA einer Ellipse eine parallele Tangente TT , so ist das Perpendikel p vom Mittelpunkte auf die Tangente durch die Gleichung

$$p^2 = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \quad (62)$$

gegeben und aus dem Vergleiche mit Gl. (59) folgt, dass p den zu AA gehörigen Trägheitshalbmesser angibt, wenn man die Halbaxe $a = t_z$ und $b = t_y$ macht. Die auf diese Art erhaltene Ellipse ist übrigens unter jenen enthalten, die bei der vorigen Darstellung gefunden wurden. Es ist nämlich jene, für die

$$m^2 = t_y t_z$$

gewählt wird, denn beide stimmen sowohl in den Richtungen als in den Grössen der Hauptaxen mit einander überein. Es

ist zweckmässig, auch wenn man an der ersten Darstellung festhalten will, m stets in dieser Grösse zu wählen. Die so bestimmte Ellipse heisst allgemein die Trägheitsellipse. Man kann nämlich die ganze vorausgehende Betrachtung mit geringer Aenderung auch für alle Strahlen durchführen, die nicht durch den Schwerpunkt, sondern durch einen anderen beliebig gewählten Punkt des Querschnitts gezogen sind; ich habe hier davon abgesehen, da ich nicht unnöthiger Weise umständlicher in der Darstellung werden wollte, als es durch den Zweck geboten ist. Für die durch den Schwerpunkt gehenden Axen führt die Trägheitsellipse den besonderen Namen Centralellipse.

Man kann übrigens, auch ohne von dem in Gl. (62) ausgesprochenen Satze Gebrauch zu machen, die zweite Darstellung aus der ersten ableiten. Zu diesem Zwecke betrachte man die Centralellipse, die zunächst dadurch definirt sei, dass auf jedem Strahle die Strecke τ nach Gl. (60) (mit $m^2 = t_y t_z$) abgetragen ist, als Projection eines Kreises. Um diesen Kreis denke man sich eine Anzahl von Quadraten umschrieben, die man mit projectirt. Alle diese Quadrate und daher auch alle ihre Projectionen haben gleichen Flächeninhalt. Daraus folgt sofort, wenn p wieder das vorher damit bezeichnete Perpendikel bedeutet, dass $p\tau$ constant und zwar gleich $\tau_y \tau_z$ sein muss, also

$$p\tau = p \frac{m^2}{t} = \frac{m^4}{t_y t_z} = m^2$$

und hiermit $p = t$.

Wenn die Centralellipse gegeben ist, findet man den zu irgend einer Axe gehörigen Trägheitshalbmesser immer am einfachsten, indem man eine parallele Tangente an die Ellipse zieht und deren Abstand vom Mittelpunkte mit dem Zirkel abmisst. Man hat dann keine Umrechnung nöthig, wie sie nach Gl. (60) erforderlich wird, wenn man von dem Radiusvector τ ausgeht, der von der Centralellipse auf dem Strahle abgeschnitten wird.

Die Aufgabe, das Trägheitsmoment für irgend eine in der

Querschnittsebene enthaltene Axe möglichst schnell anzugeben, ist durch die vorausgehenden Betrachtungen als gelöst anzusehen, sobald die Centralellipse bekannt ist. Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie man diese selbst erhält. Hat der Querschnitt eine Symmetrieaxe, so kennt man sofort die Richtungen der Hauptaxen und man braucht nur die Trägheitsmomente durch unmittelbare Ausführung der Summirung aufzusuchen, um die Hauptträgheitsradien und damit die Hauptaxen der Centralellipse zu erhalten. Im anderen Falle zieht man drei Schwerpunktsaxen in beliebigen Richtungen, berechnet für diese unmittelbar die Trägheitsmomente, findet daraus die Trägheitsradien und zieht dann zu beiden Seiten jeder Axe eine Parallele, deren Abstand gleich dem Trägheitsradius gemacht wird. Man hat damit sechs Tangenten der Centralellipse gefunden. Nach dem Satze von Brianchon kann man dann noch beliebig viele andere Tangenten in einfachster Weise construiren. Die Ellipse selbst wird damit ebenfalls als die von diesen Tangenten umhüllte Curve bekannt. Darin besteht eben der Vortheil, den die Darstellung mit Hülfe einer Curve zweiten Grades gewährt, dass man bei allen weiteren Constructionen unmittelbar an bekannte Eigenschaften und bekannte Sätze anknüpfen kann. — Natürlich kann man anstatt dieses Verfahrens auch das Centrifugalmoment neben den beiden Trägheitsmomenten für zwei zu einander rechtwinklige Axen berechnen und die Lage der Hauptaxen nach Gl. (56) bestimmen.

Für die in der Technik viel gebrauchten Walzeisenprofile sind die Richtungen der Hauptaxen und die zugehörigen Trägheitshalbmesser oder Trägheitsmomente ein für alle Male vorausberechnet, und in den in allen Zeichenstuben zu findenden Verzeichnissen angegeben, so dass man in der Mehrzahl aller Fälle die Centralellipse auf Grund dieser Angaben ohne weiteres auftragen kann.

Ich habe bisher immer nur von den Trägheitsmomenten für solche Axen gesprochen, die in der Querschnittsebene selbst enthalten sind. Man kann diese Untersuchung leicht auch

auf solche Fälle ausdehnen, bei denen die Axe einen beliebigen Winkel mit der Querschnittsebene bildet (oder ihr parallel ist). In der Festigkeitslehre kommt indessen nur noch einer von diesen Fällen in Frage, nämlich das Trägheitsmoment für eine zur Querschnittsebene senkrechte Axe. Dieses wird als das polare Trägheitsmoment bezeichnet. Gebraucht man dafür den Buchstaben Θ_p , so ist es definirt durch den Ansatz

$$\Theta_p = \int r^2 dF,$$

wenn r der senkrechte Abstand zwischen dF und der Axe ist. Zieht man durch den Schnittpunkt der Axe mit der Querschnittsebene wieder zwei Coordinatenachsen, so hat man

$$r^2 = y^2 + z^2$$

und daher

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z. \quad (63)$$

Θ_p ist also mit gegeben, wenn man die Centralellipse kennt. Bezeichnet man speciell die Hauptträgheitsmomente mit Θ_1 und Θ_2 und beachtet, dass die Coordinatenachsen jetzt in beliebiger Richtung gezogen sein durften, so erhält man aus Gl. (63) noch die einfache Beziehung

$$\Theta_y + \Theta_z = \Theta_1 + \Theta_2,$$

d. h. die Summe der Trägheitsmomente für irgend zwei auf einander rechtwinklige Axen, die in der Querschnittsfläche durch einen gegebenen Punkt gezogen sind, ist constant.

§ 16. Berechnung der Spannungsvertheilung bei schiefer Belastung.

Schief nennt man die Belastung eines auf Biegung beanspruchten Stabes, wenn die Ebene der äusseren Kräfte oder die Ebene des Biegemomentes nicht durch eine Hauptaxe des Querschnitts geht. Wenn die Kräfte alle in einer einzigen Ebene, der Kraftebene, enthalten sind, zerlegt man jede Kraft in zwei Componenten parallel zu den beiden Querschnittshauptaxen und setzt die Componenten von jeder Richtung zu

einem Biegemomente zusammen, dessen Ebene dann ebenfalls durch eine Hauptaxe geht. Im anderen Falle kann man wenigstens nachträglich das Biegemoment in zwei Kräftepaare zerlegen, deren Ebenen durch die Hauptaxen gehen. Wird der Winkel, den die Ebene des Biegemoments M mit einer der Hauptaxen bildet, mit α bezeichnet, so sind die Momente der beiden Componenten gleich $M \cos \alpha$ und gleich $M \sin \alpha$. Dann berechnet man die Spannungen, die durch jede Componente für sich genommen im Querschnitte hervorgerufen werden, nach Gl. (48) oder Gl. (50), die hier anwendbar sind. Die durch das Zusammenwirken beider Componenten entstehenden Spannungen findet man daraus durch algebraische Summirung der beiden Werthe. Im Ganzen hat man daher

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{\Theta_z} \cdot y + \frac{M \sin \alpha}{\Theta_y} \cdot z. \quad (64)$$

Eine einfache Betrachtung lässt nachträglich erkennen, an welcher Stelle des Querschnitts σ seinen grössten Werth annimmt.

Zur Begründung dieses Verfahrens kann man sich entweder auf das Gesetz der Superposition verschiedener Spannungszustände berufen oder man kann auch darauf hinweisen, dass die durch Gl. (64) angegebene Spannungsvertheilung linear ist und dabei das Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Kräften herstellt. Bei linearer Spannungsvertheilung ist ein solches Gleichgewicht nur auf eine einzige Art möglich, denn die Richtung der Nulllinie bestimmt eindeutig die Ebene des aus den Spannungen resultirenden Kräftepaars und die Grösse der Spannung in einem gegebenen Abstände von der Nulllinie bestimmt ebenfalls eindeutig die Grösse des statischen Moments dieses Kräftepaars. — Wenn das Gesetz der Superposition für den betreffenden Stoff nicht gültig ist, verliert die zuerst gegebene Begründung ihre Bedeutung. In diesem Falle ist aber auch kaum anzunehmen, dass die Spannungsvertheilung linear ist und die andere Begründung versagt daher ebenfalls. In der That darf man in

diesem Falle nicht darauf rechnen, dass Gl. (64) ziemlich genau richtig ist; ihre Anwendung kann vielmehr zu erheblichen Abweichungen von der Wirklichkeit führen. Indessen gilt dies, wie schon öfters bemerkt, bei allen Festigkeitsberechnungen, die sich auf solche Stoffe beziehen.

Ein einfaches Beispiel möge noch die Anwendung von Gl. (64) zeigen. Ein Holzbalken sei als Dachpfette verwendet, so dass eine Querschnittsseite in die Neigung der Dachfläche fällt. Der Querschnitt des Balkens ist in Abb. 21 gezeichnet. Nimmt man an, dass die Belastung Q des ganzen Balkens (samt Eigengewicht) gleichmässig über die ganze Spannweite l vertheilt ist, so hat man zunächst für das Biegemoment in der Mitte, wie man leicht findet,

$$M = \frac{Ql}{8}.$$

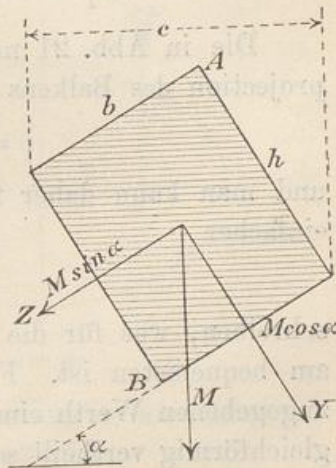


Abb. 21.

Die Ebene von M steht lothrecht und bildet daher Winkel von α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ mit den Hauptachsen. Die Componenten von M in den durch die Hauptachsen gelegten Ebenen sind in die Abbildung eingeschrieben.

Das Trägheitsmoment Θ_z eines Rechtecks folgt aus

$$\Theta_z = \int y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

und das Widerstandsmoment W_z daher

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Die Momente für die andere Hauptaxe findet man daraus durch Vertauschung von b mit h . — Durch das Axenkreuz der Y und Z wird das Rechteck in vier Quadranten zerlegt, von denen zwei durch die Belastungscomponenten $M \sin \alpha$ und

$M \cos \alpha$ Spannungen entgegengesetzten Vorzeichens erfahren, während sich bei den beiden anderen die Spannungen addiren. Man erkennt daraus, dass an der Ecke A die grösste Druck- und bei B die grösste Zugspannung auftritt und dass beide von einerlei Grösse sind. Diese grösste Spannung folgt daher aus

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{W_x} + \frac{M \sin \alpha}{W_y} = \frac{6 M \cos \alpha}{bh^2} + \frac{6 M \sin \alpha}{b^2h}.$$

Die in Abb. 21 mit c bezeichnete Breite der Horizontalprojection des Balkens ist

$$c = b \cos \alpha + h \sin \alpha$$

und man kann daher für den vorausgehenden Ausdruck auch einfacher

$$\sigma = \frac{6 M c}{b^2 h^2} \quad (65)$$

schreiben, was für die practische Ausführung der Berechnung am bequemsten ist. Für M hat man entweder den vorher angegebenen Werth einzusetzen, oder wenn die Belastung nicht gleichförmig vertheilt sein sollte, das anderweitig in der Kraftebene berechnete Biegemoment. Mit $c = b$ geht der Fall in den einfacheren über, dass die zu h parallele Symmetrieaxe in die lothrechte Kraftebene fällt.

§ 17. Excentrische Zug- oder Druckbelastung eines Stabes.

Wir nehmen jetzt an, dass die äusseren Kräfte am einen Theile des Stabes sich auf eine einzige Kraft zurückführen lassen, die senkrecht zum Querschnitte steht, dabei aber nicht durch den Schwerpunkt geht. Dieser Belastungsfall führt die in der Ueberschrift angegebene Bezeichnung. Offenbar handelt es sich hierbei um einen Fall der zusammengesetzten Festigkeit, nämlich um das Zusammenwirken einer axialen Belastung mit einer reinen Biegeb Belastung. Denn nach den früher gegebenen Vorschriften ist die äussere Kraft zu ersetzen durch eine ihr gleiche und parallele, die im Schwerpunkte angreift und durch das bei dieser Parallelverlegung

auftretende Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabmittellinie geht. Dieses Kräftepaar zerlegen wir noch, wie im vorigen Paragraphen, in zwei Componenten nach den Richtungen der Haupttaxen.

In Abb. 22 ist von dem Querschnitte nur die Central-ellipse gezeichnet; man kann sich den Querschnittsumriss beliebig hinzudenken. A sei der Angriffspunkt der äusseren Kraft P mit den Coordinaten u und v in Bezug auf die Hauptaxen. Dann ist noch irgend ein Flächenelement dF des Querschnitts mit den Coordinaten y und z angegeben. Die Spannung σ am Orte yz setzt sich aus drei Gliedern zusammen, nämlich

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pv}{\Theta_y} z + \frac{Pu}{\Theta_z} \cdot y.$$

Das erste Glied rührt von der axialen Belastung her; im zweiten Gliede ist Pv das Moment des Kräftepaars, dessen Ebene parallel zur Hauptaxe Z ist und ähnlich im dritten Gliede. Durch Einführung der Trägheitshalbmesser, die gleich den Halbaxen a und b der Centralellipse sind, an Stelle der Trägheitsmomente geht die vorige Gleichung über in

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{vz}{b^2} + \frac{uy}{a^2} \right). \quad (66)$$

In der neutralen Axe des Querschnitts muss dieser Ausdruck verschwinden, wir erhalten daher als Gleichung der Nulllinie

$$\frac{uy}{a^2} + \frac{vz}{b^2} = -1. \quad (67)$$

Darin sind y und z die Coordinaten von Punkten der Nulllinie, die selbstverständlich — nämlich weil dies schon bei

der Aufstellung der Ausdrücke für die Spannungen vorausgesetzt wurde — eine gerade Linie ist. Die Coefficienten von y und z in Gl. (67) hängen von den Coordinaten u und v , also von der Lage des Angriffspunktes der excentrischen Belastung ab. Jedem Punkte A ist durch Gl. (67) eine bestimmte Nulllinie zugeordnet. Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, diesen Zusammenhang näher zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke sei zunächst angenommen, der Angriffspunkt A liege auf der Centralellipse. Die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Ellipse seien mit $\eta\xi$ bezeichnet. Dann hat man die Ellipsengleichung

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1. \quad (68)$$

Setzt man nun $u = \eta$ und $v = \xi$, so wird Gl. (67) befriedigt, wenn wir $y = -\eta$ und $z = -\xi$ annehmen, denn diese Gleichung geht dann in Gl. (68) über. Wir erkennen daraus zunächst, dass die Nulllinie durch den dem Angriffspunkte diametral gegenüberliegenden Punkt der Centralellipse geht, falls der Angriffspunkt selbst auf der Centralellipse liegt. Weiter folgt aber noch, dass die Nulllinie in diesem Falle die Centralellipse berührt. Um dies zu beweisen, differentiiren wir die Gleichungen beider Linien. Wir finden

$$\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} \frac{dz}{dy} = 0,$$

$$\frac{\eta}{a^2} + \frac{\xi}{b^2} \frac{d\xi}{d\eta} = 0,$$

und wenn wir in die erste Gleichung die vorher angenommenen Werthe von u und v einsetzen und die zweite Gleichung auf den auf der Centralellipse liegenden Punkt der Nulllinie anwenden, finden wir in der That, dass an dieser Stelle

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d\xi}{d\eta}$$

ist, dass also die Nulllinie und die Centralellipse an dieser Stelle gleich gerichtet sind. Damit ist die Lage der Nulllinie vollständig bestimmt, für den Fall, dass der Angriffspunkt der Belastung auf der Centralellipse enthalten ist.

Wir denken uns jetzt den Angriffspunkt aus seiner ersten Lage längs des durch den Schwerpunkt gezogenen Strahles verschoben. Dann ändern sich u und v beide in demselben Verhältnisse. Auf den Werth des Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$, also auf die Richtung der Nulllinie, ist dies ohne Einfluss. Die Nulllinie verschiebt sich also dabei parallel zu sich selbst. Wenn etwa u und v doppelt so gross geworden sind, als vorher, müssen wir y und z überall halb so gross als vorher annehmen, um Gl. (67) wieder zu befriedigen. Daraus folgt, dass die Nulllinie um so näher an den Schwerpunkt heranrückt, je weiter sich der zugehörige Angriffspunkt entfernt und zwar so, dass das Produkt der Abstände beider vom Schwerpunkte constant bleibt. Die Nulllinie schneidet die Centralellipse, wenn der Angriffspunkt ausserhalb der Ellipse liegt und sie geht aussen vorbei im umgekehrten Falle. Wenn der Angriffspunkt in's Unendliche rückt, geht die Nulllinie zuletzt durch den Schwerpunkt selbst. — Dieses Resultat war schon nach dem Früheren zu erwarten, denn in diesem Falle kommt die axiale Belastung gegenüber dem biegenden Kräftepaare nicht mehr in Betracht und wir können geradezu den Fall der reinen Biegung als jenen Sonderfall der excentrischen Belastung betrachten, bei dem diese Belastung durch eine unendlich ferne und dabei unendlich kleine Kraft von endlichem Momente hervorgebracht wird. Dies führt uns nur wieder auf eine aus der allgemeinen Statik bekannte Deutung eines Kräftepaars. — Wenn umgekehrt der Angriffspunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, rückt die Nulllinie in's Unendliche, d. h. wir haben eine gleichförmige Spannungsvertheilung über den ganzen Querschnitt.

