Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 2. Gleichgewichtsbedingungen zwischen des Spannungscomponenten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-84594

die Spannungen an solchen kleinen Stücken unmittelbar miteinander zu vergleichen, braucht man daher in erster Linie auf das Eigengewicht keine Rücksicht zu nehmen. Erst dann, wenn man etwa auf sehr kleine Unterschiede achten will, die dadurch bedingt werden, dass man um ein kleines Stück in einer gewissen Richtung weiter geht, wird es nöthig, auch auf die den Massen proportionalen Kräfte zu achten.

Mit Rücksicht auf diese Erwägungen bleibt daher nur noch das Gleichgewicht der Spannungen an den vier Seitenflächen des Tetraëders für sich genommen zu untersuchen. Das Gleichgewicht erfordert, dass die geometrische Summe dieser vier Spannungen gleich Null ist. Wenn drei Spannungen gegeben sind, folgt daher Grösse und Richtung der vierten durch Zeichnen eines windschiefen Kräftevierecks oder nach dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte oder nach irgend einer anderen Methode der gewöhnlichen Statik.

Die genannte Bedingung genügt freilich noch nicht, um das Gleichgewicht eines Körpers unter der Wirkung dieser vier Kräfte sicher zu stellen. Dazu gehört noch, dass sich die vier Richtungen entweder in einem Punkte schneiden oder dass wenigstens auf andere Art auch ein Gleichgewicht gegen Drehung gesichert ist. Dies weist uns darauf hin, dass schon die Spannungen auf drei gegebenen Flächenelementen dF gewisse Bedingungen erfüllen müssen, wenn sie überhaupt miteinander verträglich sein sollen. Man kann diese Bedingungen ohne Schwierigkeit für das Tetraëder ableiten, indem man Momentengleichungen anschreibt. Wir wollen aber dazu einen bequemeren Weg wählen, indem wir an Stelle des Tetraëders ein unendlich kleines Parallelepiped betrachten.

§ 2. Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungscomponenten.

Wir sahen vorher, dass der Spannungszustand, in dem sich der Körper an einer gewissen Stelle befindet, durch Angabe der Spannungscomponenten für drei beliebige Flächenelemente von verschiedener Stellung, die man durch den gegebenen Punkt legen kann, eindeutig beschrieben wird. Es steht uns frei, diese Flächenelemente so auszuwählen, wie es für die weitere Untersuchung am bequemsten ist. Dieser Umstand weist uns von selbst auf die Benutzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems hin. In der Festigkeitslehre wird nicht viel damit gewonnen, wenn man an Stelle von Coordinaten oder Componenten mit den gerichteten Grössen selbst rechnet, was in den meisten übrigen Theilen der Mechanik von Vortheil ist. Ich werde daher hier überall der ohnehin bekanntesten Cartesischen Methode, der Untersuchung mit Coordinaten und Componenten den Vorzug geben und nur ganz gelegentlich einmal auf die andere Art der Darstellung hinweisen.

In Abb. 3 sei O der Punkt des Körpers, für den der Spannungszustand untersucht werden soll. Er möge die Ecke eines unendlich kleinen Parallelepipeds bilden, dessen aufeinander senkrecht stehende Kanten in die Richtungen der Coordinatenaxen OX, OY, OZ gelegt sind. Unendlich klein müssen wir uns das Parallelepiped wieder deshalb denken, weil sonst die Spannungen an verschiedenen Stellen der von O ausgehenden Seitenflächen merklich von einander abweichen könnten. So aber können wir ohne in Betracht kommenden Fehler annehmen, dass die Spannungen über jede Seitenfläche gleichmässig vertheilt sind. Die Resultirende der Spannungen für jede Seitenfläche geht dann auch durch deren Schwerpunkt, also durch die Mitte, und die Grösse ist nach Gleichung (3) gleich dem Produkte aus der specifischen Spannung für die betreffende Flächenstellung und dem Inhalte des Rechtecks.

Die Normalspannungen gehen auf allen Seitenflächen schon von selbst in den Richtungen der Coordinatenaxen, und auch die Schubspannungen wollen wir uns an jeder Fläche in zwei Componenten zerlegt denken, die in die Richtungen der Coordinatenaxen fallen. Wir haben dann an den sechs Seitenflächen des abgegrenzten Körperstücks zusammen 18 Spannungscomponenten, deren Gleichgewicht zu untersuchen ist, denn in erster Annäherung brauchen wir aus den in § 1 auseinandergesetzten Gründen auf die Massenkraft, die sonst noch dazu käme, nicht zu achten.

