Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 4. Das ebene Problem.

unvergleichlich viel leichter finden, auch die allgemeinsten Fälle beherrschen zu lernen, als es ihm anfänglich wurde, den allereinfachsten Darlegungen zu folgen. Ich sehe mich hier zu dieser Bemerkung veranlasst, weil ich verhindern möchte, dass der Leser, dem die vorausgegangenen Untersuchungen Schwierigkeiten machten, den Muth zu schnell sinken lässt. Wer das Vorausgegangene hinreichend oft durchgelesen und durchgedacht hat, wird bald alle Schwierigkeiten der Vorstellung überwunden haben.

§ 4. Das ebene Problem.

Bisher haben wir den allgemeinsten Fall des Spannungszustandes untersucht, der überhaupt in einem Körper auftreten kann. Die Fälle, mit denen man praktisch zu thun bekommt, sind aber gewöhnlich viel einfacher. Aus diesem Grunde und aus einem anderen, der kurz vorher erwähnt wurde, wollen wir die weitere Untersuchung an dieser Stelle auf den Fall des sogenannten ebenen Problems beschränken. Man versteht darunter einen Spannungszustand, bei dem nach einer bestimmten Richtung hin überhaupt keine Spannungscomponenten auftreten. Um diesen Fall weiter zu untersuchen, wollen wir uns das Coordinatensystem so gewählt denken, dass die Z-Axe in die soeben bezeichnete Richtung fällt. Der Fall des ebenen Problems wird dann durch die Aussagen

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \tag{8}$$

gekennzeichnet. Von den sechs Spannungscomponenten, die im Allgemeinen zur Beschreibung des Spannungszustandes erforderlich sind, unterscheiden sich demnach hier nur noch drei von Null, nämlich σ_x, σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, wofür wir jetzt, da keine Verwechslung mehr möglich ist, kurz τ schreiben können.

Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, wie man beim ebenen Problem die Schnittrichtung wählen muss, damit die Spannungen ihre grössten Werthe annehmen. Dabei genügt es, nur solche Schnittrichtungen in Betracht zu ziehen, die parallel zur Z-Axe gehen. Wir denken uns ein dreiseitiges Prisma abgegrenzt, dessen Grundfläche in Abb. 5 angegeben ist, während die zur Z-Axe parallelen Kanten die Längen dz haben mögen. Auf die beiden Grundflächen wirken nach den Gleichungen (8) überhaupt keine Kräfte. Die Spannungs-Componenten an den drei Seitenflächen sind in die Abbildung nach jenen Richtungen eingetragen, die als positiv gerechnet werden. Die Spannung auf der unter dem Winkel φ gegen die X-Axe geneigten Seitenfläche ist in die Normalcomponente σ' und die Schubspannung τ' zerlegt. Die letzte kann ebenfalls keine Componente in der Richtung der Z-Axe haben, weil an den übrigen Seitenflächen keine Kraft in dieser Richtung, die mit ihr Gleichgewicht halten könnte, vorkommt; sie ist also ebenso wie σ' und alle übrigen Spannungen parallel zur XY-Ebene.

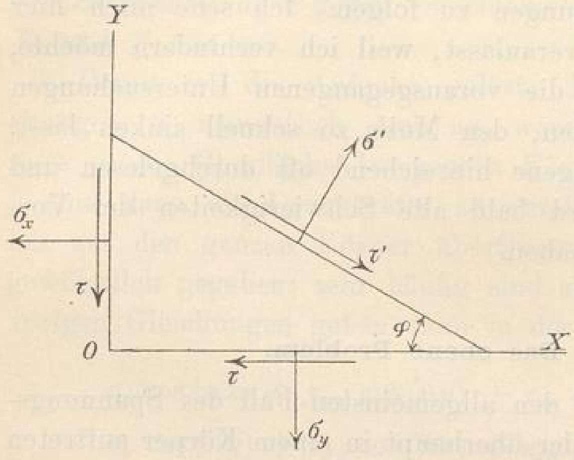

Abb. 5.

Das Gleichgewicht der Kräfte gegen Verschieben nach der X-Axe liefert, wenn wir den Inhalt der schief zu den Axen stehenden Seitenfläche mit dF bezeichnen, die Bedingungsgleichung

$$\sigma' dF \sin\varphi + \tau' dF \cos\varphi - \sigma_x dF \sin\varphi - \tau dF \cos\varphi = 0,$$

aus der man den gemeinsamen Faktor dF wegheben kann. Ebenso liefert die Componentengleichung für die Richtung der Y-Axe

$$\sigma' \cos\varphi - \tau' \sin\varphi - \sigma_y \cos\varphi - \tau \sin\varphi = 0.$$

Beide Gleichungen lösen wir nach den Unbekannten σ' und τ' auf. Durch Multiplication der ersten Gleichung mit $\sin\varphi$, der zweiten mit $\cos\varphi$ und Addition erhält man zunächst

$$\sigma' = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi + 2\tau \sin\varphi \cos\varphi .$$

Bequemer ist es für das Folgende, diesen Ausdruck dadurch noch etwas umzugestalten, dass man den doppelten Winkel einführt, also z. B.