Wir sind jetzt im Stande, mit Hülfe der Centralellipse für jede beliebige Lage des Angriffspunktes die zugehörige Nulllinie sofort anzugeben. Wir brauchen dazu nur einen Strahl vom Schwerpunkte nach dem Angriffspunkte zu ziehen, uns zuerst den Angriffspunkt auf dem Schnittpunkte dieses Strahles mit der Centralellipse zu denken, die dazu gehörige

diametral gegenüberliegende Tangente zu ziehen und diese schliesslich parallel zu verschieben, bis sich ihr Abstand vom Mittelpunkte im umgekehrten Verhältnisse geändert hat, als der Abstand des Angriffspunktes.

Wir wollen aber die Untersuchung noch um einen Schritt weiter führen. Der Angriffspunkt soll nämlich jetzt eine beliebige gerade Linie beschreiben. Zu jeder Lage gehört eine bestimmte Nulllinie und es fragt sich, wie sich die Lage der Nulllinie ändert, während der Angriffspunkt längs seiner Bahn fortrückt. Die Gleichung dieser Bahn sei

$$v = \alpha u + \beta,$$

wobei α und β beliebig gegebene constante Grössen sind. Wir fassen zunächst irgend zwei Lagen $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$ auf dieser Bahn in's Auge, suchen die zugehörigen Nulllinien auf und ermitteln, in welchem Punkte beide sich schneiden. Die Gleichungen beider Nulllinien sind nach Gl. (67), wenn man $v_1 = \alpha u_1 + \beta$ setzt und ebenso für v_2

$$\frac{u_1 y}{a^2} + \frac{z}{b^2} (\alpha u_1 + \beta) = -1,$$

$$\frac{u_2 y}{a^2} + \frac{z}{b^2} (\alpha u_2 + \beta) = -1.$$

Um die Coordinaten des Schnittpunktes beider Nulllinien zu erhalten, müssen wir diese Gleichungen nach y und z auflösen. Wir finden

$$y = a^2 \frac{\alpha}{\beta}; \quad z = -\frac{b^2}{\beta}, \quad (69)$$

wie man sich auch nachträglich leicht durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichungen überzeugt. Die Abscissen u_1 und u_2 der auf der Bahn des Angriffspunktes beliebig herausgegriffenen beiden Punkte sind aus den gefundenen Werthen vollständig herausgefallen. Daraus folgt, dass es gleichgültig ist, welche besonderen Punkte man auf der Bahn ausgewählt hat; alle Nulllinien, die zu den Angriffspunkten auf dieser Bahn gehören, schneiden sich gegenseitig in demselben Punkte, dessen Coordinaten durch die Gl. (69) angegeben sind. Mit

anderen Worten heisst dies: wenn sich der Angriffspunkt längs einer beliebigen Graden verschiebt, dreht sich die Nulllinie um einen dieser Graden zugeordneten Punkt.

Die Art dieser Zuordnung stimmt mit jener überein, die wir schon vorher kennen lernten. Denn denkt man sich jetzt umgekehrt den durch die Gl. (69) angegebenen Punkt als Angriffspunkt, setzt also

$$u = a^2 \frac{\alpha}{\beta}, \quad v = -\frac{b^2}{\beta}$$

und führt diese Werthe in die Gleichung der Nulllinie Gl. (67) ein, so geht diese über in

$$z = \alpha y + \beta.$$

Wenn man also den Punkt, um den sich vorher die Nulllinie drehte, nachher als Angriffspunkt wählt, so fällt die ihm zugehörige Nulllinie mit jener Linie zusammen, die vorher als Bahn des Angriffspunktes gedient hatte.

Wir sehen, dass hierdurch jedem Punkte der Ebene eine Gerade und umgekehrt eindeutig zugeordnet ist. Dies erinnert an die Lehre von den Polaren in der Geometrie der Kegelschnitte. Nur insofern besteht hier ein Unterschied, als nicht wie bei den Polaren, einer den Kegelschnitt (die „Ordnungscurve“) berührenden Graden der Berührungspunkt, sondern der diametral gegenüberliegende Punkt zugeordnet ist und ähnlich in jedem anderen Falle. In Anlehnung an den Sprachgebrauch in der Geometrie der Kegelschnitte bezeichnet man daher die einander entsprechenden Punkte und Graden als die Antipole und die Antipolaren.

Mit diesen Bezeichnungen können wir die vorausgehenden Ergebnisse in den Sätzen zusammenfassen:

1) Jedem Punkte der Querschnittsebene, der als Angriffspunkt der Belastung gedacht wird, ist die Antipolare dieses Punktes in Bezug auf die Centralellipse als Nulllinie zugeordnet, und umgekehrt entspricht jeder als Nulllinie beliebig gewählten Graden

der Querschnittsebene der Antipol dieser Gradon als Angriffspunkt der Belastung.

2) Wenn sich der Angriffspunkt auf einer beliebigen Gradon verschiebt, dreht sich die zugehörige Nulllinie um den Antipol dieser Gradon.

3) Wenn sich die Nulllinie um einen beliebigen Punkt dreht, schreitet der zugehörige Angriffspunkt auf der Antipolaren dieses Punktes weiter.

Man kann noch hinzufügen:

4) Wenn der Angriffspunkt auf einer Curve zweiter Ordnung fortschreitet, hüllt die Nulllinie einen anderen Kegelschnitt ein und umgekehrt.

Bei der Anwendung dieser Sätze ist es gleichgültig, ob die Nulllinie die Querschnittsfläche durchschneidet oder ausserhalb verläuft. Im letzten Falle kommen überhaupt nur Spannungen σ von gleichem Vorzeichen im Querschnitte vor. Man kann sich nun noch die Aufgabe stellen, alle Lagen des Angriffspunktes anzugeben, bei denen nur Spannungen von einerlei Vorzeichen im Querschnitte auftreten. Alle diese Angriffspunkte liegen innerhalb einer Fläche, die als der Kern des Querschnitts bezeichnet wird. Um den Kern des Querschnitts zu erhalten, denke man sich alle möglichen Linien gezogen, die den Querschnittsumfang entweder berühren oder überhaupt mindestens einen Punkt mit ihm gemeinsam haben, ohne in's Innere der Fläche einzutreten. Wir wollen den Inbegriff aller dieser Linien den den Querschnitt umhüllenden Tangentenbüschel nennen. Jedem Strahle dieses Büschels entspricht ein Punkt des Kernumrisses, nämlich der Antipol des Strahles. Während der Strahl alle möglichen Lagen des Tangentenbüschels durchläuft, beschreibt der Antipol den Umfang des Kerns. Denkt man sich, nachdem der Kernumfang construirt ist, den Angriffspunkt in die Fläche des Kerns gerückt, so rückt die zugehörige Nulllinie weiter nach aussen und man erkennt daraus, dass in der That nur Spannungen von dem gleichen Vorzeichen bei dieser Lage des Angriffspunktes auftreten können. Dies gilt auch noch, wenn der Angriffspunkt

auf dem Umfange des Kernes liegt; dabei sinkt nur an einer oder auch an einigen Stellen des Querschnittsumfanges die Spannung bis auf Null herab. Sobald aber der Angriffspunkt über den Kern hinaus gerückt wird, kommen Spannungen von entgegengesetztem Vorzeichen im Querschnitte vor.

Diese Betrachtungen werden namentlich bei der Berechnung von Mauerpfeilern angewendet. Da Mauerwerk in gewöhnlicher Ausführung wenig widerstandsfähig gegen Zugbeanspruchung ist, muss man diese zu vermeiden suchen, und man stellt daher als Regel auf, dass der Angriffspunkt der Belastung, die in einem Querschnitte des Mauerpfeilers übertragen wird, nicht ausserhalb des Querschnittkernes liegen soll. Diese Forderung beruht auf der allen diesen Untersuchungen zu Grunde liegenden Voraussetzung, dass die Spannungsvertheilung linear ist. Man kann freilich Bedenken tragen, ob diese Voraussetzung gerade bei Mauerwerk, das dem Hooke'schen Gesetze sicher nicht gehorcht, hinreichend genau zutrifft. Indessen hat sich die Regel, so viel seither bekannt ist, ganz wohl bewährt und man braucht daher kein Bedenken gegen ihre Anwendung zu tragen. Freilich sollte man die hypothetische Grundlage, auf der sie beruht, wohl im Gedächtnisse behalten, um nicht in den Fehler einer Ueberschätzung der theoretischen Resultate zu verfallen.

Schliesslich soll die Aufsuchung des Kernes noch an einigen einfachen Beispielen, zunächst für den rechteckigen Querschnitt erläutert werden. Die Querschnittsseiten seien, wie in Abb. 23 (S. 120) angegeben, mit a und b bezeichnet. Wie schon vorher gefunden (S. 111), ist das Trägheitsmoment des Rechtecks für die zur Seite a parallele Hauptaxe gleich $\frac{ab^3}{12}$, der Trägheitsradius also gleich $\frac{b}{\sqrt{12}} = 0,2887 b$. Für die andere Hauptaxe hat man nur a an die Stelle von b zu setzen. Wir haben damit die Halbaxen der Centralellipse gefunden, tragen diese auf den Symmetrieaxen des Querschnitts auf und construiren die Ellipse. Von dem Tangentenbüschel, der den Querschnitt einhüllt, kommen vier ausgezeichnete

Lagen in Betracht, nämlich jene, die mit je einer Querschnittsseite zusammenfallen. Bei den übrigen Lagen geht der Strahl durch eine der Ecken des Rechtecks. Aus einer Hauptlage geht der Strahl daher

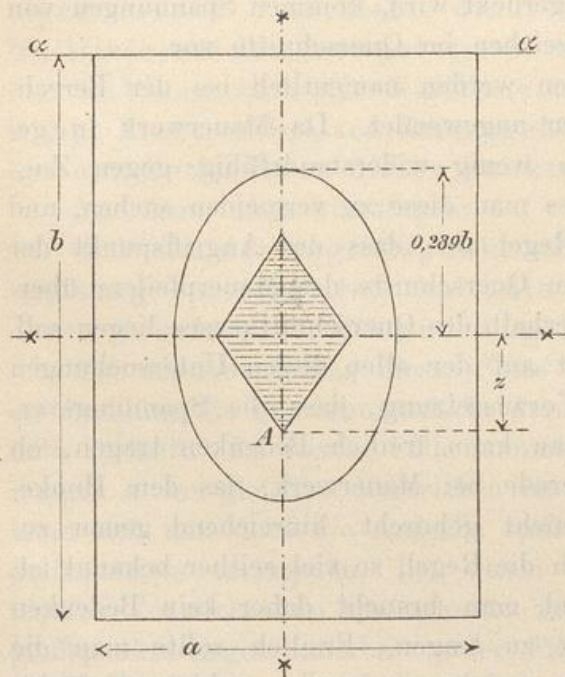


Abb. 23.

in die nächste über, indem er sich um die dazwischen liegende Ecke dreht. Dabei beschreibt der Antipol, wie wir früher fanden, eine gerade Linie. Wir erkennen daraus, dass der Kernumriss ein Viereck und zwar, der Symmetrie wegen, ein Rhombus ist. Es genügt daher, die auf den Hauptachsen liegenden Eckpunkte aufzusuchen. Dem Strahle $\alpha\alpha$ des Tangenten-

bündels entspricht der Antipol A . Der mit z bezeichnete Abstand dieses Punktes vom Schwerpunkte multiplicirt mit dem Abstände der Linie $\alpha\alpha$, also mit $\frac{b}{2}$ ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, also

$$z \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{12} \text{ oder } z = \frac{b}{6}.$$

Jede Diagonale des Kerns ist daher gleich dem dritten Theile der zu ihr parallelen Rechteckseite. Dies entspricht der Regel, dass bei Mauerpfeilern der Angriffspunkt der Belastung, falls er in einer Symmetrieebene enthalten ist, im mittleren Drittel der Fuge bleiben soll. — Der Kern ist in Abb. 23 durch Schraffirung hervorgehoben.

Für eine kreisförmige Querschnittsfläche ist der

Kern natürlich selbst wieder ein Kreis. Um das Trägheitsmoment einer Kreisfläche zu berechnen, geht man am einfachsten von dem polaren Trägheitsmomente aus. Ein Ring vom Radius r und der Breite dr trägt, da alle seine Flächenelemente gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, $2\pi r^3 dr$ zu Θ_p bei. Wird der Radius des Kreises mit a bezeichnet, so hat man daher

$$\Theta_p = 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Für alle in der Querschnittsebene enthaltenen Axen ist Θ gleich gross und nach dem in Gl. (63) ausgesprochenen Satze daher halb so gross als Θ_p . Wir haben daher für Θ und den Trägheitsradius t

$$\Theta = \frac{\pi a^4}{4} \quad \text{und} \quad t = \frac{a}{2}.$$

Das Product aus dem Kernradius z und dem Abstände einer den Querschnittsumfang berührenden Tangente ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, daher $z = \frac{a}{4}$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Ein elliptisch begrenzter Querschnitt wird am einfachsten als Projection eines Kreises aufgefasst. Ist a die grosse, b die kleine Halbaxe und setzt man $b = a \cos \alpha$, versteht also unter α den Neigungswinkel jener Kreisfläche gegen die Projectionsebene, so hat man für das Trägheitsmoment Θ_a in Bezug auf die grosse Hauptaxe

$$\Theta_a = \int z^2 dF = \cos^3 \alpha \int z_1^2 dF_1 = \cos^3 \alpha \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Dabei sind unter z_1 und dF_1 jene Grössen zu verstehen, deren Projectionen z und dF bilden. Ebenso hat man

$$\Theta_b = \int y^2 dF = \cos \alpha \int y_1^2 dF_1 = \cos \alpha \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4},$$

denn hier sind die Abstände y_1 und y einander gleich, da y_1 parallel zur Projectionsebene geht. Für die Trägheitsradien findet man hieraus durch Division mit dem Flächeninhalte der Ellipse

$$t_a = \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad t_b = \frac{a}{2}.$$

Die Centralellipse ist daher dem Querschnittsumrisse ähnlich. Auch der Kern ist eine hierzu ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Halbaxen, die sich ganz wie beim Kreise berechnen lassen, den vierten Theil jener vom Querschnittsumrisse ausmachen.

§ 18. Berechnung der Biegungsspannungen mit Hülfe des Kerns.

Schon früher wurde darauf hingewiesen, dass der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung als ein Sonderfall der excentrischen Belastung aufgefasst werden kann. Wir können daher die Entwicklungen des letzten Paragraphen benutzen, um noch eine andere Lösung der schon in § 16 behandelten Aufgabe daraus abzuleiten.

In Abb. 24 ist der Querschnitt als Rechteck gewählt; er könnte aber ebenso gut auch irgend eine andere Gestalt haben. Centralellipse und Querschnittskern sind ebenso wie in Abb. 23 eingetragen. Mit BB

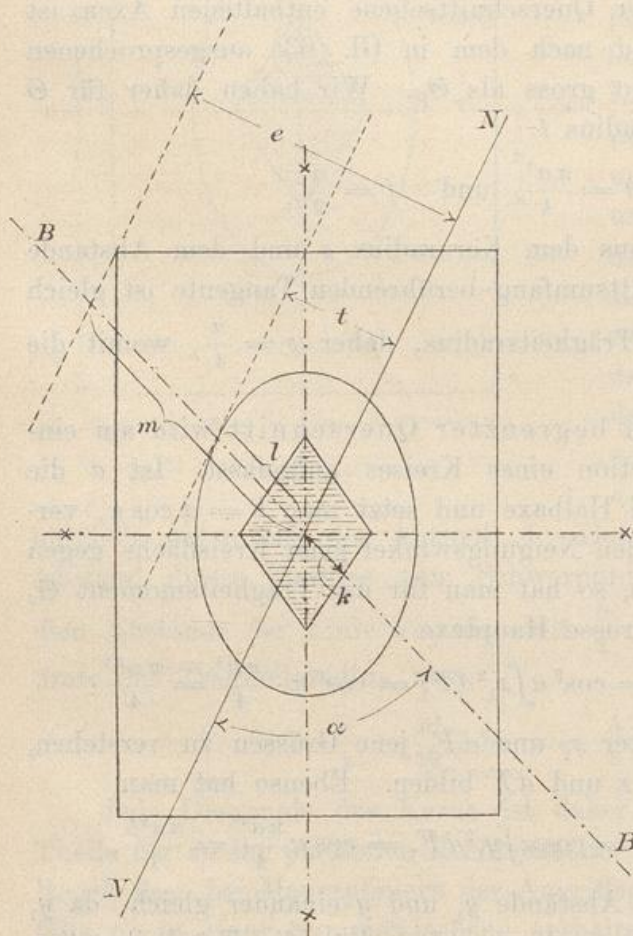


Abb. 24.

ist die Spur der Ebene bezeichnet, in der das Kräftepaar vom Biegemomente M liegen möge. Wir fassen dieses Kräfte-

paar als eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft auf, deren Angriffspunkt daher der unendlich ferne Punkt der Geraden BB ist. Die zugehörige Nulllinie NN ist die Antipolare dieses Punktes und sie geht daher in der Richtung des zu BB conjugirten Durchmessers der Centralellipse. Wir finden diese Richtung, indem wir im Durchschnittspunkte von BB mit der Centralellipse eine Tangente construiren. Zu dieser geht NN parallel. Die grösste Spannung tritt an den Kanten auf, die den grössten Abstand, nämlich den Abstand e von der Nulllinie haben. Um diese Spannung, die mit σ_0 bezeichnet werden soll, zu berechnen, schreiben wir noch die Bedingung an, dass das Moment aller Spannungen gleich dem Momente des biegenden Kräftepaars für die Momentenaxe NN sein muss. Dass die Spannungen ein Kräftepaar liefern, das in der Ebene der äusseren Kräfte liegt, ist schon durch die Festsetzung der richtigen Lage der Nulllinie verbürgt; wir brauchen uns also nur noch um die Grösse der Momente zu kümmern.

Hierbei ist zu beachten, dass die Nulllinie NN nicht senkrecht zur Ebene des Biegemomentes M steht, sondern einen Winkel α mit ihr bildet. Das Moment des biegenden Kräftepaars in Bezug auf die Axe NN ist daher nicht gleich M , sondern gleich $M \sin \alpha$ zu setzen. Für die Spannung in irgend einem Flächenelemente dF , das den Abstand y von NN haben möge, können wir nach dem Navier'schen Spannungsvertheilungsgesetze $\frac{\sigma_0}{e} y$ setzen und die Momentengleichung lautet daher

$$M \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{e} \int y^2 dF = \frac{\sigma_0}{e} \Theta_N,$$

wenn mit Θ_N das Trägheitsmoment für die Axe NN bezeichnet wird.