Wir müssen uns zunächst darüber klar werden, in welchen Beziehungen die Spannungen auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds zu einander stehen. In jeder Trennungsfläche, die wir uns in einem Körper gezogen denken können, grenzen zwei Theile des Körpers aneinander, zwischen denen sich die Spannungen durch die Trennungsfläche übertragen. Nach dem Gesetze der Action und Reaction ist die

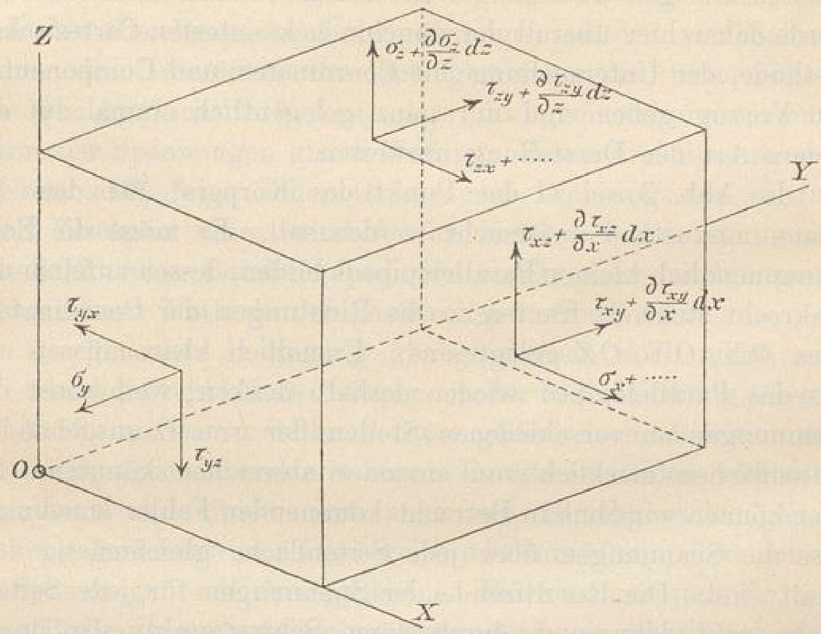

Abb. 3a.

Kraft, die etwa A auf B überträgt, ebenso gross, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft, die von B auf A wirkt. Wir wollen uns, um beide Theile deutlich von einander unterscheiden zu können, eine Normale zur Trennungsfläche nach einer der beiden möglichen Richtungen gezogen denken. Für den einen Theil geht diese Normale dann nach aussen hin und für den anderen nach innen. Eine Zugspannung ist für jeden der beiden Theile eine Kraft, deren Pfeil mit der Richtung der äusseren Normale dieses Theiles übereinstimmt. Betrachten wir nämlich den anderen Theil, so kehrt sich nach dem Gesetze der Action und Reaction der Pfeil der übertragenen Spannung um, gleichzeitig ist aber nun die entgegengesetzte Richtung der Normalen als die äussere zu bezeichnen, und wir können daher in der That die für beide Theile zutreffende, eindeutige Aussage machen, dass eine Normalspannung immer als Zugspannung, also positiv zu rechnen ist, wenn sie in die Richtung der äusseren Normale fällt.

Nun fasse man in Abb. 3 etwa die beiden sich gegenüberliegenden Seitenflächen in's Auge, die senkrecht zur X-Axe stehen. Die äussere Normale der einen geht in der

