Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Gleichgewicht gegen Verschieben.

zustände möglich sind, oder dass die Reihe aller Spannungszustände eine Mannigfaltigkeit von sechs Dimensionen bildet.

Wir wollen jetzt noch das Gleichgewicht des Parallelepipeds gegen Verschieben in den drei Axenrichtungen betrachten. Dieses wird schon durch das Gesetz der Action und Reaction verbürgt, wenn wir auf die sehr kleinen Unterschiede der Spannungen an gegenüberliegenden Seitenflächen keine Rücksicht nehmen, wie es bei der vorigen Betrachtung geschehen konnte. Wir wollen aber dabei nicht stehen bleiben, weil wir bei dieser Gelegenheit noch erfahren können, in welchen Beziehungen die Zuwüchse der Spannungscomponenten bei verschiedenen Fortschreitungsrichtungen zu einander stehen müssen. Natürlich ist es jetzt, wo wir nur auf die kleinen Unterschiede der Spannungen auf gegenüberliegenden Flächen zu achten haben, nicht mehr zulässig, die dem Volumen des Parallelepipeds proportionale Fernkraft, also etwa das Gewicht des Körperchens, zu vernachlässigen. Dieses ist zwar unendlich klein gegen die Spannungen selbst, aber durchaus vergleichbar mit den kleinen Unterschieden zwischen den Spannungen auf gegenüberliegenden Seiten. Ich denke mir die auf die Raumeinheit bezogene Massenkraft in drei Componenten nach den Coordinatenaxen zerlegt, die ich mit $X\ Y\ Z$ bezeichne und positiv rechne, wenn sie mit den positiven Axen gleichgerichtet sind.

In der Richtung der X-Axe kommen jetzt an dem Körperchen sieben Kräfte vor, deren Summe gleich Null sein muss, damit das Gleichgewicht gesichert ist. An jeder Seitenfläche des Parallelepipeds haben wir eine zur X-Axe parallele Spannungscomponente, und dann kommt die Componente der Massenkraft im Betrage $X\,dx\,dy\,dz$. Die Spannungscomponenten kann man paarweise zusammenfassen. Auf dem durch den Punkt O gehenden, zur X-Axe senkrechten Rechtecke haben wir die Componente σ_x der specifischen Spannung, also im Ganzen den Betrag $\sigma_x \cdot dy\,dz$ einer Kraft, die der positiven X-Axe entgegengesetzt gerichtet ist. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommt dazu die um ein Differential verschiedene und nach der positiven X-Axe hin gerichtete Normalspannung. Fassen wir beide zusammen, so behalten wir einen Ueberschuss von der Grösse

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\, dy\, dz$$

in der Richtung der positiven X-Axe. Ebenso tragen die beiden zur Y-Axe senkrechten Seitenflächen zusammen genommen das Glied

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dx\, dy\, dz$$

zur Componentensumme in der Richtung der X-Axe bei und ähnlich die beiden letzten Seitenflächen. Schreiben wir nun die Bedingung an, dass die algebraische Summe aller parallel zur X-Axe gehenden Componenten verschwinden muss, so erhalten wir nach Wegheben des gemeinsamen Faktors $dx\, dy\, dz$ die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die beiden letzten sind ebenso gebildet, wie die erste, die wir eben ableiteten, und sprechen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y- und der Z-Axe aus. Es ist zwar nützlich, sie zur Uebung ebenfalls aus Abb. 3 abzulesen, aber nicht nothwendig, da keine Coordinatenaxe vor den anderen etwas voraus hat und was für die eine bewiesen ist, daher auch für die anderen gelten muss. Es genügt daher vollständig, sich davon zu überzeugen, dass die beiden anderen Gleichungen aus der ersten hervorgehen, wenn man die Coordinaten $x\ y\ z$ cyclisch miteinander vertauscht.

§ 3. Das Gleichgewicht am Tetraëder.

Wir wollen jetzt die am Schlusse von § 1 in allgemeinen Umrissen angestellte Betrachtung auch noch in einen Satz von Gleichungen umprägen. Dazu beziehe ich mich auf Abb. 4, in der das Tetraëder in Aufriss und Grundriss gezeichnet ist. Als gegeben werden die Spannungscomponenten betrachtet, die zu den Stellungen der drei Coordinatenebenen gehören; verlangt wird die Berechnung der Spannungscomponenten auf der in beliebiger Stellung gezogenen vierten Tetraëderfläche, deren äussere Normale mit n bezeichnet ist. Es ist am bequemsten, die Spannung für diese Fläche, die mit p_n bezeichnet werden möge, zunächst in drei Componenten zu zerlegen, die den Coordinatenaxen parallel laufen. In der Abbildung sind diese Componenten mit $p_{nx}\ p_{ny}\ p_{nz}$ bezeichnet; die Zeiger haben also dieselbe Bedeutung wie bei den früheren Betrachtungen. Nachdem diese Componenten gefunden sind, kann man leicht auch die Normalspannung σ_n und die in gegebenen Richtungen verlaufenden Schubspannungscomponenten daraus ableiten, wenn sich dies als nöthig herausstellt.

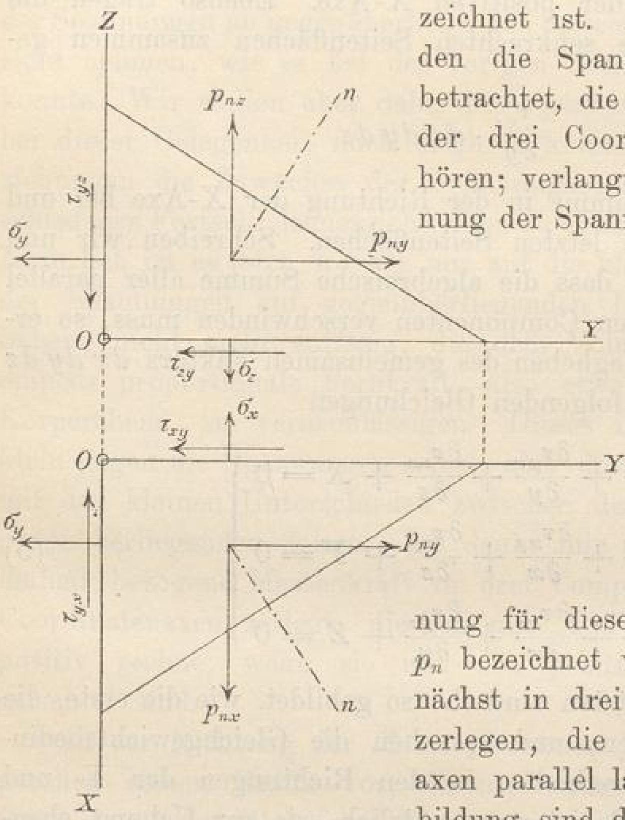

Abb. 4.

Die Fläche der vierten Tetraëderseite sei gleich dF; die Flächen der drei anderen bilden die Projectionen von dF auf die Coordinatenebenen und werden daher aus dF durch Mul-