Andererseits ist aber nach der Definition des Kerns

$$km = l^2,$$

oder, wenn wir an Stelle der drei auf BB liegenden Strecken ihre Projectionen auf eine zu NN senkrechte Linie einführen,

$$k \sin \alpha \cdot e = t^2 = \frac{\Theta_N}{F},$$

denn t ist nach der Definition der Centralellipse der zu NN gehörige Trägheitshalbmesser. Setzt man den hieraus folgenden Werth von Θ_N in die erste Gleichung ein und löst sie nach σ_0 auf, so erhält man das einfache Resultat

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k}. \quad (70)$$

Man kann diesem noch eine etwas andere Fassung geben, wenn man dem durch Gl. (49) zuerst eingeführten Begriffe des Widerstandsmoments W eine erweiterte Bedeutung verleiht, nämlich darunter das Product aus der Querschnittsfläche F und der „Kernweite“ k versteht. Diese neue Definition steht nämlich nicht im Widerspruche mit der durch Gl. (49) gegebenen, die nur für den Fall gültig war, dass die Biegungsebene durch eine Querschnittshauptaxe geht. In der That ist in diesem Falle $ky_0 = t^2$ und daher $\frac{\Theta}{y_0} = F \cdot k$. Im Sinne dieser erweiterten Definition lässt sich Gl. (70) auch in der Form

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} \quad (71)$$

schreiben und sie stimmt dann genau mit der für die gerade Belastung abgeleiteten Gl. (50) überein.

Die Berechnung nach diesen Formeln ist an sich viel einfacher als die in § 16 gegebene. Indessen wird dabei vorausgesetzt, dass der Querschnittskern bereits bekannt sei. Wenn in den Profiltabellen der Hüttenwerke der Kern in jedes Walzeisenprofil eingezeichnet wäre, was schon öfters vorgeschlagen wurde und nächstens vielleicht auch einmal ausgeführt wird, würde sich die Anwendung der Gl. (70) oder (71) schnell einbürgern. So lange der Kern aber nicht von vornherein gegeben ist, wird man mit der Rechnung schneller auf dem früher angegebenen Wege fertig.

Mit Hilfe dieser Betrachtung kann man auch leicht beurtheilen, welche Richtung der Biegungsebene BB die grösste

Gefahr für die Festigkeit des Stabes bedingt, d. h. bei welcher Richtung die Kantenspannung σ_0 den grössten Werth annimmt, wenn das Biegemoment M ein für alle Mal gegeben ist (also etwa bei gegebenen Lasten). Es ist jene Richtung, zu der die kleinste Kernweite k gehört, beim rechteckigen Querschnitte also die zu einer Diagonale senkrechte Richtung. Das letzte Resultat geht übrigens auch schon aus der in § 16 gegebenen Rechnung hervor, denn die in Abb. 21 mit c bezeichnete Grösse, die in Gl. (65) allein als von der Richtung der Biegungsebene abhängiger Factor auftrat, nimmt in dem bezeichneten Falle ihren grössten Werth an; sie wird dann gleich der Rechtecksdiagonale.

§ 19. Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hilfe des Momentenplanimeters.

Es giebt keinen zweiten Gegenstand der technischen Mechanik, über den schon so viel geschrieben worden wäre, als über die Lehre von den Trägheitsmomenten und die damit zusammenhängenden Betrachtungen, von denen die letzten Paragraphen handeln. Dahin gehören namentlich auch die zahlreichen Methoden, die zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Querschnittsflächen ausgearbeitet wurden. Es ist nicht möglich, aber auch nicht nöthig, sie hier alle vorzuführen; es wäre damit fast so, als wenn man in einem Lehrbuche der Euklidischen Geometrie alle bisher aufgestellten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz abdrucken wollte. Die zeichnerischen Methoden gehören überdies zur graphischen Statik und die schönste, die von Mohr herrührt, wird dort behandelt werden. An dieser Stelle genügt es, wenn darauf hingewiesen wird, dass irgend eine principielle Schwierigkeit bei der Ermittlung des Trägheitsmomentes niemals bestehen kann, da man im schlimmsten Falle sich immer damit helfen kann, dass man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt, die zur Axe parallel laufen, für die das Trägheitsmoment ermittelt werden soll, dass man den Flächeninhalt jedes Streifens mit dem Quadrate des mittleren Abstandes von der Axe multiplicirt und die Producte addirt. Unbedingte Genauigkeit wird bei Festigkeitsberechnungen niemals gefordert — oder höchstens unverständiger Weise — und den berechtigten Ansprüchen an die Genauigkeit lässt sich dabei leicht vollständig genügen. Viel Werth vermag ich daher jenen Untersuchungen nicht

beizulegen, ich pflege vielmehr meinen Hörern zu rathen, wenn sie einmal den Drang fühlen, selbst etwas zur Bereicherung der Wissenschaft beizutragen, ihre Kräfte lieber bei anderen Dingen einzusetzen, die wohl nicht zu so mühelosen, dafür aber auch zu werthvolleren Resultaten führen.

Dagegen soll hier noch auseinandergesetzt werden, auf welchem

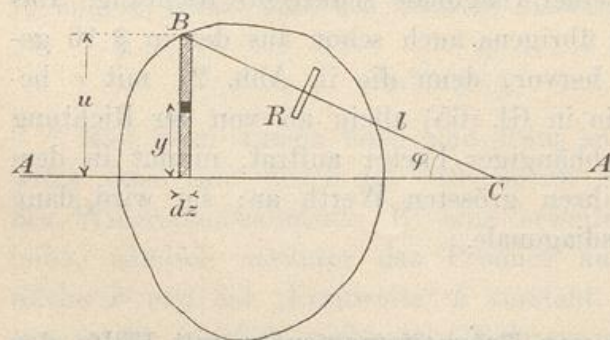


Abb. 25.

Gedankenganges von Amsler zur mechanischen Ermittlung der Trägheitsmomente construirte Momentenplanimeter beruht. In Abb. 25 sei AA' die Axe, für die das Trägheitsmoment ermittelt werden soll. Wir dehnen die Summirung zunächst über den schmalen Streifen aus, der durch Schraffirung hervorgehoben ist. Dieser liefert zum Trägheitsmomente den Beitrag

$$dz \int_0^u y^2 dy = dz \frac{u^3}{3}.$$

Eine Stange BC von der Länge l wird so herumgeführt, dass das Ende B auf dem Querschnittsumfange, das Ende C auf der Achse AA' fortschreitet. Man hat $u = l \sin \varphi$ und das Trägheitsmoment der ganzen Fläche ist daher

$$\Theta = \frac{l^3}{3} \int \sin^3 \varphi dz.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas umformen mit Hülfe der goniometrischen Formel

$$\sin^3 \varphi = \frac{3 \sin \varphi - \sin 3\varphi}{4}.$$

Er geht dadurch über in

$$\Theta = \frac{l^3}{4} \int \sin \varphi dz - \frac{l^3}{12} \int \sin 3\varphi dz.$$

Unmittelbar an der Stange BC des Instruments ist eine Rolle R befestigt. Wenn man mit dem Stifte am Ende B der Stange

den Umfang des Querschnitts umfährt, rollt R über die Papierfläche und die Drehung, die sie nach Beendigung des Umlaufs ausgeführt hat, kann mit Hülfe eines Nonius abgelesen werden. Während der Stift B das zu dem schraffirten Streifen gehörige Element des Umfangs durchläuft, findet eine Drehung der Rolle statt, die in zwei Theile zerlegt werden kann. Der eine Theil ist durch die Verticalprojection, der andere durch die Horizontalprojection des Umfangselements bedingt. Hat man mit dem Umfahren bei dem einen auf der Axe AA liegenden Punkte begonnen, war also die Stange BC zuerst horizontal gerichtet, so nimmt sie wieder dieselbe Richtung an, wenn der Stift B an dem anderen auf AA liegenden Punkte angelangt ist. Die verticalen Wege von B liefern also zusammen Null und alle Drehungen, die durch die Verticalprojectionen der Umfangselemente auf der einen Seite von AA bedingt sind, heben sich daher ebenfalls gegeneinander auf. Wir brauchen also nur auf die Drehungen zu achten, die durch die Horizontalcomponenten des Weges von B veranlasst werden. Für das betrachtete Umfangselement ist der Weg in horizontaler Richtung gleich dz . Nun ist klar, dass die Rolle gar keine Drehung ausführt, wenn sich die Stange in ihrer eigenen Richtung verschiebt; es kommt also auch bei der Parallelverschiebung der Stange um dz nur auf jenen Antheil des Weges an, der senkrecht zur Stangenrichtung steht und dieser ist gleich $dz \sin \varphi$. Wenn der oberhalb der Axe liegende Theil des Umfangs durchlaufen ist, wird demnach die Drehung der Rolle proportional mit

$$\int \sin \varphi dz$$

sein. Wenn dann weiter der untere Theil durchlaufen wird, lassen sich dieselben Betrachtungen wieder anwenden. Man muss dabei beachten, dass jeder Factor des Productes $\sin \varphi dz$ das dem vorigen entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, dass also das Product selbst das gleiche Vorzeichen behält. Daher heben sich die durch die horizontalen Wege bedingten Rollenumdrehungen nicht gegeneinander auf, wie es bei den verticalen Wegen des Stiftes B der Fall war. Im Ganzen bildet vielmehr die Rollenablesung unmittelbar ein Maass für das über den ganzen Umfang erstreckte $\int \sin \varphi dz$. Man sieht daher ein, dass nach einmaligem Umfahren der Fläche mit dem Stifte B das erste Glied des für Θ gefundenen Ausdrucks, abgesehen von einem constanten Factor, der von der Construction des Instruments abhängt, unmittelbar vom Instrumente abgelesen werden kann. Das zweite Glied in dem Ausdrücke für Θ ist ganz ähnlich gebildet, wie das erste; der wesentliche Unterschied besteht

nur darin, dass der Sinus des dreifachen Winkels vorkommt. Dem lässt sich aber leicht Rechnung tragen, indem man eine zweite Rolle anbringt, deren Lager durch eine Zahnradübersetzung im Verhältnisse 1 : 3 mit der Stange B verbunden ist, so dass die Umdrehungsaxe dieser zweiten Rolle in jedem Augenblicke den Winkel 3φ mit der Axe AA bildet. An der Horizontalverschiebung der Stange nimmt sie ebenso Theil wie die vorige Rolle, und die an ihr nach einem ganzen Umlaufe genommene Ablesung gibt daher ein Maass für die Grösse des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für Θ . Demnach erhält man für Θ

$$\Theta = \alpha r - \beta r_1,$$

wenn α und β Constanten des Instruments, die ein für alle Mal ermittelt sind und r und r_1 die Rollenablesungen bedeuten.

Das Amsler'sche Planimeter hat auch noch eine dritte Rolle, mit deren Hülfe das statische Moment der Fläche für die Axe AA bestimmt werden kann; ich werde aber darauf nicht näher eingehen. — Zugleich möchte ich noch bemerken, dass die Genauigkeit bei Querschnitten von Iförmiger Gestalt oder bei Schienenprofilen nach meinen Erfahrungen nicht so hoch ist, als die der graphischen Methoden. Man erhält nämlich Θ als Differenz von zwei Werthen, die sich verhältnissmässig wenig von einander unterscheiden, so dass die Beobachtungsfehler im Vergleiche zu dieser Differenz ziemlich beträchtlich werden, wenn auch jedes einzelne Glied an sich recht genau ermittelt werden kann.

§ 20. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Stabe.

Bisher stand immer der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung im Vordergrund und für diesen hatten wir Grund genug zu der Annahme, dass überhaupt keine Schubspannungen im Querschnitte übertragen werden. Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, dass die äusseren Kräfte an einem Stabtheile neben einem Biegemomente auch noch eine Scheerkraft V liefern. Nach dem Grundsätze der Superposition verschiedener Spannungszustände wird dadurch an der Vertheilung der Normalspannungen σ über den Querschnitt nichts geändert. Wir können daher die früher durchgeführte Berechnung von σ auch im allgemeineren Falle ohne weiteres anwenden. Dagegen bleibt hier noch die Frage zu entscheiden, wie sich die Schubspan-

nungen, die zusammen die Resultirende V geben, über den Querschnitt vertheilen. Wir sind dabei in etwas günstigerer Lage als bei der Frage der Vertheilung der Normalspannungen, die wir ungefähr in der gleichen Weise lösen mussten wie Alexander, als er den Gordischen Knoten durchhieb. In der That ist die Vertheilung der Schubspannungen durch die Vertheilung der Normalspannungen schon bis zu einem gewissen Grade mit bedingt. Man erkennt dies schon aus den allgemeinen Betrachtungen des ersten Abschnitts. Die erste der Gleichungen (5), die das Gleichgewicht der Spannungen an einem unendlich kleinen Parallelepiped aussprechen, lautet, wenn wir die Componente X der äusseren Kraft gleich Null setzen,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0.$$

Denken wir uns die X -Axe in die Stabmittellinie und die Y -Axe in die Ebene der äusseren Kräfte, also in die Richtung von V gelegt, so spricht diese Gleichung den nothwendigen Zusammenhang zwischen der Vertheilung der Normalspannungen σ und der Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} über den Querschnitt aus, denn nach den Gleichungen (4) ist $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ und $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Freilich reicht diese Gleichung allein noch nicht vollständig aus, die Schubspannungskomponenten zu berechnen. Es muss immer noch eine mehr oder minder willkürliche Annahme hinzutreten.

Wir wollen zunächst den Fall behandeln, dass der Querschnitt des Stabs ein Rechteck ist und die Kraftebene durch eine Hauptaxe geht. Dann liegt es nahe, $\tau_{xz} = 0$ zu setzen, denn es ist kein Grund zu der Vermuthung gegeben, dass Schubspannungen im Querschnitte rechtwinklig zur Ebene der äusseren Kräfte auftreten sollten. Wir wissen vielmehr sicher, dass an den zur Kraftebene parallelen Querschnittskanten $\tau_{xz} = 0$ sein muss, weil an den dazu gehörigen Seitenflächen des Balkens von aussen her keine Kräfte τ_{zx} einwirken. — Mit dieser Annahme, die schliesslich darauf hinauskommt, dass alle Schichten, in die man sich den Balken parallel zur Kraftebene

zerlegt denken kann, gleiche Formänderungen ausführen, oder dass überhaupt alle Formänderungs- und Spannungsgrößen von der Querschnittscoordinate z unabhängig sind, geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

und da σ_x schon überall als bekannt vorauszusetzen ist, lässt sich aus ihr die Vertheilung der Schubspannungen der Höhe des Balkenquerschnitts nach leicht ableiten.

Es kommt zwar auf dasselbe hinaus, ist aber anschaulicher, wenn man diese Betrachtung durch eine andere ersetzt.

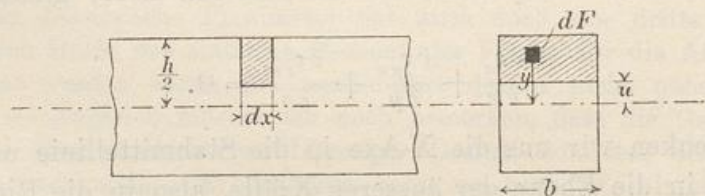


Abb. 26.

Die Gl. (5) bezogen sich auf das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Parallelepipedes; wir wollen dieselbe Schlussfolgerung, die zu ihnen führte, jetzt auf das Gleichgewicht eines etwas grösser abgegrenzten Körpertheiles anwenden. In Abb. 26

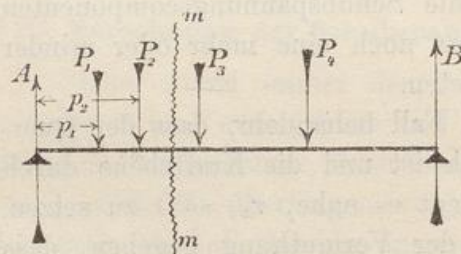


Abb. 27.

ist links ein Stück der Ansichtzeichnung des Balkens, rechts der Querschnitt dargestellt, und der scheibenförmige Theil des Balkens, dessen Gleichgewicht wir untersuchen wollen, ist in beiden Projectionen durch Schraffirung hervorgehoben. Ausserdem gibt Abb. 27 noch eine Gesamtübersicht des Balkens und der an ihm angreifenden Lasten. Wir stellen zunächst eine Beziehung auf, die zwischen dem Biegemomente M und der Scheerkraft V für irgend einen Querschnitt mm besteht. Nach den Definitionen dieser Größen hat man

$$V = A - \sum_0^x P \quad \text{und} \quad M = Ax - \sum_0^x P(x - p).$$

Differentiirt man M nach x , so erhält man

$$\frac{dM}{dx} = A - \sum_0^x P.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass man beim Weiterücken des Querschnitts um die Strecke dx nicht über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausrückt, denn an einer solchen Stelle ist zwar M selbst stetig, $\frac{dM}{dx}$ erleidet aber einen plötzlichen Sprung. Tritt indessen eine stetig vertheilte Belastung an die Stelle des Systems der Einzellasten, so bleibt die Gleichung immer noch gültig, da der Zuwachs, den M dann ausserdem noch erfährt, weil ein Belastungsdifferential, das vorher zur rechten Seite zählte, auf die linke Seite übertritt, nur von der zweiten Ordnung unendlich klein ist und daher nicht in Betracht kommt.

Man hat daher, wie aus dem Vergleiche der vorstehenden Formeln hervorgeht, allgemein

$$V = \frac{dM}{dx}, \quad (72)$$

denn auch V theilt mit dem Differentialquotienten von M die Eigenschaft, seinen Werth sprungweise zu ändern, wenn der Querschnitt über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausgerückt wird.

Man kann sich diese einfache, aber sehr wichtige Beziehung auch noch in anderer Weise klar machen. Für den Schnitt mm waren die äusseren Kräfte links vom Schnitte auf die Scheerkraft V im Querschnittsschwerpunkte und das Kräftepaar vom Momente M zurückgeführt. Gehen wir um dx weiter, so muss V parallel um dx verlegt werden. Dabei tritt aber noch ein Kräftepaar Vdx auf, das die Aenderung von M darstellt; aus $dM = Vdx$ folgt aber Gl. (72) sofort.