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

setzt. Dadurch geht der vorige Werth über in

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi . \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

In der zweiten Gleichung ist der Werth von τ' angegeben, der auf dieselbe Weise erhalten wird. Die Spannungscomponenten σ' und τ' sind damit als Functionen des Winkels φ gefunden, den wir uns veränderlich denken können, wodurch wir zu allen Schnittrichtungen gelangen, die zur XY-Ebene senkrecht stehen. Um die Maximalwerthe zu finden, differentiiren wir zunächst σ' nach φ und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Aus der so entstandenen Gleichung

$$0 = -\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot 2 \sin 2\varphi + 2\tau \cos 2\varphi \quad (10)$$

erhalten wir zunächst $\operatorname{tg} 2\varphi$ und daraus auch φ selbst, nämlich

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} + n\frac{\pi}{2}, \quad (11)$$

wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Durch die Zufügung eines Vielfachen von π wird nämlich der Werth von $\operatorname{tg} 2\varphi$ nicht geändert; man kann also $n\pi$ beliebig zu 2φ und daher $n\frac{\pi}{2}$ beliebig zu φ addiren, ohne die Bedingung für ein Maximum oder Minimum von σ' zu ändern.

Die rechte Seite von Gl. (10) stimmt genau mit dem doppelten Werthe von τ' in Gl. (9) überein. Wir erkennen daraus, dass σ' in jenen Schnittflächen seinen grössten oder kleinsten Werth annimmt, für die τ' verschwindet. Zugleich folgt aus Gl. (11), dass dies immer mindestens in zwei Schnittflächen zutrifft, die aufeinander senkrecht stehen (für die sich φ um einen rechten Winkel unterscheidet). Daneben ist nur noch ein Ausnahmefall möglich, der dann eintritt, wenn $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ war. Dann ist auch für alle anderen Schnittrichtungen $\tau' = 0$ und σ' ist unabhängig von φ, d. h. für alle Schnittrichtungen gleich gross.

Von diesem Ausnahmefalle abgesehen, kommen aber beim ebenen Probleme immer nur zwei, aufeinander senkrechte und zur Z-Axe parallele Schnittrichtungen vor, für die τ verschwindet, auf denen also die gesammte Spannung senkrecht steht und für die zugleich σ' seinen kleinsten und seinen grössten Werth annimmt. Man nennt jene Richtungen die Hauptrichtungen und die zugehörigen Spannungen die Hauptspannungen des Körpers an der betreffenden Stelle.

Es mag hierbei erwähnt werden, dass man dieselbe Betrachtung auch für den allgemeinsten Spannungszustand in gleicher Weise durchführen kann. Die Rechnung wird dann erheblich länger, spielt sich aber sonst genau so ab, wie wir es eben sahen. Man findet dabei, dass im Allgemeinen drei Schnittrichtungen vorkommen, für die die Schubspannungen wegfallen, und dass alle drei wechselseitig aufeinander senkrecht stehen. In der That kann beim ebenen Problem die XY-Ebene als dritte Schnittrichtung angesehen werden, bei der keine Schubspannung übertragen wird. Freilich ist für diesen Schnitt auch die Normalspannung gleich Null und man kann den Fall des ebenen Problems daher auch dahin definiren, dass es jener Spannungszustand ist, für den eine Hauptspannung zu Null wird.

Die Grösse der Hauptspannungen findet man aus Gl. (9) durch Eintragen des durch Gl. (10) oder (11) bestimmten

Werthes von φ. Am einfachsten ist es, zuerst Gl. (10) nach $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ aufzulösen. Man erhält dann

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}.$$

Aus Gl. (9) findet man dann weiter

$$\sigma'_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 2\tau^2}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}$$

und, wenn man beachtet, dass im letzten Bruche der Zähler die Hälfte vom Quadrate des Nenners bildet, kürzer

$$\sigma'_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \tag{12}$$

Dass der eine Werth ein Maximum, der andere ein Minimum liefert, kann auf gewöhnlichem Wege durch Bilden des zweiten Differentialquotienten von σ' nach φ nachgewiesen werden; es folgt aber auch schon daraus, dass jede stetige Funktion des Winkels φ, die nicht constant ist, bei einmaligem Umlaufe des ganzen Kreises mindestens ein Maximum und ein Minimum haben muss.

