Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Siebenter Abschnitt. Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

Siebenter Abschnitt.

Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger.

§ 55. Gleichgewichtsbedingungen für das Tonnengewölbe.

Die einfachste Gewölbeform, mit deren Stabilitätsuntersuchung man sich in der graphischen Statik vor Allem zu befassen hat, ist das cylindrische oder Tonnen-Gewölbe. Bei gewölbten Brücken kommt es allein in Frage und auch im Hochbaue spielt es eine wichtige Rolle, zumal da sich manche der verwickelteren Gewölbeformen, namentlich die Kreuzgewölbe, auf jene Grundform zurückführen lassen. Nur die Kuppelgewölbe und die ihnen verwandten Klostergewölbe erfordern eine grundsätzlich verschiedene Behandlung, worauf in der Folge noch kurz eingegangen werden soll. Bei den hier durchzuführenden Betrachtungen soll in erster Linie an das Gleichgewicht eines Brückengewölbes gedacht werden, obschon natürlich für die übrigen Verwendungsarten des Tonnengewölbes ganz Aehnliches gilt.

Von der Last, die das Gewölbe zu tragen hat, nehme ich an, dass sie in der Richtung der Gewölbeaxe gleichförmig vertheilt sei, während sie im Gewölbequerschnitte beliebig vertheilt sein kann. Es ist dann gleichgültig, wie lang das Gewölbe in der Richtung der Gewölbeaxe sich ausdehnt, da sich jeder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten liegende Abschnitt unter denselben Bedingungen befindet, wie ein anderer. Es genügt daher im Allgemeinen, einen einzigen Querschnitt zur Betrachtung auszuwählen; auf Ausnahmen, die gelegentlich vorkommen können, werde ich späterhin noch aufmerksam machen.

Die von dem Gewölbe aufzunehmende Last besteht gewöhnlich aus einer Erdüberschüttung oder einer Uebermauerung. Denkt man sich das Gewölbe, namentlich in dem zuletzt genannten Falle fortgenommen, so ist es nicht unmöglich, dass sich die Last trotzdem selbst noch trägt, da sich auch die Uebermauerung selbst wie ein Gewölbe verhalten kann. Wenn nun auch bei den Fällen, die wir in erster Linie im Auge haben, also bei weitgespannten Brückengewölben, eine so grosse Tragfähigkeit der Uebermauerung oder Ueberschüttung nicht anzunehmen ist, so vermag sie doch immerhin bis zu einem gewissen Grade eine Entlastung des Gewölbes herbeizuführen. Auf diesen günstigen Umstand nimmt man jedoch bei der Berechnung des Gewölbes keine Rücksicht; man nimmt vielmehr an, dass die Last ohne inneren Zusammenhang sei und keine horizontalen Kräfte übertrage, so dass jeder Theil der Rückenfläche des Gewölbes das senkrecht nach abwärts gerichtete Gewicht des gerade über ihm befindlichen Theiles der Belastung aufzunehmen habe. Dazu kommt dann noch das Eigengewicht des Gewölbes selbst.

Wenn die Last aus einer Uebermauerung von demselben, specifischen Gewichte wie der Wölbbogen besteht, gibt demnach die Höhe der Uebermauerung an jeder Stelle ohne Weiteres ein Maass für die dort auftretende Belastung an. Im anderen Falle, also etwa bei einer Erdüberschüttung, kann man sich diese durch eine gleich schwere Uebermauerung von entsprechend geänderter Höhe ersetzt denken. Auch die beweglichen Lasten, die bei einem Brückengewölbe vorkommen die aber in der Regel gegenüber der viel grösseren Eigenlast keine grosse Rolle spielen, denkt man sich durch eine gleich schwere zusätzliche Uebermauerung in entsprechender Vertheilung ersetzt. Man erhält dann im Gewölbequerschnitte eine auf Mauerlasten zurückgeführte Fläche, deren obere Begrenzung die Belastungslinie heisst. Diese und die Gewölbeform seien gegeben; es handelt sich dann um die Entscheidung der Frage, ob das Gewölbe unter den gegebenen Umständen im Gleichgewichte bleiben wird oder ob ein Einsturz zu befürchten ist.

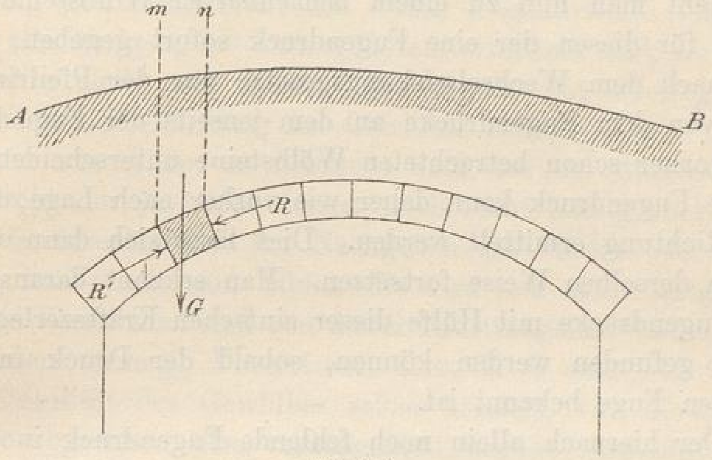

Abb. 150.