An dem in Abb. 26 angegebenen scheibenförmigen Körper-

theile greifen die Spannungen an den drei Schnittflächen an. Wir wollen dabei nur auf das Gleichgewicht gegen Verschieben in horizontaler Richtung achten. Von den Spannungen an den quer zur Stabaxe gehenden Schnittflächen kommen dann nur die Normalspannungen σ in Betracht. Nach Gl. (48) ist in dem Schnitte mit der Abscisse $x =$

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y$$

und an dem Schnitte mit der Abscisse $x + dx$ kommt noch ein Differential hinzu, das sich durch Differentiiren, also aus

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{y}{\Theta} = \frac{Vy}{\Theta}$$

leicht feststellen lässt. Die Normalspannungen an beiden Schnittflächen wirken in entgegengesetzter Richtung; für das Gleichgewicht gegen Verschieben kommt also nur ihr Unterschied in Frage. Im Ganzen erhalten wir dafür

$$\int_u^{\frac{h}{2}} d\sigma dF = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

wenn die Integration über den schraffirten Theil des Querschnitts ausgedehnt wird.

In der dritten Schnittfläche wirkt nur die Schubspannung τ_{yx} in horizontaler Richtung und zwar über die Fläche $b dx$. Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\tau_{yx} b dx = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

woraus τ_{yx} und damit auch die gesuchte Schubspannung τ_{xy} im Querschnitte in der Entfernung u von der Nulllinie,

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF \quad (73)$$

folgt. Das Integral stellt das statische Moment des über u

hinaus liegenden Querschnittstheiles in Bezug auf die Nulllinie dar. Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$\int_u^{\frac{h}{2}} y dF = b \left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} \right) \quad \text{und daher} \quad \tau = \frac{V}{\Theta} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} \right).$$

Wir wollen aber für dieses statische Moment ausserdem noch den Buchstaben S setzen, also Gl. (73) in der Form

$$\tau_{xy} = \frac{VS}{b\Theta} \quad (74)$$

schreiben, denn offenbar kann die vorausgehende Betrachtung auch dann angewendet werden, wenn der Querschnitt nicht ein einfaches Rechteck bildet, sondern nur dort, wo wir τ berechnen wollen, durch zwei parallele Seiten begrenzt wird, wie z. B. der Steg eines I-Trägers. Auch für solche Fälle ist durch Gl. (74) die Aufgabe gelöst, denn das statische Moment S , das zu einem gegebenen u gehört, kann immer leicht gefunden werden.

Durch Gl. (74) ist τ als Function von u bestimmt und damit die Spannungsvertheilung gegeben. Wir erkennen aus dieser Gleichung, dass τ am Rande des Querschnitts verschwindet, also gerade dort, wo die Normalspannung ihren grössten Werth annimmt, und dass umgekehrt τ am grössten wird in der Nulllinie, also da, wo die Normalspannung verschwindet. Speciell für den rechteckigen Querschnitt ist τ eine Function zweiten Grades von u . Wenn wir diese Function durch eine Curve darstellen, wie wir es früher thaten, um die Vertheilung der Normalspannungen vor Augen zu führen, erhalten wir jetzt eine Parabel. Das lineare Spannungsvertheilungsgesetz gilt also nur für die Normalspannungen und nicht für die Schubspannungen.

Es bleibt jetzt noch die Vertheilung der Schubspannungen über einen anders gestalteten Querschnitt zu besprechen. Wir wählen zur Erläuterung des Verfahrens einen kreisförmigen Querschnitt, der deshalb von besonderer Wichtigkeit ist, weil die Nieten vorwiegend auf Schub beansprucht werden und

sich bei ihnen die Schubkraft, die sie übertragen, über einen kreisförmigen Querschnitt vertheilt. Hier dürfen wir nicht, wie vorher beim rechteckigen Querschnitte, die Schubspannungskomponenten τ_{xz} , die quer zur Kräfteebene gehen, gleich Null setzen. Vielmehr muss am Umfange die resultirende Schubspannung in die Richtung der Querschnittstangente fallen,

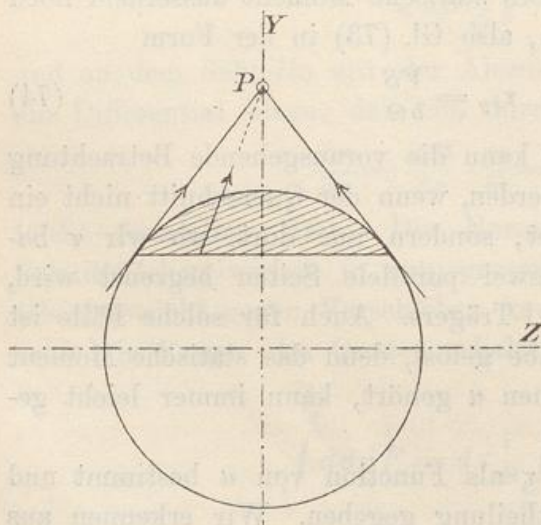


Abb. 28.

wenigstens dann, wenn am Umfange des Stabes keine äusseren Kräfte in der Richtung der Stabaxe auftreten. Dies folgt aus dem Gleichgewichte eines unendlich kleinen Parallelepipeds, von dem eine Kante mit einem Elemente des Querschnittsumrisses zusammenfällt. Wenn die Schubspannung am Umfange eine Komponente in der Richtung der Normalen zum Querschnittsumriss haben sollte, müsste, um das Gleichgewicht gegen Drehen zu sichern, nothwendig auch eine Kraft auf der Mantelfläche des Stabes in der Richtung der Stabaxe übertragen werden, aus demselben Grunde, aus dem wir früher $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ fanden.

Nun kann man freilich im Zweifel sein, ob nicht in der That bei einem Niete, dessen Schaft von den Blechen, die er verbindet, vollständig umschlossen wird, solche Kräfte — also Reibungskräfte — in der Richtung der Stabaxe am Umfange auftreten. Gerade bei diesem für die Anwendungen sehr wichtigen Falle ist daher die hier durchzuführende Betrachtung ganz unsicher und man thut in der That bei der Berechnung von Nieten viel besser, sich an die Ergebnisse von Versuchen zu halten, durch die die Festigkeit von Nietverbindungen un-

mittelbar ermittelt wird, als an die Formel, die ich jetzt theoretisch ableiten werde. Diese Versuche zeigen nämlich, dass die Festigkeit von Nietverbindungen höher ist, als man nach dem Ergebnisse dieser Berechnung erwarten könnte. Sie stellt sich ungefähr so hoch, als wenn sich die Schubspannungen gleichförmig über den Querschnitt vertheilten.

Indessen kann man daraus der hier zu gebenden Entwicklung keinen Vorwurf machen. Sie gilt selbstverständlich, wie jede Schlussfolgerung, nur so lange, als ihre Voraussetzungen erfüllt sind. Gegen die unverständige Anwendung eines an sich richtigen Resultats gibt es nur einen Schutz: nämlich eine genaue und nicht bloss oberflächliche Kenntniss der Theorie. Wer diese besitzt, wird die Theorie nur dann nicht in Uebereinstimmung mit den Thatsachen finden, wenn er im Begriffe ist, eine neue Entdeckung zu machen, die selbstverständlich im Stande sein kann, eine Aenderung der theoretischen Lehren nothwendig zu machen.

Es sei also jetzt ausdrücklich vorausgesetzt, dass am Umfange des Stabes, wenigstens in der Umgebung des Querschnitts, für den wir die Schubspannungen berechnen wollen, keine derartige äussere Kraft auftritt. Dann müssen nothwendig die Schubspannungen am Rande des Querschnitts in die Richtung der Tangente fallen. Für einen Punkt auf der Y -Axe müssen sie der Symmetrie wegen in die Richtung dieser Axe fallen und dazwischen werden sie irgend eine mittlere Richtung einnehmen. Man wird nicht viel von der Wahrheit abweichen, wenn man annimmt, dass die Schubspannungen in jedem Punkte einer zu Y -Axe senkrecht gezogenen Sehne alle durch den Punkt P in Abb. 28 gehen, in dem die Tangente die Y -Axe trifft. Bedenklicher ist freilich die andere Annahme, die man hiermit verbindet, nämlich dass die in der Richtung der Y -Axe gehende Componente τ_{xy} auch hier noch unabhängig von der Querschnittscoordinate z sei. Sie ist indessen die einfachste, die man machen kann, und wird daher, um zu einem Näherungsergebnisse zu gelangen, zu Grunde gelegt.

Auf Grund dieser Annahmen lässt sich die Aufgabe jetzt leicht lösen. Man berechnet zuerst τ_{xy} nach Gl. (74), wobei S wieder das statische Moment des in Abb. 28 schraffirten Querschnittstheiles bedeutet, der oberhalb der Stelle liegt, für die τ_{xy} aufgesucht wird und fügt die Componenten τ_{xz} entsprechend der Bedingung hinzu, dass die Resultirende durch den Punkt P gehen soll.

§ 21. Fortsetzung. Die Spannungstrajectorien.

Da bei dem allgemeinen Falle der Biegungsbeanspruchung eines Stabes ausser den Normalspannungen auch noch Schubspannungen übertragen werden, ist die Normalspannung keine Hauptspannung. Die Hauptrichtungen des Spannungszustandes sind vielmehr im Allgemeinen gegen die Längsaxe des Stabes unter irgend einem Winkel geneigt. Nur in den äussersten Fasern, wo σ seinen grössten Werth annimmt und $\tau = 0$ ist, ist σ zugleich die Hauptspannung und nur diesem glücklichen Umstande ist es zu danken, dass man bei gewöhnlichen Biegungsaufgaben nur auf die Normalspannungen σ zu achten braucht, sich also mit der einfachen Anwendung der früher für σ aufgestellten Formeln begnügen kann, um zu erkennen, in welchem Grade das Material beansprucht wird. Dieses Verfahren ist aber nicht mehr zulässig, wenn die Schubspannungen verhältnissmässig gross gegen die Normalspannungen werden, also dann, wenn V gross, M dagegen klein ist. Dieser Fall tritt ein, wenn der Stab eine grosse Querschnittsfläche und nur eine geringe Länge hat. Wegen der geringen Länge sind die Hebelarme und daher die Biegemomente klein; ein solcher Stab wird daher mit Rücksicht auf die Normalspannungen grosse Lasten tragen können, dabei wird aber V gross und die Schubspannungen treten in den Vordergrund, so dass die Festigkeit schliesslich in erster Linie von diesen abhängt.

Es ist daher wünschenswerth, noch eine Uebersicht darüber zu erlangen, in welchen Richtungen die Hauptspannungen an

den verschiedenen Theilen des Stabes auftreten. Man construirt zu diesem Zwecke Linien, die überall in die Richtungen der Hauptspannungen fallen. Diese Linien werden als Spannungstrajectorien bezeichnet. Um sie zu erhalten, legt man eine Anzahl Querschnitte durch den Stab, berechnet für verschiedene Stellen dieser Querschnitte die Normalspannung und die Schubspannung, wie es in dem vorausgehenden Paragraphen gelehrt wurde, und bestimmt dann nach Gl. (11) die Winkel φ , die die Hauptrichtungen des Spannungszustandes mit der Stabaxe bilden. Nachdem man so eine genügende Zahl von Tangenten der Spannungstrajectorien construirt hat, kann man diese leicht freihändig in die Zeichnung des Stabes eintragen. Anstatt dessen kann man auch die Gleichungen dieser Curven mit Hülfe einer Integration erhalten, da die Tangente ihres Neigungswinkels, also der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für sie bekannt ist.

Ich werde diese Rechnungen hier nicht durchführen, sondern mich damit begnügen, in Abb. 29 (S. 138) den Verlauf der Spannungstrajectorien für den Fall eines Stabes von rechteckigem Querschnitte, der an einem Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Einzellast trägt, anzugeben. In der neutralen Schicht schneiden die Spannungstrajectorien die Stabaxe unter Winkeln von 45° , da hier der Fall der reinen Schubspannung vorliegt, und an der oberen und der unteren Begrenzung steht die eine senkrecht zur Kante und die andere berührt sie. Selbstverständlich steht die eine Schaar überall senkrecht zur anderen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Beachtung der Schubspannungen im gebogenen Balken namentlich dann von Wichtigkeit werden kann, wenn das Material eine besonders geringe Schubfestigkeit hat, wie es beim Holze in Schnittrichtungen, die parallel zu den Fasern laufen, zutrifft. Es kommt nicht selten vor, dass ein Holzbalken, dessen Spannweite selbst zehnmal so gross sein kann als die Querschnittshöhe, durch die Ueberwindung der Schubfestigkeit in der neutralen Schicht

bricht, wenn er in der Mitte belastet wird. Selbstverständlich wird die Gefahr eines Bruches dieser Art um so grösser, je kleiner das Verhältniss zwischen der Spannweite und der Höhe des Querschnitts ist.

Es möge daher noch berechnet werden, von welchem Werthe dieses Verhältnisses ab die Bruchgefahr nur noch durch die Normalspannungen bedingt ist. Ich setze dabei einen Holzbalken von der Länge $2l$ und der Querschnittshöhe

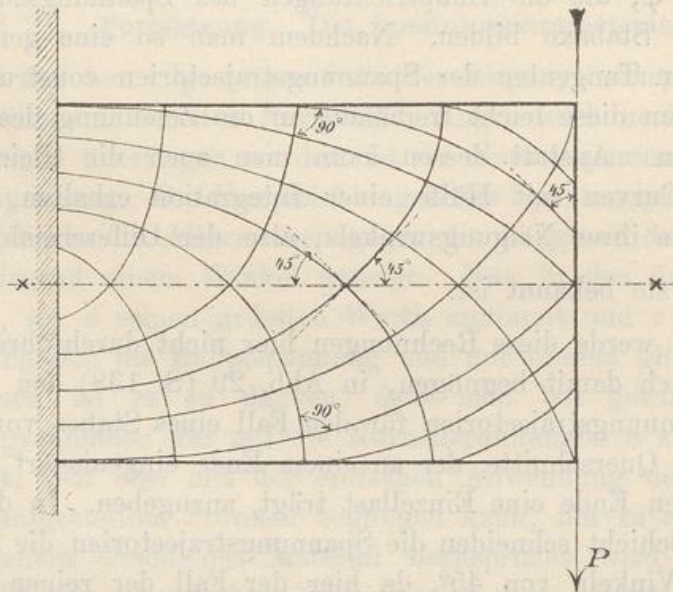


Abb. 29.

h voraus, der in der Mitte die Last $2P$ trägt. Dann ist $V = P$ und $M = Pl$ zu setzen. Für die grösste Normalspannung σ erhält man

$$\sigma = \frac{6Pl}{bh^2}$$

und für die Schubspannung τ in der neutralen Schicht nach Gl. (74)

$$\tau = \frac{P \cdot \frac{bh^2}{8}}{b\Theta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh}$$

Wenn das Verhältniss zwischen der Druckfestigkeit (die beim Holze gewöhnlich etwas kleiner ist als die Zugfestigkeit,

beide für Schnittrichtungen senkrecht zur Faser gerechnet) und der Schubfestigkeit zwischen den Fasern mit n bezeichnet wird, bestimmt sich jenes Verhältniss aus der Gleichung

$$\frac{6Pl}{bh^2} = n \cdot \frac{3P}{2bh}, \text{ also } \frac{l}{h} = \frac{n}{4} \text{ oder } \frac{2l}{h} = \frac{n}{2}.$$

Nun wird n nicht leicht grösser als etwa 10, die ganze Spannweite darf also nur etwa fünfmal so gross sein, als die Querschnittshöhe, wenn eine Bruchgefahr durch die Schubspannungen gegeben sein soll; ausnahmsweise (wie es scheint, besonders bei Weisstannenholz) kann n aber auch noch grösser werden. So abnorm grosse Werthe von n kommen indessen bei anderen Materialien als Holz überhaupt nicht vor, auch nicht bei gewalztem Schweisseisen, das sich dem Holze noch am meisten nähert, und es ist daher gerechtfertigt, wenn man bei gewöhnlichen Biegungsberechnungen die Schubspannungen ganz unberücksichtigt lässt.

Ein Fall muss indessen noch erwähnt werden. Bei einem Balken von I-förmigem Querschnitte ist nämlich das statische Moment S in Gl. (74) unmittelbar unterhalb des Flantsches fast ebenso gross als für die neutrale Schicht. Die Schubspannungen erreichen daher an dieser Stelle schon beträchtliche Werthe, während die Normalspannung gegenüber dem grössten Werthe an der äussersten Faser noch nicht viel abgenommen hat. Es kann daher vorkommen, dass die Hauptspannung an dieser Stelle grösser wird als in der äussersten Faser, und zwar wird dieser Fall auch hier wieder um so eher vorkommen können, je beträchtlicher die Schubspannungen im Vergleiche zu den Normalspannungen ausfallen, also bei Stäben von geringer Länge und grosser Höhe. Eine Berechnung, die sich hierauf bezieht, befindet sich unter den Aufgaben am Schlusse des Abschnitts.

§ 22. Genietete Träger.

Ein Stab, der eine Biegungsbelastung aufnehmen soll, wird oft aus mehreren Theilen zusammengesetzt, derart, dass der Querschnitt aus der Summe der Querschnitte der einzelnen

Theile besteht. Wenn die Theile des Stabes fest miteinander zusammenhängen, würden in den Flächen, in denen diese Theile aneinander grenzen, Schubspannungen übertragen werden. Diese Spannungen fallen hier fort, — soweit sie nicht etwa durch Reibungen in den Grenzflächen ersetzt werden. Damit sich aber der zusammengesetzte Stab im grossen Ganzen doch ähnlich verhalten kann, als wenn er aus einem Stücke wäre, müssen die sonst durch die Schubspannungen übertragenen Kräfte durch die Verbindungstheile aufgenommen werden, die das Ganze zusammenhalten.