Wenn $\tau = 0$ ist, fallen die Richtungen der Coordinatenaxen mit den Hauptrichtungen zusammen und $\sigma_x \sigma_y$ sind selbst die Hauptspannungen. Einander gleich können die Hauptspannungen nur dann werden, wenn zugleich $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ ist. Dann kann jede Richtung in der XY-Ebene als Hauptrichtung angesehen werden.

Wir wenden uns jetzt zur Ermittelung der Maximalwerthe der Schubspannungscomponente τ'. Aus Gl. (9) erhalten wir

$$\frac{d\tau'}{d\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2 \cos 2\varphi - 2\tau \sin 2\varphi.$$

Die Bedingung für ein Maximum oder Minimum wird daher ausgesprochen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \tag{13}$$

Dieser Werth ist das Negative der Cotangente von 2φ, die aus der Bedingungsgleichung (10) gefunden wird. Daraus folgt, dass der nach Gl. (13) bestimmte Winkel sich von dem aus Gl. (10) abgeleiteten um einen Rechten oder um $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet. Die Winkel φ selbst, für die einerseits σ' und andererseits τ' die Maximal- oder Minimalwerthe annehmen, unterscheiden sich demnach um $\frac{\pi}{4}$. Die grössten Schubspannungen erhält man also für solche Schnittrichtungen, die mit den Hauptrichtungen Winkel von 45^0 einschliessen. Beachtenswerth ist, dass die Normalspannungen auf diesen Ebenen im Allgemeinen nicht verschwinden, wie man auf Grund des Vorausgegangenen hätte vermuthen können. Setzt man 2φ aus Gl. (13) in die erste der Gl. (9), so findet man für die zugehörige Normalspannung $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, und dieser Werth gilt für jede der beiden zu einander senkrechten Schnittebenen, auf denen τ' zum Maximum oder Minimum wird. Nur wenn $\sigma_x = -\sigma_y$ ist, wird diese Normalspannung zu Null.

Aus Gl. (13) folgt

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}},$$

und wenn man diese Werthe in die zweite der Gleichungen (9) einsetzt, erhält man

$$\tau'_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \tag{14}$$

Die beiden Werthe $\tau'_{\max}$ und $\tau'_{\min}$ unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen von einander. Dieses Ergebniss ist, soweit es sich um die absoluten Grössen handelt, selbstverständlich nach dem in den Gleichungen (4) ausgesprochenen Satze über die Gleichheit der in senkrechten Schnittflächen einander zugeordneten Schubspannungen. Die Vorzeichen dagegen sind in Gleichung (14) gleichgültig, da sie nur durch die willkürliche Festsetzung darüber bedingt sind, in welcher Richtung τ' als positiv gerechnet werden sollte.

§ 5. Der lineare Spannungszustand.

So wie der im vorigen Paragraphen untersuchte ebene Spannungszustand einen besonderen Fall des allgemeinsten Spannungszustandes bildet, kann man einen noch einfacheren Spannungszustand aus dem vorigen dadurch ableiten, dass man nochmals eine der beiden Hauptspannungen gleich Null setzt. Man nehme etwa an, dass die Coordinatenaxen schon von vornherein in die Hauptrichtungen gelegt gewesen seien, setze also $\tau = 0$ und, um auf den linearen Spannungszustand zu kommen, ausserdem noch $\sigma_y = 0$. Die Gleichungen (9) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_x \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \sigma_x \sin^2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi \end{aligned}\right\} . \qquad (15)$$

Dieser Spannungszustand kommt z. B. vor in der Mitte einer Zugstange, falls sich die Spannkraft gleichmässig über den Querschnitt vertheilt oder (unter der gleichen Voraussetzung) in einem Steinwürfel, der einem Druckversuche ausgesetzt wird. Wir merken uns für diesen Fall, dass nach der zweiten der Gleichungen (15) bei ihm die grösste Schubspannung halb so gross ist als die Zug- oder Druckspannung in der Hauptrichtung.

Den ebenen Spannungszustand kann man sich durch das Zusammenwirken von zwei linearen Spannungszuständen hervorgebracht 'denken, deren Hauptrichtungen rechtwinklig zu einander stehen. Ebenso kann auch der allgemeinste Spannungszustand auf drei rechtwinklig zu einander stehende einfache Zug- oder Druckbeanspruchungen, also auf drei nebeneinander auftretende lineare Spannungszustände zurückgeführt werden.

§ 6. Die Spannungsellipse.

Man denke sich beim ebenen Spannungszustande alle möglichen zur Z-Axe parallelen Schnittrichtungen gelegt und die zugehörigen Spannungscomponenten σ' und τ' nach Gl. (9)