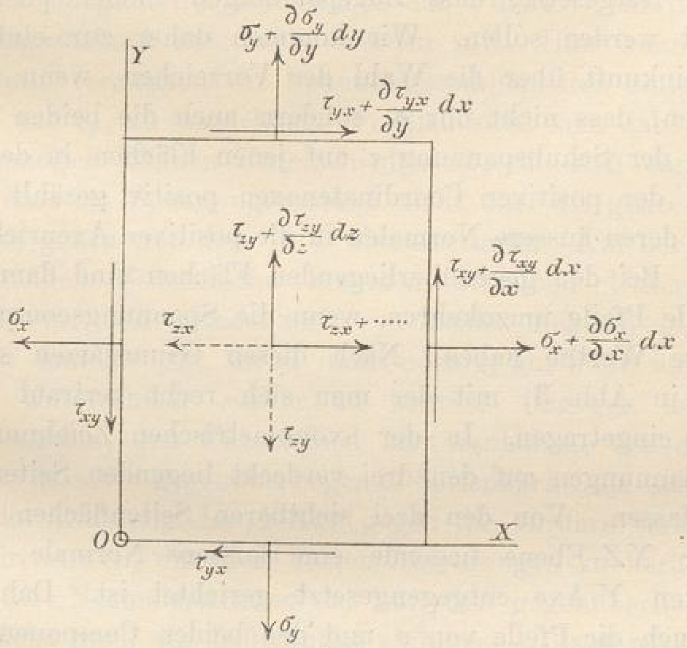

Abb. 3b.

Richtung der positiven X-Axe, die der anderen in der entgegengesetzten Richtung. Denkt man sich beide Flächen immer näher aneinander gerückt, so wird zuletzt die in der einen Fläche übertragene Spannung nur einfach die nach dem Gesetze der Action und Reaction auftretende Gegenwirkung der zur anderen gehörigen Spannung sein. In erster Annäherung können wir daher bei je zwei sich gegenüberliegenden Flächen des Parallelepipeds die Spannungen als gleich gross und entgegengesetzt gerichtet betrachten. Nur wenn man absichtlich auf die kleinen Unterschiede achten will, die dadurch zu Stande kommen, dass die eine Fläche etwas entfernt von der zu ihr parallelen ist, wird man die in Abb. 3 eingeschriebenen genaueren Ausdrücke zu benutzen haben.

In Bezug auf die Richtungen, die als positiv anzusehen sind, ist noch Folgendes zu beachten. Bei jenen Seitenflächen, deren äussere Normalen in den Richtungen der positiven Coordinatenaxen gehen, zählt die Normalspannung σ ebenfalls in dieser Richtung positiv, denn wir haben schon vorher festgesetzt, dass Zugspannungen immer positiv gerechnet werden sollen. Wir kommen daher zur einfachsten Uebereinkunft über die Wahl der Vorzeichen, wenn wir bestimmen, dass nicht nur σ, sondern auch die beiden Componenten der Schubspannung τ auf jenen Flächen in den Richtungen der positiven Coordinatenaxen positiv gezählt werden sollen, deren äussere Normalen in die positiven Axenrichtungen fallen. Bei den gegenüberliegenden Flächen sind dann natürlich alle Pfeile umzukehren, wenn die Spannungscomponenten positive Werthe haben. Nach diesen Grundsätzen sind die Pfeile in Abb. 3, mit der man sich recht vertraut machen möge, eingetragen. In der axonometrischen Zeichnung sind die Spannungen auf den drei verdeckt liegenden Seitenflächen weggelassen. Von den drei sichtbaren Seitenflächen hat die in der XZ-Ebene liegende eine äussere Normale, die der positiven Y-Axe entgegengesetzt gerichtet ist. Daher sind hier auch die Pfeile von σ und den beiden Componenten von τ den Coordinatenaxen entgegengesetzt gerichtet gezeichnet. Bei den beiden anderen sichtbaren Seitenflächen gehen dagegen die Pfeile in den positiven Axenrichtungen, weil dies auch von den äusseren Normalen zutrifft.

Die den Spannungscomponenten σ und τ angehängten Ordnungszeiger reden eine leicht verständliche Sprache. Jedes σ trägt nur einen Zeiger, denn hier genügt es, die Stellung des Flächenelementes anzugeben, zu dem σ gehört, und dies geschieht, indem die Axenrichtung angemerkt wird, zu der das Flächenelement senkrecht steht und zu der σ daher parallel geht. Auch der erste der beiden Zeiger der Schubspannungscomponenten τ bezieht sich auf die Stellung des zugehörigen Flächenelementes und stimmt daher auf jeder Fläche mit dem Zeiger von σ überein. Der zweite Zeiger gibt dagegen an, welcher Axenrichtung die betreffende Componente parallel geht.