Sehr häufig verwendet man genietete Blechbalken, denen man einen den gewalzten I-Trägern ähnlichen Querschnitt gibt, um wie bei diesen mit möglichst wenig Materialaufwand ein

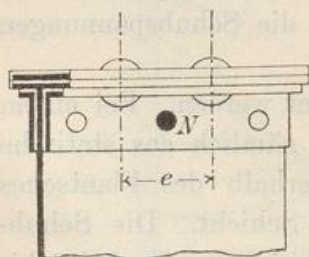


Abb. 30.

möglichst grosses Trägheits- oder Widerstandsmoment zu erzielen. Der Steg und die rechtwinklig dazu verlaufenden Gurtplatten werden durch Winkeleisen aneinander geschlossen und alle Theile werden durch Vernietung miteinander verbunden. Hier sind es die Niete, durch die alle Schubspannungen übertragen werden müssen. Wir wollen be-

rechnen, wie gross die Kraft ist, die auf einen solchen Niet trifft, der den Anschluss der Winkeleisen an den Steg bewirkt. In Abb. 30 ist ein kleines Stück von der Ansichtszeichnung eines genieteten Blechträgers gegeben. Die Entfernung zwischen zwei aufeinander folgenden Niete sei gleich e . Der durch einen schwarzen Kreis angegebene Niet N muss für den Unterschied der Normalspannungen σ in den durch ihn angeschlossenen Winkeln und Gurtplatten für zwei um e voneinander entfernte Querschnittsflächen aufkommen. In der That gleicht der Fall ganz dem in § 20 behandelten; es ist nur an die Stelle des Abstandes dx in Abb. 26 hier der endliche Abstand e getreten. Man hat wie dort

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y \quad \text{und} \quad \Delta\sigma = \frac{\Delta M}{\Theta} y = \frac{V e}{\Theta} y,$$

wobei nur die endliche Differenz $\Delta\sigma$ für das Differential $d\sigma$ eingetreten ist. Die von dem Niete zu übertragende Kraft P folgt daraus

$$P = \int \Delta\sigma dF = \frac{Ve}{\Theta} \int y dF = \frac{Ve}{\Theta} \cdot S, \quad (75)$$

wenn mit S das statische Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittstheiles in Bezug auf die Nulllinie bezeichnet wird.

Früher hat man auch öfters aus Holz sogenannte verzahnte oder verdübelte Träger zusammengesetzt. Jetzt macht man seltener davon Gebrauch und ich will daher nicht näher darauf eingehen, bemerke vielmehr nur noch, dass deren Berechnung ebenfalls nach Gl. (75) erfolgen kann.

§ 22^a. Balken aus Gusseisen oder Stein.

Ehe ich weitergehe, möchte ich noch einmal betonen, dass alle vorausgehenden Berechnungen dieses Abschnitts über die Spannungen im gebogenen Balken zwar für Schweisseisen, Flusseisen, Stahl und Holz in durchaus befriedigender Uebereinstimmung mit der Erfahrung stehen, dass dies aber für Steine, Cementmörtel, Beton und Gusseisen, die ebenfalls wichtige Constructionsmaterialien sind, nicht mehr im gleichen Maasse zutrifft. Am wenigsten geklärt ist noch das Verhalten des Gusseisens. Gusseisen ist gegen Zug viel empfindlicher als gegen Druck; der Bruch eines Gusseisenbalkens von rechteckigem Querschnitte ist daher jedenfalls auf eine Ueberwindung der Zugfestigkeit an der äussersten Faser auf der Zugseite des gefährdetsten Querschnitts zurückzuführen. Ermittelt man aber die Zugfestigkeit eines aus derselben Pfanne gegossenen Stabes aus Gusseisen und vergleicht sie mit der aus dem Biegungsversuche mit dem Balken nach der gewöhnlichen Formel berechneten Kantenspannung σ für die Bruchbelastung, so findet man, dass diese im Durchschnitte etwa doppelt so gross ist, als jene.

Man hat diesen Widerspruch damit zu erklären gesucht,

dass die Nulllinie beim Gusseisenbalken, weil dieser dem Hooke'schen Gesetze nicht gehorcht, weit von der Mitte nach der Druckseite hin abrücke — und dass überdies die Spannungen langsamer wüchsen, als die Abstände von der Nulllinie. Beide Umstände würden eine Herabminderung der Kantenspannung auf der Zugseite herbeiführen, so dass diese viel kleiner würde, als nach der gewöhnlichen Biegungsformel und mit der aus dem Zugversuche ermittelten übereinstimmen könnte. Die damit verbundene Erhöhung der Kantenspannung auf der Druckseite käme dabei nicht in Betracht, weil das Gusseisen ohnehin viel widerstandsfähiger gegen Druck ist, als gegen Zug.

Gegen diese sonst sehr annehmbare Erklärung spricht indessen die Thatsache, dass die Nulllinie der Beobachtung zufolge in Wirklichkeit nur sehr wenig aus der Mitte verschoben ist. *) Der andere Umstand, dass die Spannungen bei Gusseisen langsamer wachsen, als die Abstände von der Nulllinie, vermag nämlich allein den ganzen Unterschied zwischen den Ergebnissen des Zugversuchs und des Biegungsversuchs nicht vollständig zu erklären, wenn er den Widerspruch auch etwas herabmindert. Andererseits ist auch nicht wohl anzunehmen, dass der Zugversuch bei Gusseisen wegen einer ungleichförmigen Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt zu so stark fehlerhaften Resultaten führen könne, wie dies in anderen Fällen (bei Steinen u. s. f.) unzweifelhaft der Fall ist. Eine völlig befriedigende Erklärung fehlt daher hier noch.

Sehr erschwert werden Versuche mit Gusseisen durch die Ungleichmässigkeiten des Materials. Gussfehler und andere Ungleichförmigkeiten, namentlich auch die beim Abkühlen des gegossenen Metalls leicht auftretenden „Gussspannungen“, d. h. Spannungen, die selbst im unbelasteten Stücke zwischen

*) Dies ist freilich aus nichtigen Gründen bestritten worden. Wer die Versuche von Barlow und mir widerlegen will, möge sie zunächst selbst wiederholen und er wird sich dann bald überzeugen, dass wir Recht haben.

solchen Theilen auftreten, die nicht gleichzeitig erstarrt sind, erschweren die Gewinnung zuverlässiger Resultate ungemein.

Andererseits haben diese Umstände auch dazu geführt, das Gusseisen als ein unzuverlässiges Material zu betrachten und es bei Constructionen, auf deren Festigkeit in erster Linie Gewicht zu legen ist, nach Möglichkeit zu vermeiden. So häufig es auch im Maschinenbaue verwendet wird, kommt es mit seltenen Ausnahmen doch nur bei solchen Theilen vor, die verhältnissmässig geringe Lasten zu tragen haben, so dass deren Abmessungen nicht auf Grund einer Festigkeitsberechnung, sondern weit stärker auf Grund anderer Erwägungen gewählt werden. Man kommt daher nur vergleichsweise selten in die Lage, eine Festigkeitsberechnung für Gusseisenbalken auszuführen. Kommt dies aber doch einmal vor, so kann man unbedenklich die gewöhnliche Bieungsformel anwenden, da nach allen bisherigen Beobachtungen, solange keine grösseren Fehler im Gussstücke vorkommen, die Bieungsfestigkeit gusseiserner Balken stets grösser ist, als die Rechnung sie liefert, wenn man die aus Zugversuchen gewonnene Zugfestigkeit einsetzt. Jedenfalls wird hiermit nur die Sicherheit der Construction erhöht.

Besser geklärt ist das Verhalten von Stein- oder Betonbalken, die bei Decken-Constructionen, Treppenstufen u. dgl. öfters vorkommen. Auch hier schien früher ein ähnlicher Widerspruch zu bestehen, wie beim Gusseisen. Es zeigte sich aber, dass er in der Hauptsache auf unrichtige Bestimmungen der Zugfestigkeit zurückzuführen war. Durch Versuche, die theils von mir, theils (auf einem anderen Wege) von Grübler*) herrühren, ist dies sicher festgestellt, so sehr man sich auch von manchen Seiten her dagegen ereifert hat.

Ganz richtig ist freilich die gewöhnliche Bieungsformel auch bei Steinbalken nicht, weil auch hier die Spannungen nicht proportional mit dem Abstände von der Nulllinie wachsen und weil die Nulllinie selbst auch ein wenig von der Mitte

*) Zeitschr. d. V. D. Ing. 1899, S. 1294.

entfernt ist. Man setzt in diesem Falle an Stelle von Gl. (50) besser

$$\sigma = \eta \frac{M}{W},$$

wo nun η ein Berichtigungs-Coefficient ist, der nach meinen Versuchen für rechteckige Granitbalken gleich 0,96, für Sandsteinbalken gleich 0,84 und nach Melan*) für Betonbalken gleich 0,97 zu setzen ist. — Die so berechnete Kantenspannung darf indessen nicht mit den Ergebnissen gewöhnlicher Zugversuche der gleichen Materialien verglichen werden, sondern mit der wahren Zugfestigkeit, d. h. mit jener, die ein Zugversuch liefern müsste, wenn eine vollständig gleichförmige Vertheilung der Zugspannungen über den Querschnitt bei ihm zu erreichen wäre.

§ 23. Die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Bisher war unser Augenmerk nur auf die Berechnung der Spannungen gerichtet. Um die Formänderungen kümmerten wir uns nur so weit, als es nöthig war, um die nöthigen Anhaltspunkte für wahrscheinliche Annahmen über die Spannungsvertheilung zu erlangen. Jetzt wollen wir uns die Frage nach der Gestalt der elastischen Linie vorlegen, also jener Linie, in die die Stabmittellinie durch die Biegung übergeht. Dabei soll aber von vornherein vorausgesetzt werden, dass der Biegungspfeil gering bleibt, da andere Fälle fast ganz ohne Interesse für die Anwendungen sind.

Zu diesem Zwecke berechnen wir zunächst, wie gross der Winkel $d\varphi$ ist, um den sich zwei im Abstände dx aufeinander folgende Querschnitte bei der Biegung gegeneinander drehen. Eine Faser, die den Abstand y von der Nulllinie hat, erfährt eine Längenänderung $y d\varphi$, die nach dem Elasticitätsgesetze mit der specifischen Spannung σ an dieser Stelle in einem Zusammenhange steht, der durch die Proportion

$$\frac{y d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

*) Festschrift der techn. Hochschule in Brünn, 1899.

ausgesprochen wird. Für σ führen wir den durch Gl. (48) angegebenen Werth ein und erhalten

$$d\varphi = dx \frac{M}{E\Theta}. \quad (76)$$

Diese Gleichung kann noch auf zwei andere Formen gebracht werden, die für die Anwendung meistens bequemer sind. Zunächst führen wir den Krümmungsradius ρ der elastischen Linie mit Hilfe der Beziehung $\rho d\varphi = dx$ ein und erhalten

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\Theta} \quad \text{oder} \quad \rho = \frac{E\Theta}{M}. \quad (77)$$

Andererseits hat man aber für ρ nach den Lehren der analytischen Geometrie den Ausdruck

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wenn jetzt y nicht mehr die Coordinate eines Punktes des Querschnitts, sondern die Ordinate der elastischen Linie bedeutet. In unserem Falle weicht aber die Curve, deren Krümmungshalbmesser wir betrachten, nur sehr wenig von einer Geraden ab. Wenn wir die Ordinaten y von der ursprünglichen Lage der Stabaxe aus rechnen, ist daher $\frac{dy}{dx}$ die Tangente eines sehr kleinen Winkels und das Quadrat dieses sehr kleinen Bruches kann daher ohne merklichen Fehler in dem vorausgehenden Ausdrucke gegen die Einheit vernachlässigt werden. Dadurch geht ρ in den reciproken Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ über und Gl. (77) liefert, wenn man dies einsetzt,

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (78)$$

Das Vorzeichen von ρ ist nämlich zunächst unbestimmt, da im Zähler des Ausdrucks für ρ eine Quadratwurzel steht. Es muss daher nachträglich so gewählt werden, dass es mit den übrigen Festsetzungen in Uebereinstimmung steht. Nun

wird M dann positiv gerechnet, wenn es den in horizontaler Lage gezeichneten Stab so krümmt, dass sich die Hohlseite nach oben hin kehrt. Zugleich wollen wir die Einsenkungen y positiv rechnen, wenn sie, wie gewöhnlich, nach abwärts gehen. In diesem Falle ist aber bei dem auf zwei Stützen ruhenden Balken $\frac{dy}{dx}$ am grössten am linken Auflager des Balkens; es wird dann, wenn wir weiter nach der Mitte hin gehen, allmählich kleiner, wird dann zu Null, nimmt hierauf negative Werthe an und erlangt den grössten negativen Werth am rechten Auflager. Ueber die ganze Spannweite hin ist daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, während M überall positiv ist, und damit Gl. (78) auch dem Vorzeichen nach gültig sei, musste daher ein Minuszeichen beigegeben werden.

Gl. (78) wird die Differentialgleichung der elastischen Linie genannt. Um die Gleichung dieser Curve daraus in endlicher Form zu finden, drückt man zunächst mit Hülfe der gegebenen Lasten M als Function von x aus und integrirt Gl. (78) zweimal nach x . Dabei treten zwei Integrationsconstanten auf, deren Werthe mit Hülfe der Grenzbedingungen an den Enden des Balkens ermittelt werden.

Dieses Verfahren soll an einigen einfachen Fällen erläutert werden. Zunächst sei ein Balken von überall gleichem Querschnitte gegeben, der an beiden Enden frei aufliegt und eine gleichmässig über die ganze Länge vertheilte Belastung von q kg auf die Längeneinheit trägt. Für irgend einen Querschnitt im Abstände x vom linken Auflager hat man für das Biegemoment, also für das Moment der links vom Querschnitte liegenden äusseren Kräfte

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Mit l ist dabei die Spannweite bezeichnet. Der Auflagerdruck auf beiden Seiten ist gleich $\frac{ql}{2}$, das erste Glied stellt daher das Moment des linken Auflagerdrucks dar. Die Belastung des linken Balkentheils ist qx und der Hebelarm da-

von gleich $\frac{x}{2}$. Das Biegemoment ist über die ganze Spannweite positiv und wird an den beiden Auflagern zu Null. Denkt man sich M in jedem Punkte der Stabaxe rechtwinklig dazu in irgend einem Maassstabe aufgetragen, so erhält man eine Parabel. Allgemein heisst die in dieser Weise gefundene Curve die zu der gegebenen Belastung gehörige Momentencurve und die zwischen ihr und der Stabaxe eingeschlossene Fläche die Momentenfläche.

Mit dem hier festgestellten Werthe von M geht Gl. (78) über in

$$E \Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}.$$

Nach zweimaliger Integration erhält man daraus

$$E \Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + Cx + C_1,$$

wenn mit C und C_1 die beiden Integrationsconstanten bezeichnet werden. Nun muss nach den Bedingungen der Aufgabe y zu Null werden für $x=0$ und für $x=l$, da beide Enden des Balkens durch die Auflagerung gegen verticale Bewegungen geschützt sind. Die erste Bedingung lehrt, dass die Constante C_1 gleich Null zu setzen ist. Zur Ermittlung von C haben wir die Gleichung

$$0 = \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^4}{12} + Cl, \text{ also } C = \frac{ql^3}{24},$$

und für die Gleichung der elastischen Linie in endlicher Form folgt daher

$$E \Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3x}{24}. \quad (79)$$

Die Linie ist also vom vierten Grade. Es mag noch erwähnt werden, dass sich die hier analytisch vorgenommene Integration allgemein auch mit Hülfe einer geometrischen Construction, nämlich mit Hülfe eines Seilpolygons, ausführen lässt. Diese Betrachtungen gehören indessen zur graphischen Statik und sie werden dort eine ausführliche Darstellung erhalten.

Von besonderem Interesse ist der Werth der Einsenkung y in der Balkenmitte, also zugleich der grösste Werth, den y annimmt. Man nennt diese Strecke den Biegungspfeil, der hier stets mit dem Buchstaben f bezeichnet werden soll. Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man aus Gl. (79)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta}. \quad (80)$$

In der letzten Form dieser Gleichung ist unter Q die Gesamtbelastung des Balkens, also ql zu verstehen.

Zweitens sei ein Balken betrachtet, der in der Mitte der Spannweite eine Einzellast P trägt. Man hat hier

$$M = \frac{P}{2} x$$

und daher

$$E\Theta \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

oder nach zweimaliger Integration

$$E\Theta y = -\frac{Px^3}{12} + Cx + C_1.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten muss aber hier ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Der Ausdruck $\frac{P}{2} x$ für M ist nämlich nur für solche Querschnitte gültig, die links von der Mitte liegen; rechts davon wäre

$$M = \frac{P}{2} x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P(l-x)}{2}$$

zu setzen. Infolgedessen gilt auch die vorausgehende endliche Gleichung nur für die linke Hälfte der elastischen Linie. Diese Linie selbst setzt sich aus zwei Aesten zusammen, die sich in der Mitte stetig und ohne Knick aneinander schliessen, die aber zu verschiedenen Bildungsgesetzen gehören. Hier wird die Lösung dadurch vereinfacht, dass die Last in der Mitte angenommen wurde. Dadurch sind beide Aeste der elastischen Linie symmetrisch zueinander gestaltet und symmetrisch gelegen und es genügt, den einen Ast zu betrachten.

Dieser muss nämlich der Symmetrie wegen in der Mitte eine horizontale Tangente haben. In

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C$$

muss daher die rechte Seite für $x = \frac{l}{2}$ verschwinden, also $C = \frac{Pl^2}{16}$ gesetzt werden.

Für die andere Integrationskonstante C_1 erhält man wie vorher $C_1 = 0$, weil y für $x = 0$ verschwinden muss. Für den linken Ast der elastischen Linie hat man daher schliesslich die Gleichung

$$E\Theta y = \frac{Pl^2x}{16} - \frac{Px^3}{12}. \quad (81)$$

Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man für den Biegunspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48E\Theta}, \quad (82)$$

eine bei den Anwendungen sehr häufig gebrauchte Formel.

Trägt der Balken zwei Einzellasten P_1 und P_2 in den Abständen p_1 und p_2 vom linken Auflager, so zerfällt die elastische Linie in drei sich stetig und ohne Knick aneinander schliessende Aeste. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte. Wird der Auflagerdruck am linken Ende mit A bezeichnet, so hat man

$$M_I = Ax; \quad M_{II} = Ax - P_1(x - p_1); \\ M_{III} = Ax - P_1(x - p_1) - P_2(x - p_2).$$

Von diesen Ausdrücken gilt M_I zwischen $x = 0$ und $x = p_1$, der zweite zwischen $x = p_1$ und $x = p_2$ und der dritte zwischen $x = p_2$ und $x = l$. Man hat der Reihe nach jeden dieser Ausdrücke in die Gleichung der elastischen Linie einzusetzen und diese jedesmal zu integrieren. Dadurch erhält man die endlichen Gleichungen der drei Aeste, in denen zusammen sechs unbekannte Integrationskonstanten auftreten. Zu deren Bestimmung hat man zunächst die beiden Bedingungen, dass y an den beiden Auflagerstellen zu Null werden muss. Ausserdem muss an jeder Uebergangsstelle y und $\frac{dy}{dx}$ für beide Aeste

wäre für jeden Ast eine besondere willkürliche Integrations-Constante anzunehmen gewesen. Wenn wir aber, wie es bereits durch die Art der Anschreibung ausgedrückt wird, C als den gleichen Werth für alle drei Aeste betrachten, so sind damit zwei willkürliche Integrations-Constanten bereits so bestimmt, dass die drei Aeste der elastischen Linie sich ohne Knick aneinander schliessen. In der That erkennen wir nämlich, dass mit dieser Verfügung über die Integrations-Constanten an den Grenzen der Gebiete I und II und II und III keine sprungweise Aenderung von $\frac{dy}{dx}$ vorkommt. Sobald wir das Gebiet I verlassen und in das Gebiet II eintreten, haben wir zwar noch ein neues Glied in der Gleichung zu berücksichtigen. An der Stelle $x = p_1$, also an der Grenze selbst, wird dies Glied aber zu Null und es ist daher gleichgültig, ob wir die Grenzstelle noch zum Gebiete I oder schon zum Gebiete II rechnen; an dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ wird dadurch nichts geändert und die vorgeschriebene Grenzbedingung ist erfüllt. Auf diesem Umstande, dass sich die Integrations-Constanten ohne Weiteres von selbst den Grenzbedingungen anpassen, beruht der Vortheil des Verfahrens.

Eine zweite Integration liefert

$$E\Theta y = Cx + C_1 - A \frac{x^3}{6} \underset{\text{I}}{,} + P_1 \frac{(x - p_1)^3}{6} \underset{\text{II}}{,} + P_2 \frac{(x - p_2)^3}{6} \underset{\text{III}}{,}$$

und auch hier tritt nur eine, für alle Aeste gemeinsame, neue Integrations-Constante C_1 hinzu, während zugleich an den Grenzen die Bedingungen erfüllt sind, dass sich y nicht sprungweise ändern kann. Die weitere Behandlung der Gleichung und die Ermittlung der beiden Integrations-Constanten C und C_1 aus den Bedingungen an den Enden des ganzen Balkens kann nun genau so erfolgen, als wenn es sich um eine elastische Linie mit nur einem einzigen Aeste handelte.

Besser freilich als die Rechnung eignet sich in solchen Fällen das graphische Verfahren zur Ermittlung der Gestalt der elastischen Linie, worüber man im II. Bande Näheres finden wird.

Aehnlich liegt der Fall, wenn der Balken zwar nur eine stetig vertheilte Belastung oder eine einzige Last in der Mitte trägt, der Querschnitt aber nicht constant ist, sondern in verschiedenen Absätzen wechselt, wie es z. B. bei Blechbalken vorkommt, deren Querschnitt nach der Mitte zu durch Aufnieten von Gurtungsplatten verstärkt wird. Auch dann setzt sich die elastische Linie aus einer Anzahl verschiedener Aeste zusammen. Verändert sich der Querschnitt stetig, so ist θ als Function von x in die Differentialgleichung einzusetzen. Insofern die Ausführung der Integration dadurch nicht erschwert oder unmöglich gemacht wird, erleidet das Verfahren hierdurch keine Aenderung. Der practisch wichtigste Fall bleibt aber immer der des Balkens von constantem Querschnitte; man behilft sich häufig damit, die für diesen aufgestellten Formeln näherungsweise auch für andere Fälle anzuwenden, weil man die umständlichere Rechnung, die diese erfordern würden, scheut und man sich sehr oft mit einer ungefähren Schätzung des Biegungspfeiles begnügen kann.

Die vorausgehenden Rechnungen beruhen auf der stillschweigenden Voraussetzung, dass die Kraftebene durch eine Hauptaxe des Querschnitts geht. Trifft dies nicht zu, so hat man die Lasten, wie in § 16, in Componenten nach den Richtungen der Hauptaxen zu zerlegen und die Biegelinie für die Componenten in beiden Ebenen zu ermitteln. Die gesammte Formänderung ergibt sich durch geometrische Summirung der zu diesen beiden Componentensystemen gehörigen elastischen Verschiebungen.

§ 24. Einfluss der Schubspannungen auf die Biegelinie.

Bei den vorausgehenden Betrachtungen ist noch keine Rücksicht auf die Formänderungen genommen, die durch die Schubspannungen bewirkt werden. Diese haben zur Folge, dass der Biegungspfeil noch etwas vergrößert wird und dass überhaupt die elastische Linie von der vorher berechneten Gestalt ein wenig abweicht.

In Abb. 31 ist ein Längenelement des Balkens gezeichnet. Wenn sich die Scheerkraft V gleichmässig über den Querschnitt vertheilt, hätte sie zur Folge, dass sich der ursprünglich rechte Winkel zwischen dem Querschnitte und der Stabaxe um einen kleinen Betrag γ' änderte, der nach dem Elasticitätsgesetze leicht berechnet werden kann. Man hat nämlich für den durchschnittlichen Betrag τ_m der Schubspannung

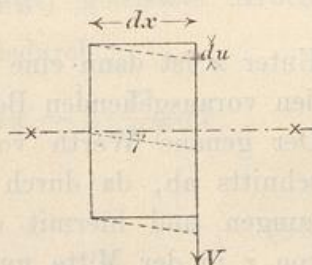


Abb. 31.

$$\tau_m = \frac{V}{F}$$

und nach Gl. (33)

$$\gamma' = \frac{\tau_m}{G} = \frac{V}{GF}$$

Die Winkeländerung γ' bewirkt eine Parallelverschiebung der beiden Querschnitte gegeneinander, die mit du' bezeichnet werden mag; man findet dafür

$$du' = \gamma' dx = \frac{V dx}{GF}$$

So einfach liegt die Sache in Wirklichkeit aber nicht. Die Schubspannungen vertheilen sich nach einem anderen Gesetze über den Balkenquerschnitt, das in § 20 festgestellt wurde. In der Mitte sind demnach die Schubspannungen grösser als der vorher berechnete Durchschnittsbetrag τ_m , während sie nach der oberen und der unteren Kante hin bis auf Null abnehmen. In Folge davon wird auch die Winkeländerung γ zwischen der Stabaxe und dem Balkenquerschnitte in der Mitte grösser, während der Winkel an den Kanten ungeändert bleibt. Man erkennt daraus nebenbei, dass die Bernoulli'sche Annahme, die Querschnitte blieben bei der Formänderung eben, nicht streng erfüllt sein kann. In der That ist auch schon im Vorhergehenden diese Annahme nur als näherungsweise richtig vorausgesetzt worden.

Hier handelt es sich besonders um den Höhenunterschied aufeinander folgender Punkte der Stabaxe, der auf Rechnung

der Schubspannungen zu setzen ist. Wir bezeichnen diesen mit du und setzen

$$du = \alpha du' = \alpha \frac{V dx}{GF}. \quad (83)$$

Unter α ist dann eine Verhältnisszahl zu verstehen, die nach den vorausgehenden Bemerkungen jedenfalls grösser als 1 ist. Der genaue Werth von α hängt von der Gestalt des Querschnitts ab, da durch diese die Vertheilung der Schubspannungen und hiermit das Verhältniss zwischen dem Werthe von τ in der Mitte und dem Durchschnittswerthe τ_m bedingt ist. Es wäre indessen nicht zulässig, α unmittelbar gleich dem zuletzt genannten Verhältnisse zu setzen, denn die Verschiebungen du verschiedener Fasern, die in verschiedenen Abständen von der Nulllinie liegen, können nicht unabhängig voneinander erfolgen, weil sonst eine Zerrung in der Richtung der Höhe des Querschnitts zu Stande käme. In der That ist der Vorgang durch die Querschnittskrümmung, die nothwendig auftreten muss, ziemlich verwickelt. Man hilft sich daher damit, den Werth von α auf Grund einer Betrachtung zu ermitteln, die sich auf den Begriff der Formänderungsarbeit stützt. Es kommt dies darauf hinaus, dass man einen Durchschnittswerth du für alle Fasern berechnet. Strenger begründen lässt sich dieses Verfahren freilich nicht; es hat mehr den Charakter einer Abschätzung als einer genauen Berechnung. Da es sich hierbei nur um eine an sich geringfügige Correctionsgrösse handelt, lässt sich aber gegen seine Benützung nichts einwenden.

Für den Fall der reinen Schubspannung ist die spezifische Formänderungsarbeit nach Gl. (44) gleich $\frac{\tau^2}{2G}$. Für das Balkenelement von der Länge dx ist daher die Formänderungsarbeit gleich

$$dx \int \frac{\tau^2}{2G} dF$$

zu setzen, wobei die Integration über den ganzen Querschnitt zu erstrecken ist.

In diesem Ausdrücke kann für τ der in Gl. (74) auf-

gestellte Werth eingesetzt werden. Der so ermittelten Formänderungsarbeit ist die von der Scheerkraft V (die für das Balkenelement eine äussere Kraft bildet) geleistete Arbeit $\frac{1}{2} V du$ gleich zu setzen. Man erhält dadurch

$$dx \int \frac{\tau^2}{2G} dF = \frac{1}{2} V du = \frac{1}{2} V \alpha du' = \alpha \frac{V^2}{2GF} dx$$

und hiermit

$$\alpha = \frac{F \int \tau^2 dF}{V^2}. \quad (84)$$

Für den rechteckigen Querschnitt soll die Rechnung zu Ende geführt werden. In § 20 war dafür

$$\tau = \frac{V}{\Theta} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

gefunden, wobei zur Vermeidung von Missverständnissen hier z an Stelle des dort mit u bezeichneten Abstandes der betreffenden Faser von der Nulllinie gesetzt ist. Mit $\Theta = \frac{bh^3}{12}$ wird dies

$$\tau = \frac{V}{bh^3} \left(\frac{3}{2} h^2 - 6z^2 \right)$$

und daher

$$\int \tau^2 dF = \frac{V^2}{b^2 h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{3}{2} h^2 - 6z^2 \right)^2 b dz.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man

$$\int \tau^2 dF = \frac{6}{5} \frac{V^2}{bh}.$$

Setzt man dies in Gl. (84) ein und beachtet, dass $F = bh$ ist, so erhält man für den rechteckigen Querschnitt

$$\alpha = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Es möge noch bemerkt werden, dass die Berechnung von α nach Gl. (84) immer leicht durchgeführt werden kann, auch wenn sich die Integration nach den gewöhnlichen Methoden

nicht vornehmen lässt, indem man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt und an die Stelle der Integration eine Summierung treten lässt. Das Resultat dieser mechanischen Quadratur wird immer genau genug, auch wenn man eine Eintheilung in nur wenige Streifen vornimmt.

Für die besonders häufig verwendeten gewalzten Eisenträger von dem I-Profile hat man α ein für alle Male berechnet. Für den I-Träger Nr. 8 (d. h. von 8 cm Höhe) wurde $\alpha = 2,4$, für den höchsten Träger, der noch verwendet zu werden pflegt, Nr. 50 $\alpha = 2,0$ gefunden. Für die dazwischen liegenden Trägerhöhen ändert sich α allmählich von dem einen zu dem anderen dieser Werthe. Grösser als bei den I-Trägern wird α nicht leicht bei einer anderen Querschnittsgestalt.

Bei den jetzt durchgeführten Rechnungen ist nur auf den Einfluss von V auf die Biegelinie geachtet worden, d. h. M wurde bei dem betrachteten Balkenelemente als Null vorausgesetzt. Wirken M und V gleichzeitig ein, so summiren sich die Wirkungen von beiden. An irgend einer Stelle im Abstände x vom linken Auflager hat man daher die gesammte Durchsenkung y'

$$y' = y + \int_0^x du, \quad (85)$$

wenn unter y die im vorigen Paragraphen berechnete Einsenkung verstanden wird. Das letzte Glied in diesem Ausdrucke ist indessen gewöhnlich klein gegen das erste und es genügt daher meistens $y' = y$ zu setzen, den Einfluss der Schubspannungen also zu vernachlässigen. Nur bei kurzen Stäben von grossem Querschnitte, bei denen, wie wir schon früher fanden, die Schubspannungen überhaupt mehr hervortreten, oder für Stellen, die den Balkenenden benachbart sind, wird es nöthig, das zweite Glied in Gl. (85) zu berücksichtigen. Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir noch speciell einen beiderseits frei aufliegenden Balken von constantem rechteckigem Querschnitte, der eine Einzellast in der

Mitte trägt. Der Biegunspfeil f war dafür im vorigen Paragraphen in Gl. (82) zu

$$f = \frac{Pl^3}{48 E \Theta} = \frac{Pl^3}{4 E b h^3}$$

berechnet. Für du hat man hier nach Gl. (83) mit $\alpha = 1,2$ $V = \frac{P}{2}$ und $F = bh$

$$du = 0,6 \frac{P dx}{G b h}$$

und daher

$$\int_0^{\frac{l}{2}} du = 0,3 \frac{Pl}{G b h}.$$

Für den mit Rücksicht auf den Einfluss der Schubspannungen verbesserten Werth f' des Biegunspfeiles findet man also nach Gl. (85)

$$f' = \frac{Pl^3}{4 E b h^3} + 0,3 \frac{Pl}{G b h} = \frac{Pl}{4 E b h} \left(\frac{l^2}{h^2} + 3 \right). \quad (86)$$

Bei der letzten Umformung ist $G = 0,4 E$ gesetzt, also vorausgesetzt, dass für den Stoff, aus dem der Balken besteht, die Verhältnisszahl $m = 4$ sei. Nimmt man an, dass die Spannweite l etwa 10 Mal so gross sei, als die Balkenhöhe h , so macht das zweite Glied in der Klammer, das vom Einflusse der Schubspannungen herrührt, nur 3% von dem ersten aus. Gewöhnlich ist das Verhältniss $\frac{l}{h}$ noch grösser als 10, und das von den Schubspannungen herrührende Glied macht dann einen noch kleineren Bruchtheil des anderen aus. Mit dem Verhältnisse $\frac{l}{h} = 5$ steigt indessen der Bruchtheil auf 12% und von da an wird es nöthig, die genauere Formel (86) an Stelle von Gl. (82) zur Berechnung des Biegunspfeiles zu verwenden.

§ 25. Durchlaufende Träger.

Für einen Balken, der über mehrere Oeffnungen hinwegreicht, kann man, wie schon früher hervorgehoben wurde, die Auflagerkräfte nur auf Grund der elastischen Formänderungen,

die er erfährt, berechnen. Wenn die Auflagerkräfte bereits bekannt wären, würde sich die Berechnung der Spannungen genau so wie bei dem Träger über einer einzigen Spannweite ausführen lassen. Man könnte ohne Weiteres für jeden Querschnitt das Biegemoment und die Scheerkraft angeben und die Spannungen daraus nach den bereits dafür aufgestellten Formeln finden. Es handelt sich also in der That nur noch darum, zu zeigen, wie man die Auflagerkräfte oder überhaupt die statisch unbestimmten Grössen, die auch in anderer Weise gewählt werden können, berechnen kann.

Man nehme zunächst an, dass der Träger über zwei Oeffnungen von gleicher Grösse l hinwegreicht und eine gleichmässig vertheilte Last q auf die Längeneinheit trägt. Wenn die Mittelstütze entfernt wäre, würde sich die Trägermitte um den in Gl. (80) angegebenen Betrag durchbiegen, wobei nur $2l$ an Stelle von l zu setzen ist. Auf den Einfluss der Schubspannungen braucht man in der Regel keine Rücksicht zu nehmen; wenn es gewünscht werden sollte, kann dies aber nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren leicht geschehen.

Hierauf denke man sich an dem Balken in der Mitte eine nach aufwärts gerichtete Kraft angebracht. Dadurch wird die Balkenmitte wieder gehoben und zwar um den in Gl. (82) festgestellten Betrag, wenn an Stelle von l wieder $2l$ gesetzt und unter P die Grösse der aufwärts gerichteten Kraft verstanden wird. Wenn wir P so bestimmen, dass die vorher erlittene Durchbiegung in der Mitte gerade wieder rückgängig gemacht wird, erhalten wir damit die Grösse des Auflagerdrucks an der Mittelstütze, denn nur bei diesem Werthe des Auflagerdrucks kann die elastische Linie des ganzen Stabes durch den vorgeschriebenen Punkt gehen. Die Gleichsetzung der Werthe von f in Gl. (80) und Gl. (82) liefert

$$P = \frac{5}{8} \cdot 2ql = \frac{5}{8} Q,$$

wenn jetzt Q die über beide Oeffnungen vertheilte Last bedeutet. Man sieht daraus, dass der durchlaufende Träger einen

grösseren Theil der ganzen Last auf die Mittelstütze überträgt, als zwei getrennte Träger, von denen jeder eine der beiden Oeffnungen überdecken würde, denn in diesem Falle käme auf die Mittelstütze $\frac{Q}{2}$ und auf jede Endstütze $\frac{Q}{4}$. Der Auflagerdruck des durchlaufenden Trägers an jedem Ende stellt sich auf $\frac{1}{2} \left(Q - \frac{5}{8} Q \right) = \frac{3}{16} Q$.

Diese Betrachtung setzt voraus, dass alle drei Stützen genau in gleicher Höhe liegen und dass sie auch unter dem Einflusse der Belastung nicht nachgeben, selbstverständlich auch, dass der Träger vorher genau gradlinig war. Senkt sich etwa die Mittelstütze um den Betrag δ oder musste sich der Träger schon vorher in der Mitte um δ durchbiegen, ehe er die Mittelstütze erreichte, so findet man den Auflagerdruck P aus der Gleichung

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{Q(2l)^3}{E\Theta} = \delta + \frac{P(2l)^3}{48E\Theta},$$

also

$$P = \frac{5}{8} Q - \delta \frac{6E\Theta}{l^3}.$$

Wenn die Mittelstütze zu hoch lag, ist hierin δ negativ zu setzen.

Man sieht leicht ein, dass dasselbe Verfahren auch noch anwendbar bleibt, wenn die Oeffnungen von verschiedener Grösse sind. Man braucht dann nur an die Stelle von f die für irgend eine andere Abscisse x gültigen Werthe von y aus § 23 einzusetzen. Auch für Träger, die über mehr als zwei Oeffnungen hinwegreichen, lässt sich die Berechnung der Auflagerkräfte in derselben Weise durchführen; bei drei Oeffnungen hat man zwei nach aufwärts gerichtete unbekannte Kräfte an den Mittelstützen anzunehmen, die sich aus den beiden Bedingungen berechnen, dass die elastischen Verschiebungen der zugehörigen Angriffspunkte im Ganzen verschwinden müssen. Auf die Berechnung der durchlaufenden Träger wird im Uebrigen hier nicht ausführlicher eingegangen, da sie besser der graphischen Statik vorbehalten bleibt.