Zur Erläuterung von Abb. 3 muss ich endlich noch auf einen Umstand aufmerksam machen, an den der Leser freilich schon längst gedacht haben wird. Von den drei sichtbaren Seitenflächen geht nur eine durch den Punkt O, in dem der Spannungszustand untersucht werden soll. Hier konnte man sich damit begnügen, die Spannungscomponenten einfach mit σ_y, τ_{yx} und τ_{yz} zu bezeichnen. Freilich sieht man dabei schon von unendlich kleinen Unterschieden ab, die sich daraus ergeben, dass der Spannungszustand nicht über die ganze Rechteckfläche genau mit dem in O übereinstimmt. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommen dieselben Unterschiede ebenfalls vor und gerade weil von beiden Flächen in dieser Hinsicht dasselbe gilt, ist es nicht nöthig, auf diese unendlich kleinen Unterschiede weiter zu achten. Dagegen kann es nöthig werden, den Unterschied hervorzuheben, der dadurch entsteht, dass die gegenüberliegende Seitenfläche um das Stück dy in der Richtung der Y-Axe gegen die vordere verschoben ist. Wir müssen, um diese feinen Abstufungen zu berücksichtigen, der Normalspannung σ_y auf der gegenüberliegenden Seitenfläche noch ein Differential zufügen, so dass wir dort

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

erhalten und ähnliches gilt für die anderen Componenten. Aus dem Grundrisse der Abb. 3 ist dies ersichtlich. Ebenso sind in der axonometrischen Figur die Spannungscomponenten auf den beiden sichtbaren Seitenflächen, die nicht durch den Punkt O gehen, schon mit den Zuwüchsen versehen, die den Abständen von den gegenüberliegenden Flächen entsprechen. Wo der Platz nicht ausreichte, sind diese Differentiale auch nur durch Punkte angedeutet, wie in $\tau_{zx} + \cdots$ an Stelle von

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz.$$

Nachdem man sich mit allen diesen Einzelheiten, die in Abb. 3 zu berücksichtigen waren, hinreichend vertraut gemacht hat, ist schon der erste und wichtigste Schritt zum Verständnisse der Grundgleichungen der Festigkeitslehre geschehen: Es erübrigt jetzt nur noch, die Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte an dem unendlich kleinen Parallelepiped, dessen Kantenlängen mit dx, dy, dz bezeichnet werden, in Form von Gleichungen anzuschreiben. Zunächst wollen wir das Gleichgewicht gegen Drehung in's Auge fassen, da wir schon in § 1 erkannten, dass wir hierdurch zu den Bedingungen geführt werden, die zwischen den neun Spannungscomponeuten $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yz}\ \tau_{yx}\ \tau_{zx}\ \tau_{zy}$ für die drei durch den Punkt O gelegten Flächenelemente bestehen müssen, damit sie miteinander verträglich sind. Um z. B. zu erkennen, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit keine Drehung um eine zur Z-Axe parallele Grade eintreten kann, projiciren wir den Körper mit allen daran angreifenden Kräften auf die XY-Ebene, wie dies in Abb. 3b bereits geschehen ist. Wir sehen dann, dass zwei Kräftepaare vorkommen, die eine solche Drehung in entgegengesetzter Richtung anstreben. Ein Kräftepaar wird durch die Spannungen τ_{yx} auf den beiden Rechteckseiten gebildet, deren Normalen zur Y-Axe parallel gehen. Die Grösse jeder Kraft dieses Paares wird gefunden, wenn wir die specifische Spannung τ_{yx} mit dem Inhalte des Flächenelementes, über das sie vertheilt ist, multipliciren; sie ist also gleich $\tau_{yx} \cdot dx\, dz$ zu setzen. Das statische Moment des Kräftepaars ist daher gleich

$$\tau_{yx} \cdot dx\, dy\, dz.$$

Ebenso finden wir für das Moment des Kräftepaars der Schubspannungen τ_{xy}, die über die beiden zur X-Axe senkrechten Seitenflächen vertheilt sind,

$$\tau_{xy} \cdot dx\, dy\, dz.$$

Die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen erfordert daher, dass

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

ist.*) Natürlich lässt sich dieselbe Betrachtung auch für eine Drehung um jede der beiden anderen Coordinatenaxen wiederholen, und wir erhalten daher im Ganzen die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{4}$$

die einen der wichtigsten Sätze der Festigkeitslehre aussprechen, den man als den Satz von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen zu bezeichnen pflegt. Man kann ihn auch noch in etwas allgemeinerer Form aufstellen, wenn man an Stelle des rechtwinkligen Parallelepipeds in Abb. 3 ein schiefwinkliges untersucht; ich sehe aber davon ab, dies weiter auszuführen, da nicht viel dabei herauskommt. Ferner erwähne ich noch, dass viele Schriftsteller für die einander gleichen Schubspannungscomponenten τ_{xy} und τ_{yx} eine einheitliche Bezeichnung, nämlich τ_z einführen, wobei jetzt der Zeiger z darauf hinweisen soll, dass jene Schubspannungen gemeint sind, die sich im Gleichgewichte gegen eine Drehung um die Z-Axe halten, und ähnlich für die übrigen. Man spart hierbei zwar das Anschreiben eines zweiten Zeigers; es will mir aber scheinen, dass dieser Vortheil nicht erheblich genug ist, um die anschaulichere Schreibweise mit zwei Zeigern aufzugeben. Ich werde daher diese beibehalten.

Wir haben jetzt erkannt, dass zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes des Körpers in einem gegebenen Punkte O die Angabe von sechs Zahlen erforderlich ist. Diese Anzahl kann auch durch weitere Betrachtungen nicht herabgedrückt werden. Man pflegt diese Thatsache auch wohl mit den Worten auszusprechen, dass ∞^6 verschiedene Spannungs-

*) Im Innern eines Magneten ist dieser Schluss nicht zulässig, da hier ausser den Schubspannungen noch ein auf Verdrehen des ganzen Volumenelementes hinwirkendes Moment der magnetischen Kräfte auftritt, das von derselben Grössenordnung sein kann. Von solchen ausnahmsweise vorkommenden Fällen soll aber hier stets abgesehen werden.

zustände möglich sind, oder dass die Reihe aller Spannungszustände eine Mannigfaltigkeit von sechs Dimensionen bildet.

Wir wollen jetzt noch das Gleichgewicht des Parallelepipeds gegen Verschieben in den drei Axenrichtungen betrachten. Dieses wird schon durch das Gesetz der Action und Reaction verbürgt, wenn wir auf die sehr kleinen Unterschiede der Spannungen an gegenüberliegenden Seitenflächen keine Rücksicht nehmen, wie es bei der vorigen Betrachtung geschehen konnte. Wir wollen aber dabei nicht stehen bleiben, weil wir bei dieser Gelegenheit noch erfahren können, in welchen Beziehungen die Zuwüchse der Spannungscomponenten bei verschiedenen Fortschreitungsrichtungen zu einander stehen müssen. Natürlich ist es jetzt, wo wir nur auf die kleinen Unterschiede der Spannungen auf gegenüberliegenden Flächen zu achten haben, nicht mehr zulässig, die dem Volumen des Parallelepipeds proportionale Fernkraft, also etwa das Gewicht des Körperchens, zu vernachlässigen. Dieses ist zwar unendlich klein gegen die Spannungen selbst, aber durchaus vergleichbar mit den kleinen Unterschieden zwischen den Spannungen auf gegenüberliegenden Seiten. Ich denke mir die auf die Raumeinheit bezogene Massenkraft in drei Componenten nach den Coordinatenaxen zerlegt, die ich mit $X\ Y\ Z$ bezeichne und positiv rechne, wenn sie mit den positiven Axen gleichgerichtet sind.

In der Richtung der X-Axe kommen jetzt an dem Körperchen sieben Kräfte vor, deren Summe gleich Null sein muss, damit das Gleichgewicht gesichert ist. An jeder Seitenfläche des Parallelepipeds haben wir eine zur X-Axe parallele Spannungscomponente, und dann kommt die Componente der Massenkraft im Betrage $X\,dx\,dy\,dz$. Die Spannungscomponenten kann man paarweise zusammenfassen. Auf dem durch den Punkt O gehenden, zur X-Axe senkrechten Rechtecke haben wir die Componente σ_x der specifischen Spannung, also im Ganzen den Betrag $\sigma_x \cdot dy\,dz$ einer Kraft, die der positiven X-Axe entgegengesetzt gerichtet ist. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommt dazu die um ein Differential verschiedene und nach der positiven X-Axe hin gerichtete Normalspannung. Fassen wir beide zusammen, so behalten wir einen Ueberschuss von der Grösse

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\, dy\, dz$$

in der Richtung der positiven X-Axe. Ebenso tragen die beiden zur Y-Axe senkrechten Seitenflächen zusammen genommen das Glied