§ 26. Der auf beiden Seiten eingespannte Träger.

Ein Träger sei an den Auflagern so gestützt, dass jede Drehung des Stabendes unmöglich gemacht ist. Die elastische Linie hat dann horizontale Tangenten an den Stabenden und man erkennt daraus schon, dass sie zwei Wendepunkte haben muss, zwischen denen sie, wie beim frei aufliegenden Träger, hohl nach oben hin gekrümmt ist, während sie zwischen einem Wendepunkte und dem benachbarten Auflager ihre Hohlseite nach unten kehrt. In den Wendepunkten ist die Krümmung Null, daher muss dort auch das Biegemoment M verschwinden.

Eine Einzelkraft würde nicht ausreichen, das Ende des Trägers gegen eine Drehung schützen zu können. Ausser einem Auflagerdrucke muss daher an jedem Trägerende noch ein Kräftepaar von der Stütze her übertragen werden. Das Moment dieses Kräftepaars am linken Auflager sei mit M_0 bezeichnet, denn es stellt zugleich das Biegemoment für einen Querschnitt dar, der unmittelbar in der Nähe des Auflagers gezogen ist. Wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass der Balken eine gleichmässig vertheilte Last trägt, ist M für irgend einen anderen Querschnitt mit der Abscisse x

$$M = M_0 + Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie geht damit über in

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - Ax - M_0.$$

Für den Auflagerdruck A kann in unserem Falle auch noch $\frac{ql}{2}$ gesetzt werden. Eine einmalige Integration liefert

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} - A \frac{x^2}{2} - M_0x + C.$$

Die Integrationsconstante C muss aber hier verschwinden, weil $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$ bleibt. Auch für $x = l$ muss der

Ausdruck verschwinden, da der Balken auch am rechten Ende eingemauert sein sollte. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l^2}{2} - M_0 l,$$

woraus

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12}$$

folgt. Das grösste positive Biegemoment in der Mitte wird gleich $\frac{ql^2}{24}$; die grösste Bruchgefahr ist also an den Auflagerstellen vorhanden. — Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch für den durchlaufenden Träger anstellen.

Natürlich kann man auch hier auf den Einfluss der Schubspannungen Rücksicht nehmen; es lohnt sich aber nicht, näher darauf einzugehen, da alle diese Rechnungen bei der Anwendung mit einer grossen Unsicherheit behaftet sind. Man kann sich niemals sicher darauf verlassen, dass der Träger wirklich so gut eingespannt sei, dass jede Drehung des Stabendes ausgeschlossen wäre. Das wirkliche Verhalten der Stabenden kann vielmehr von dem bei der Rechnung vorausgesetzten weit abweichen und es würde nur ein irrhümliches Gefühl der Sicherheit erwecken, wenn man sich unter solchen Umständen mit der Berechnung kleiner Correctionsgrössen befassen wollte, die gegenüber den zu erwartenden Fehlern des Hauptwerthes kaum in Betracht kommen.

Aufgaben.

11. Aufgabe. Man soll die Centralellipse für ein gleichschenkliges Winkелеisenprofil von 70 mm Schenkellänge und 10 mm Schenkelstärke construiren.

Lösung. Eine Hauptaxe des Querschnitts ist die Symmetrieaxe YY . Das zugehörige Trägheitsmoment Θ_y ist

$$\Theta_y = \frac{7^4}{12} - \frac{6^4}{12} = 92,1 \text{ cm}^4,$$

da sich der Querschnitt als Differenz zweier Quadrate ansehen lässt, für die beide YY eine Schwerpunktsaxe ist. Den Abstand a

des Schwerpunkts S von der Diagonale des umschriebenen Quadrats findet man aus der Momentengleichung

$$a \cdot 13 = 7,07 \cdot 36,$$

also

$$a = 19,6 \text{ mm.}$$

Auch das Trägheitsmoment Θ_z setzt man aus den Trägheitsmomenten der beiden Quadrate zusammen, wobei aber darauf zu achten ist, dass die Axe ZZ nicht durch die Schwerpunkte dieser beiden Quadrate geht. Man hat

$$\Theta_z = \frac{7^4}{12} + 7^2 \cdot 1,96^2 - \left(\frac{6^4}{12} + 6^2 \cdot 2,67^2 \right) = 23,7 \text{ cm}^4.$$

Für die Trägheitsradien folgt hieraus

$$t_y = \sqrt{\frac{92,1}{13}} = 2,66 \text{ cm}; \quad t_z = \sqrt{\frac{23,7}{13}} = 1,35 \text{ cm.}$$

Man trägt die Trägheitsradien auf den Hauptaxen ab und konstruiert die hierdurch bestimmte Ellipse

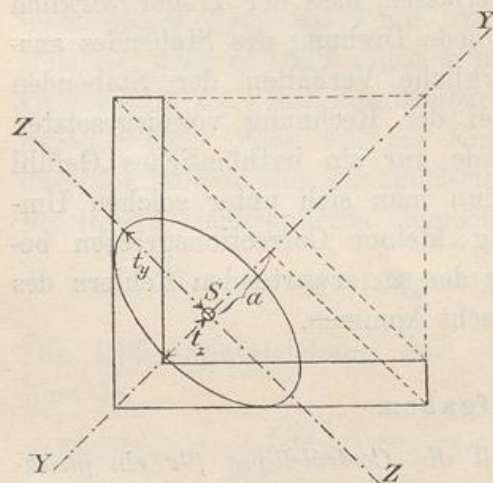


Abb. 32.

12. Aufgabe. Für das Z-Eisen N. P. 16 findet man im deutschen Normalprofilbuche für die Hauptaxen YY und ZZ angegeben

$$\text{tg } \alpha = 0,39;$$

$$\Theta_z = 1193 \text{ cm}^4;$$

$$\Theta_y = 58,8 \text{ cm}^4.$$

Die Maasse sind aus der Abbildung 33 zu entnehmen. Ein Balken von diesem Querschnitte ist an einem Ende eingemauert (so, dass

der Steg aufrecht steht, in derselben Lage wie in der Abbildung) und trägt an dem um 1,20 m vorkragenden Ende eine Last von 500 kg. Wie gross wird die grösste Spannung σ , wenn das freie Ende des Balkens an kleinen horizontalen Ausbiegungen nicht verhindert wird?

Lösung. Aus $\text{tg } \alpha = 0,39$ folgt $\alpha = 21^\circ 20'$; $\sin \alpha = 0,36$; $\cos \alpha = 0,93$. Das Biegemoment an der Einmauerung hat die

Grösse $500 \times 120 = 60000$ cmkg; wir zerlegen es in die Componenten $60000 \times 0,93 = 55800$ und $60000 \times 0,36 = 21600$ in den Richtungen der Hauptaxen. Zur ersten Componente gehört die neutrale Axe ZZ , und die zugehörigen Spannungen σ_I sind

$$\sigma_I = \frac{55800}{1193} \cdot y = 46,8 y, \quad \text{ebenso } \sigma_{II} = \frac{21600}{58,8} \cdot z = 367 z.$$

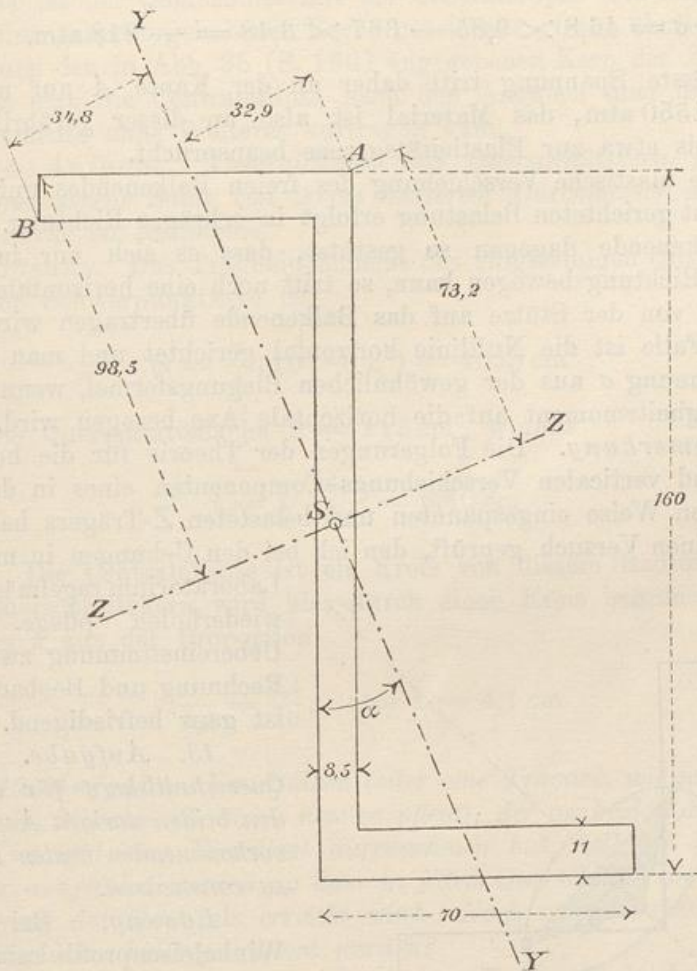


Abb. 33.

Die in irgend einem Flächenelemente des Querschnitts mit den Coordinaten y und z im Ganzen auftretende Spannung σ ist daher

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = 46,8 y + 367 z.$$

Dabei ist die positive Y -Axe nach oben, die positive Richtung der

Z-Axe nach rechts hin zu nehmen; y und z sind, wie alle übrigen Maasse, in cm auszudrücken, man erhält dann σ in atm. An der Kante A ist $y = 7,32$ und $z = 3,29$ cm, man hat daher

$$\sigma = 46,8 \times 7,32 + 367 \times 3,29 = 1550 \text{ atm.}$$

An der Kante B sind σ_I und σ_{II} von verschiedenem Vorzeichen und

$$\sigma = 46,8 \times 9,85 - 367 \times 3,48 = -818 \text{ atm.}$$

Die grösste Spannung tritt daher an der Kante A auf und ist gleich 1550 atm, das Material ist also an dieser gefährlichsten Stelle bis etwa zur Elasticitätsgrenze beansprucht.

Die elastische Verschiebung des freien Balkenendes unter der senkrecht gerichteten Belastung erfolgt in schräger Richtung. Wird das Balkenende dagegen so gestützt, dass es sich nur in lothrechter Richtung bewegen kann, so tritt noch eine horizontale Kraft auf, die von der Stütze auf das Balkenende übertragen wird. In diesem Falle ist die Nulllinie horizontal gerichtet und man erhält die Spannung σ aus der gewöhnlichen Biegungsformel, wenn darin das Trägheitsmoment auf die horizontale Axe bezogen wird.

Anmerkung. Die Folgerungen der Theorie für die horizontalen und verticalen Verschiebungs-Componenten eines in der angegebenen Weise eingespannten und belasteten Z-Trägers habe ich durch einen Versuch geprüft, den ich bei den Uebungen in meinem

Laboratorium regelmässig zu wiederholen pflege. Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist ganz befriedigend.

13. Aufgabe. Den Querschnittskern für die in den beiden vorigen Aufgaben vorkommenden beiden Profile zu construiren.

Lösung. Bei dem Winkeleisenprofile kann man fünf Linien zeichnen, die mit dem Umfange mehr als zwei Punkte gemeinsam haben und die Fläche nicht durchkreuzen. Von diesen

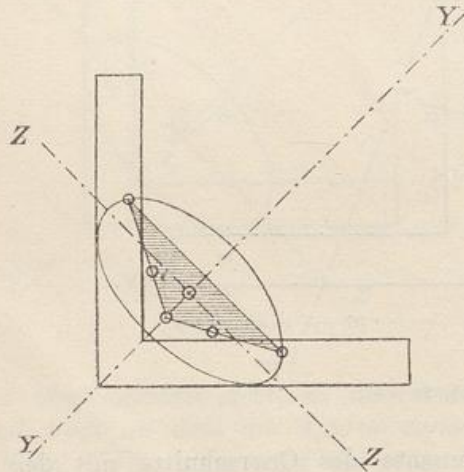


Abb. 34.

fallen vier mit den nach aussen gekehrten Umfangsseiten zusammen und die fünfte ist die parallel zur ZZ-Axe gezogene Verbindungs-

linie der beiden nach rechts oben gekehrten Ecken. Alle übrigen Strahlen des den Querschnitt einhüllenden Tangentenbüschels gehen aus diesen Hauptlagen durch Drehung um eine der Ecken des Querschnitts hervor. Daraus folgt, dass der Kern ein Fünfeck bildet, dessen Ecken die Antipole jener fünf Graden und dessen Seiten die Antipolaren der genannten Querschnittsecken sind. In Abb. 34 ist der Querschnitt mit der Centralellipse und dem durch Schraffur hervorgehobenen Kerne gezeichnet. Ganz ähnlich findet man auch den in Abb. 35 (S. 166) angegebenen Kern des Z-Profiles, für das man die Centralellipse nach den Angaben über die Trägheitsmomente ohne Weiteres auftragen kann.

14. Aufgabe. Centralellipse und Querschnittskern für eine hohle gusseiserne Säule von 20 cm äusserem Durchmesser und 2 cm Wandstärke zu bestimmen.

Lösung. Das Trägheitsmoment des ringförmigen Querschnitts für eine Schwerpunktsaxe ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4} (10^4 - 8^4) = 4635 \text{ cm}^4$$

und die Querschnittsfläche $F = 113 \text{ cm}^2$, woraus

$$t = \sqrt{\frac{4635}{113}} = 6,40 \text{ cm}$$

folgt. Die Centralellipse ist ein Kreis von diesem Radius. Auch der Querschnittskern wird hier durch einen Kreis begrenzt, dessen Radius k aus der Proportion

$$\frac{k}{6,4} = \frac{6,4}{10}, \quad \text{also } k = 4,1 \text{ cm}$$

folgt.

15. Aufgabe. Ein Balken (oder eine Tragaxe, wie man solche Stäbe im Maschinenbaue zu nennen pflegt), der an beiden Enden gestützt ist und eine Einzellast aufzunehmen hat, soll als Rotationskörper ausgeführt werden, so dass in jedem Querschnitte die zulässige Spannung des Materials erreicht wird. Nach welchem Gesetze muss der Meridianschnitt gekrümmt werden?

Lösung. Der Auflagerdruck am linken Ende betrage A ; dann ist das Biegemoment im Abstände x davon $M = Ax$ und die Spannung

$$\sigma = \frac{M}{W} = 4 \frac{Ax}{\pi r^3},$$

wenn r der Radius des Querschnittskreises ist. Die Spannung σ soll in allen Querschnitten gleich gross werden, daher muss auch

der Ausdruck auf der rechten Seite unabhängig von x sein und r wird dadurch als Function von x bestimmt. Man erhält

$$r = \sqrt[3]{\frac{4Ax}{\pi\sigma}}$$

als Gleichung der Meridiancurve. Man sieht daraus, dass das Längsprofil der Tragaxe durch eine cubische Parabel gebildet werden

muss, wenn die Tragaxe ein Körper von überall gleicher Festigkeit sein soll.

Die Aufgabe lässt sich natürlich noch mannigfach variiren, indem man etwa eine andere Querschnittsgestalt (z. B. eine rechteckige) oder eine andere Belastung (z. B. eine gleichförmig vertheilte) voraussetzt. In den elementaren Darstellungen der Festigkeitslehre pflegen diese

Aufgaben einen grossen Raum einzunehmen, da sie sich sehr leicht lösen lassen und auch sonst ganz niedlich sind. Eine erhebliche practische Bedeutung ist diesen Lösungen freilich nicht zuzusprechen, da kein Grund vorliegt, sich an die berechneten Formen genau zu halten.

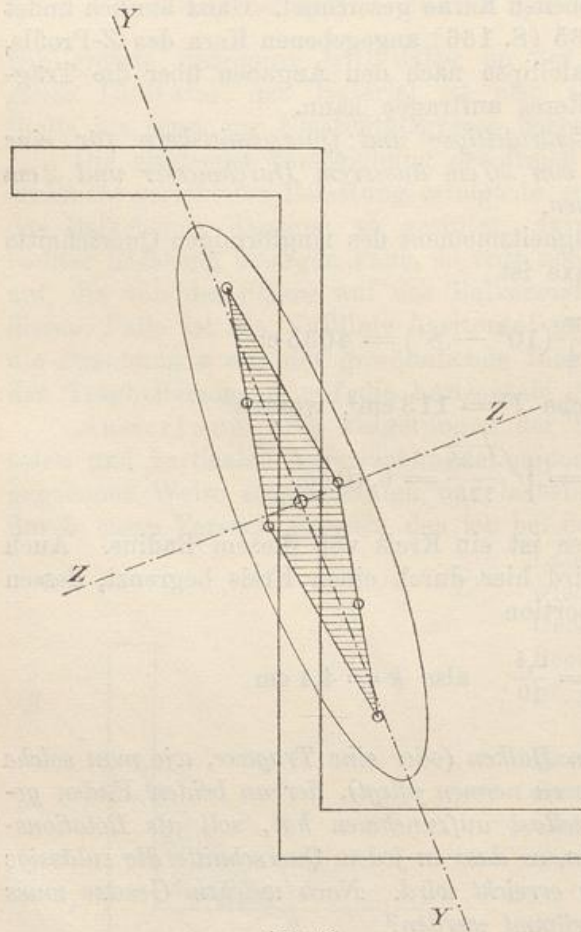


Abb. 35.

Die Gestalt einer Tragaxe setzt man z. B. aus Cylindern und abgestumpften Kegeln zusammen, wobei man sich freilich dem vorher berechneten Rotationskörper möglichst eng anzuschliessen sucht. Uebrigens ist die vorige Betrachtung insofern ungenau, als sie keine Rücksicht auf die Schubspannungen nimmt, die in der Nähe der Stützen das Uebergewicht über die Normalspannungen

erlangen. So würde für $x = 0$ nach der Formel $r = 0$ sein, der Querschnitt an der Stütze also bis auf Null abnehmen können. Das ist natürlich ein Trugschluss, denn der Querschnitt muss überall mindestens noch so gross bleiben, dass die Schubspannungen für sich genommen die zulässige Beanspruchung des Materials nicht überschreiten. Bei den Tragaxen ordnet man an den Enden Zapfen an, die von dem vorher bestimmten Umdrehungskörper unabhängig festgesetzt werden, d. h. man weicht hier von der „theoretischen“ (richtiger gesagt von der „ungenau-theoretischen“) Form so weit ab, um den bei deren Ableitung begangenen Fehler nachträglich zu verbessern.

16. Aufgabe. Ein I-Balken von bestehendem Querschnitte (Abb. 36) ist am einen Ende eingemauert und trägt an dem um 0,8 m vorkragenden Ende eine Belastung von 5000 kg. Man soll die grösste Spannung und die Anstrengung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche des Einspannungsquerschnitts berechnen.

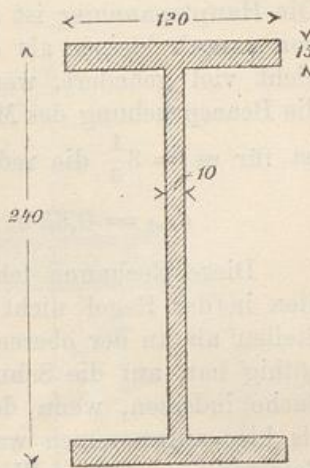


Abb. 36.

Lösung. Das Trägheitsmoment für die horizontale Axe berechnen wir, indem wir uns den Querschnitt durch Wegnahme von zwei Rechtecken aus dem umschriebenen Rechtecke entstanden denken, also

$$\Theta = \frac{12 \cdot 24^3}{12} - 2 \cdot \frac{5,5 \cdot 21^3}{12} = 5335 \text{ cm}^4.$$

Das statische Moment S des Flantschenquerschnitts für die horizontale Schwerpunktsaxe ist

$$S = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dF = 1,5 \cdot 12 \cdot 11,25 = 202,5 \text{ cm}^3.$$

Für die Normalspannungen σ im Einspannungsquerschnitte hat man

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y = \frac{5000 \cdot 80}{5335} \cdot y = 75 y.$$

Am oberen Rande ist $y = 12 \text{ cm}$ und daher $\sigma = 900 \text{ atm}$. Dagegen ist unmittelbar unter dem Flantsche $y = 10,5$ und $\sigma = 787 \text{ atm}$. Für diese Stelle berechnen wir auch die Schubspannung τ . Nach Gl. (74) findet man

$$\tau = \frac{VS}{b\Theta} = \frac{5000 \cdot 202,5}{1 \cdot 5335} = 190 \text{ atm.}$$

Aus σ und τ ergibt sich die Hauptspannung an dieser Stelle nach Gl. (12)

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = \frac{787}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{380^2 + 787^2} = 830 \text{ atm.}$$

Die Hauptspannung ist also an dieser Stelle trotz des Hinzutretens von τ noch kleiner als σ an der oberen Kante. Daran wird auch nicht viel geändert, wenn man die reducirte Spannung, von der die Beanspruchung des Materials abhängt, berechnet. Nach Gl. (39) ist für $m = 3\frac{1}{3}$ die reducirte Spannung

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \sigma_x + 0,65 \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = 844 \text{ atm.}$$

Diese Rechnung lehrt, dass man in der That auch bei I-Profilen in der Regel nicht nöthig hat, die Spannungen an anderen Stellen als an der oberen Kante zu berechnen, also überhaupt nicht nöthig hat, auf die Schubspannungen zu achten. Anders wird die Sache indessen, wenn der Hebelarm der Kraft noch kleiner wird, als hier angenommen war. Denn τ behält dann — bei gleicher Belastung — seinen Werth, während σ abnimmt und man kommt dann bald zu einem Hebelarme, bei dem die Beanspruchung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche grösser wird als an der äusseren Kante.

Schliesslich sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese ganze Betrachtung nur einen Anspruch auf ungefähre Gültigkeit machen kann, denn Gl. (74) ist aus einer recht unsicheren Voraussetzung über die Vertheilung der Spannungen τ abgeleitet, die gerade an der Stelle unmittelbar unter dem Flantsche des I-Profiles keineswegs genau zutreffen kann. Man sieht aber auch, dass diese Formel in der That nur zu einer mehr schätzungsweisen Bestimmung des Ortes der grössten Beanspruchung gebraucht wird. Gegen einen solchen Gebrauch lässt sich nichts einwenden.

17. Aufgabe. Die Vertheilung der Schubspannungen τ über einen kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Man hat zunächst das statische Moment S des in Abbildung 37 schraffirten Kreisabschnitts zu berechnen. Wegen $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ hat man

$$\int y dF = 2 \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2} dy.$$

Allgemein ist aber

$$\int y \sqrt{r^2 - y^2} dy = -\frac{1}{3} \sqrt{(r^2 - y^2)^3},$$

wovon man sich durch Differentiation leicht überzeugt. Nach Einsetzen der Grenzen wird daher

$$\int y dF = \frac{2}{3} \sqrt{(r^2 - u^2)^3} = \frac{b^3}{12},$$

wenn mit b die Länge der Sehne im Abstände u vom Mittelpunkte bezeichnet wird, für den man die Schubspannung berechnen will.

Nach Gl. (74) wird jetzt

$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{12\Theta} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}.$$

Die Komponente τ_{xz} bestimmt sich am Umfange aus der Bedingung, dass die resultierende Spannung in die Richtung der Tangente fällt. Daraus folgt

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{u}{\frac{1}{2}b};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \cdot \frac{2u}{b} = \frac{2Vub}{3\pi r^4},$$

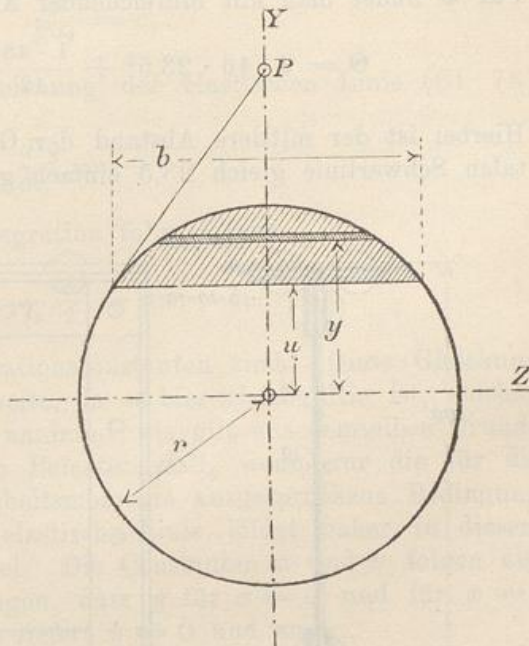


Abb. 37.

und für die resultierende Spannung τ selbst erhält man nach dem Pythagoräischen Satze

$$\tau = \frac{Vb}{3\pi r^4} \cdot \sqrt{b^2 + 4u^2} = \frac{2Vb}{3\pi r^3}.$$

Die Schubspannungen nehmen, wie man hieraus erkennt, ihren grössten Werth in der Mitte an. Dort wird $b = 2r$ und daher

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3\pi r^2},$$

d. h. die grösste Schubspannung verhält sich zu der durchschnittlichen Schubspannung, die bei gleichförmiger Vertheilung über den ganzen Querschnitt überall zu Stande käme, wie 4 zu 3.

18. Aufgabe. Wie viel Schubkraft hat ein Niet N am Ende des unten gezeichneten Blechbalkens aufzunehmen, wenn der Auflagerdruck 6000 kg beträgt?

Lösung. Nach Gl. (75) ist

$$P = \frac{Ve}{\Theta} S.$$

Für Θ findet man mit hinreichender Annäherung

$$\Theta = 2 \cdot 46 \cdot 23,5^2 + \frac{1 \cdot 48^3}{12} = 60022 \text{ cm}^4.$$

Hierbei ist der mittlere Abstand der Gurtfläche von der horizontalen Schwerlinie gleich 23,5 einfach geschätzt, wobei freilich die

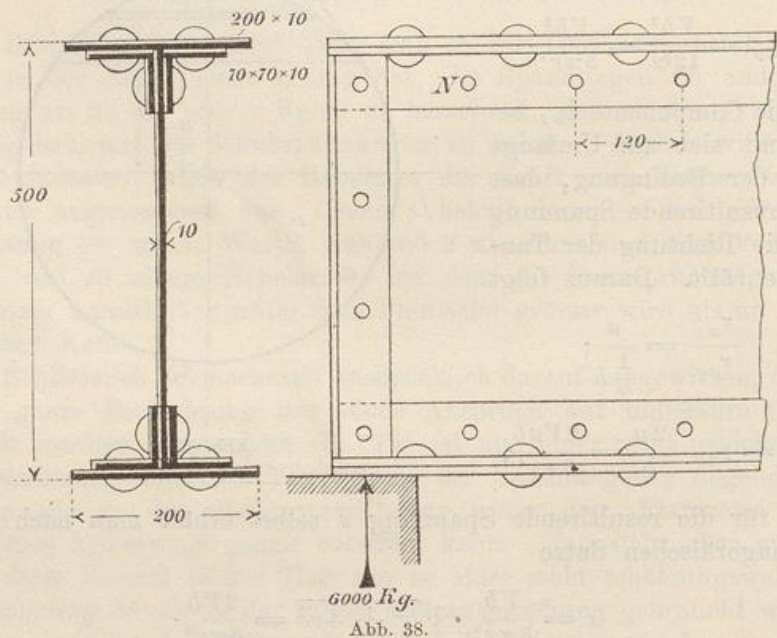


Abb. 38.

Decimalstelle ganz unsicher ist. Für Rechnungen dieser Art genügt aber die dadurch gegebene Genauigkeit gewöhnlich vollauf; andernfalls muss Θ in der früher besprochenen Weise berechnet werden. Für S hat man ebenso

$$S = 46 \cdot 23,5 = 1081 \text{ cm}^3.$$

Hiermit folgt, da $V = 6000 \text{ kg}$ und $e = 12 \text{ cm}$ ist,

$$P = \frac{6000 \cdot 12}{60000} \cdot 1081 = 1300 \text{ kg,}$$

eine Kraft, die sich auf zwei Scheerflächen des Niets vertheilt.

19. Aufgabe. Wie ändert sich der Werth des Biegungspfeiles f in Gl. (82), wenn Θ nicht constant, sondern überall proportional dem Biegemomente M ist?

Lösung. Setzt man

$$\frac{M}{E\Theta} = c,$$

so geht die Differentialgleichung der elastischen Linie (Gl. 78) über in

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -c$$

und durch zweimalige Integration folgt daraus

$$y = -\frac{cx^2}{2} + ax + b,$$

wenn a und b die Integrationsconstanten sind. Diese Gleichung gilt für die ganze Spannweite, da es hier gleichgültig ist, welchen Werth M an jeder Stelle annimmt; sie gilt aus demselben Grunde auch für jeden beliebigen Belastungsfall, wenn nur die für die Veränderlichkeit des Trägheitsmoments ausgesprochene Bedingung überall erfüllt ist. Die elastische Linie bildet daher in diesem Falle eine gemeine Parabel. Die Constanten a und b folgen aus den beiden Grenzbedingungen, dass y für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden muss. Dies liefert $b = 0$ und aus

$$0 = -\frac{cl^2}{2} + al \text{ folgt } a = \frac{cl}{2}.$$

Hiermit wird

$$y = \frac{c}{2}(lx - x^2)$$

und der Biegungspfeil f für die Balkenmitte folgt daraus mit $x = \frac{l}{2}$

$$f = \frac{cl^2}{8}.$$

Werden das Biegemoment und das Trägheitsmoment in der Balkenmitte durch Anhängen des Zeigers m gekennzeichnet, so folgt durch Einsetzen des Werthes von c

$$f = \frac{M_m}{E\Theta_m} \cdot \frac{l^2}{8}.$$

Speziell für den Belastungsfall, zu dem Gl. (82) gehörte, ist $M_m = \frac{Pl}{4}$ und daher

$$f = \frac{Pl^3}{32E\Theta_m}.$$

Wäre das Trägheitsmoment nicht veränderlich, sondern überall gleich Θ_m , so würde an Stelle dieses Werthes der in Gl. (82) gegebene treten, d. h. der Factor 32 im Nenner wäre durch 48 zu ersetzen. Der Biegungspfeil ist daher hier um 50% grösser als bei constantem Trägheitsmomente.

Die Voraussetzung, dass Θ proportional mit M sein soll, wird näherungsweise erfüllt bei einem Blechträger, dessen Querschnitt nach der Mitte hin durch Aufnieten von Platten verstärkt wird, so dass überall ungefähr dieselbe Spannung σ auftritt. Die Trägerhöhe wird nämlich durch das Aufnieten der Platten nicht erheblich geändert, so dass in der That die Spannung $\sigma = \frac{M}{\Theta}y$ überall ungefähr dem Verhältnisse $\frac{M}{\Theta}$ proportional ist.

20. Aufgabe. Die Constante κ der Gl. (83) für den kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Nach Gl. (84) ist

$$\kappa = \frac{F \int \tau^2 dF}{V^2}.$$

Beim kreisförmigen Querschnitte war in Aufgabe 17

$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}$$

gefunden. Achtet man bei der Berechnung von κ nur auf die zur Lastrichtung parallele Componente τ_{xy} der Schubspannung, so wird demnach bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie in Abb. 37

$$\kappa = \pi r^2 \cdot \int \frac{b^4}{9\pi^2 r^8} dF.$$

Zur Ermittlung des Momentes vierten Grades der Querschnittsfläche $\int b^4 dF$ setzen wir

$$\int b^4 dF = 32 \int_{-r}^{+r} z^5 dy = 64 \int_0^r (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy.$$

Nun ist allgemein

$$\int (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy = \frac{8(r^2 - y^2)^2 + 10r^2(r^2 - y^2) + 15r^4}{48} y\sqrt{r^2 - y^2} + \frac{5}{16} r^6 \arcsin \frac{y}{r}.$$

Setzt man die Grenzen ein, so wird daher

$$\int b^4 dF = 10\pi r^6$$

und hiermit endlich

$$z = \frac{10}{9}.$$

In ähnlicher Weise kann z auch unter Berücksichtigung der zweiten Componente τ_{xz} von τ berechnet werden; es wird dann etwas grösser gefunden. In jedem Falle handelt es sich indessen, wie schon früher bemerkt wurde, nur um eine Abschätzung des Werthes, die auf besondere Genauigkeit keinen Anspruch macht.

21. Aufgabe. Ein durchlaufender Balken überdeckt drei Oeffnungen von gleicher Grösse und ist gleichförmig belastet; man soll die Auflagerkräfte berechnen.

Lösung. Der Symmetrie wegen ist der Druck auf jede der beiden Mittelstützen gleich gross, er sei mit C bezeichnet. Der Auflagerdruck A am linken Trägerende ist dann $A = \frac{3ap}{2} - C$, wenn p die Last für die Längeneinheit und a die Weite einer Oeffnung bedeuten.

In der ersten Oeffnung hat man

$$M = x \left(\frac{3ap}{2} - C \right) - \frac{px^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie wird daher für diesen Ast

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + x \left(C - \frac{3ap}{2} \right)$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + \frac{x^2}{2} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + K,$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + \frac{x^3}{6} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + Kx + K'.$$

Wegen $y = 0$ für $x = 0$ hat man $K' = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = a$ folgt

$$0 = \frac{pa^4}{24} + \frac{a^3}{6} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + Ka \quad \text{oder} \quad K = \frac{5pa^3}{24} - C \frac{a^2}{6}.$$

In der zweiten Oeffnung ist

$$M = (x + a) \left(\frac{3ap}{2} - C \right) + Cx - p \frac{(a + x)^2}{2} = \frac{pax}{2} + pa^2 - Ca - \frac{px^2}{2},$$

wenn hier die Abscissen x von der Mittelstütze aus gerechnet werden. Die Differentialgleichung für den Mittelast der elastischen Linie lautet daher

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + Ca - \frac{pax}{2} - pa^2$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + Cax - \frac{pax^2}{4} - pa^2x + K''$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + Ca \frac{x^2}{2} - \frac{pax^3}{12} - \frac{pa^2x^2}{2} + K''x + K'''.$$

Für $x=0$ und für $x=a$ verschwindet wieder y und daraus folgt $K'''=0$ und

$$0 = \frac{pa^4}{24} + C \frac{a^3}{2} - p \frac{a^4}{12} - p \frac{a^4}{2} + K''a \text{ oder } K'' = \frac{13}{24}pa^3 - C \frac{a^2}{2}.$$

Wir haben jetzt noch die Bedingung, dass sich die beiden Aeste der elastischen Linie an der Mittelstütze ohne Knick aneinander schliessen müssen. Dazu gehört, dass $\frac{dy}{dx}$ für $x=a$ im ersten Aste gleich $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ im zweiten Aste wird. Dies liefert die Gleichung

$$\frac{pa^3}{6} + \frac{a^2}{2} \left(C - \frac{3ap}{2} \right) + K = K''$$

oder nach Einsetzen der Werthe von K und K''

$$\frac{a^2}{2} C - \frac{7}{12}pa^3 + \frac{5}{24}pa^3 - C \frac{a^2}{6} = \frac{13}{24}pa^3 - C \frac{a^2}{2}.$$

In dieser Gleichung ist C die einzige Unbekannte. Die Auflösung liefert

$$C = \frac{11}{10}pa.$$

Auf jede Mittelstütze kommt also um 10% mehr als die Last einer Oeffnung. Da die gesammte Belastung des Trägers $3pa$ beträgt, bleibt für den Druck auf jede Endstütze $0,4pa$.

22. Aufgabe. Ein im Grundrisse rechteckig gestalteter Raum wird von zwei sich in der Mitte kreuzenden und an dieser Stelle miteinander verbundenen Trägern mit den Ordnungsnummern 1 und 2 überdeckt. An der Kreuzungsstelle ist eine Last P aufgehängt; wie viel kommt davon auf jeden Träger?

Lösung. Der Biegungspfeil f in der Mitte muss für beide Träger gleich sein. Nimmt der erste Träger den Antheil C , der

andere also $P - C$ der ganzen Last auf, so hat man die Bedingungsgleichung

$$\frac{Cl_1^3}{48E\theta_1} = \frac{(P - C)l_2^3}{48E\theta_2},$$

woraus

$$C = P \frac{l_2^3 \theta_1}{l_1^3 \theta_2 + l_2^3 \theta_1}$$

folgt. — Ganz ähnlich lässt sich die Aufgabe auch für den Fall lösen, dass sich die Träger nicht in der Mitte, sondern an irgend einer anderen Stelle kreuzen. An Stelle von f ist dann die zur betreffenden Abscisse gehörige Ordinate y der elastischen Linie jedes Trägers einzusetzen.