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot dx\, dy\, dz$$

zur Componentensumme in der Richtung der X-Axe bei und ähnlich die beiden letzten Seitenflächen. Schreiben wir nun die Bedingung an, dass die algebraische Summe aller parallel zur X-Axe gehenden Componenten verschwinden muss, so erhalten wir nach Wegheben des gemeinsamen Faktors $dx\, dy\, dz$ die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die beiden letzten sind ebenso gebildet, wie die erste, die wir eben ableiteten, und sprechen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y- und der Z-Axe aus. Es ist zwar nützlich, sie zur Uebung ebenfalls aus Abb. 3 abzulesen, aber nicht nothwendig, da keine Coordinatenaxe vor den anderen etwas voraus hat und was für die eine bewiesen ist, daher auch für die anderen gelten muss. Es genügt daher vollständig, sich davon zu überzeugen, dass die beiden anderen Gleichungen aus der ersten hervorgehen, wenn man die Coordinaten $x\ y\ z$ cyclisch miteinander vertauscht.

§ 3. Das Gleichgewicht am Tetraëder.

Wir wollen jetzt die am Schlusse von § 1 in allgemeinen Umrissen angestellte Betrachtung auch noch in einen Satz von Gleichungen umprägen. Dazu beziehe ich mich auf Abb. 4, in der das Tetraëder in Aufriss und Grundriss gezeichnet ist. Als gegeben werden die Spannungscomponenten betrachtet, die zu den Stellungen der drei Coordinatenebenen gehören; verlangt wird die Berechnung der Spannungscomponenten auf der in beliebiger Stellung gezogenen vierten Tetraëderfläche, deren äussere Normale mit n bezeichnet ist. Es ist am bequemsten, die Spannung für diese Fläche, die mit p_n bezeichnet werden möge, zunächst in drei Componenten zu zerlegen, die den Coordinatenaxen parallel laufen. In der Abbildung sind diese Componenten mit $p_{nx}\ p_{ny}\ p_{nz}$ bezeichnet; die Zeiger haben also dieselbe Bedeutung wie bei den früheren Betrachtungen. Nachdem diese Componenten gefunden sind, kann man leicht auch die Normalspannung σ_n und die in gegebenen Richtungen verlaufenden Schubspannungscomponenten daraus ableiten, wenn sich dies als nöthig herausstellt.

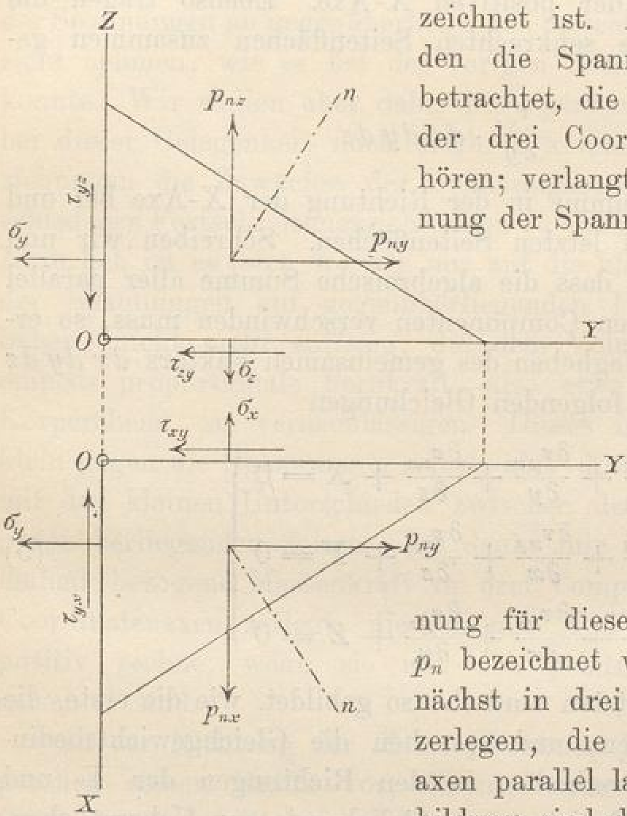

Abb. 4.

Die Fläche der vierten Tetraëderseite sei gleich dF; die Flächen der drei anderen bilden die Projectionen von dF auf die Coordinatenebenen und werden daher aus dF durch Mul-