In Abb. 150 ist der Gewölbequerschnitt nebst der Belastungslinie AB gezeichnet. Man fasse einen einzelnen Wölbstein ins Auge, der in der Figur durch Schraffirung hervorgehoben ist. An diesem wirkt zunächst das Gewicht der zwischen den Linien m und n liegenden Lasten sammt dem Eigengewichte des Wölbsteins. Dieses Gewicht G ist dem Inhalte der zwischen den Linien m und n und den beiden Wölbfugen liegenden Fläche proportional und geht durch den Schwerpunkt der Fläche; es ist daher als vollständig gegeben anzusehen. Ausserdem greifen an dem Wölbsteine die in den beiden Fugen übertragenen Kräfte R und R_1 an. Diese vertheilen sich zwar entweder über die ganze Fuge oder doch über einen Theil derselben; wir können sie uns aber zu den Resultirenden R und R_1 zusammengefasst denken. Ueber Lage, Grösse und Richtung der Fugendrücke R und R_1 ist zwar zunächst nichts bekannt. Offenbar könnten wir aber die andere sofort angeben, wenn eine von ihnen auf irgend eine Art bereits ermittelt wäre. Denn die drei Kräfte G, R und R_1 müssen sich, damit Gleichgewicht bestehe, in demselben Punkte schneiden und ihre geometrische Summe muss Null sein. Die erste Bedingung liefert die Lage, die andere nach Zeichnen eines Kräftedreiecks Grösse und Richtung von R_1, wenn R als bekannt angesehen wird.

Geht man nun zu einem benachbarten Wölbsteine über, so ist für diesen der eine Fugendruck sofort gegeben, da er sich nach dem Wechselwirkungsgesetze nur der Pfeilrichtung nach von dem Fugendrucke an dem jenseits der Fuge liegenden, vorher schon betrachteten Wölbsteine unterscheidet. Der andere Fugendruck kann daher wie vorher nach Lage, Grösse und Richtung ermittelt werden. Dies lässt sich dann weiterhin in derselben Weise fortsetzen. Man erkennt daraus, dass alle Fugendrücke mit Hülfe dieser einfachen Kräftezerlegungen sofort gefunden werden können, sobald der Druck in einer einzigen Fuge bekannt ist.

Der hiernach allein noch fehlende Fugendruck in irgend einer Fuge, die zum Ausgange gewählt wird, lässt sich dagegen durch blosse Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ermitteln. Das Gewölbe ist vielmehr eine statisch unbestimmte Construction und zwar eine dreifach statisch unbestimmte, da drei — auf verschiedene Art zu wählende — Bestimmungsstücke erforderlich sind, um Lage, Grösse und Richtung irgend eines Fugendruckes näher zu bezeichnen.

Falls das Gewölbe überhaupt stabil ist, sind sehr viele Gleichgewichtszustände statisch möglich. Jeder zulässigen, sonst aber beliebigen Wahl für den ersten Fugendruck entspricht ein anderer Gleichgewichtszustand. Zulässig ist dabei freilich nur eine solche Wahl, bei der überhaupt Gleichgewicht bestehen kann, worauf sofort noch näher einzugehen sein wird. Jedenfalls muss, wenn der Einsturz nicht erfolgen soll, mindestens eine Annahme für den ersten Fugendruck möglich sein, die das Gleichgewicht sichert. Ein Gewölbe, bei dem nur ein einziger Gleichgewichtszustand möglich wäre, sieht man aber nicht als hinreichend sicher an, umsomehr als jede Gewissheit darüber fehlt, dass dieser eine Gleichgewichtszustand dann auch wirklich zu Stande käme. Man verlangt vielmehr einen gewissen Ueberschuss an Standsicherheit, so dass innerhalb eines nicht zu kleinen Bereiches verschiedene Gleichgewichtszustände statisch möglich sind.

Um die Frage zu beantworten, ob ein Gewölbe für eine beliebig getroffene Wahl des ersten Fugendruckes und nachdem alle übrigen, die dazu gehören, ermittelt sind, im Gleichgewichte bleibt oder nicht, müssen wir uns überlegen, auf welche Art der Einsturz des Gewölbes erfolgen kann. Hierbei ist nun vor Allem zu betonen, dass bei der überwiegenden Mehrzahl der ja leider immer noch recht häufig vorkommenden Gewölbeeinstürze das Nachgeben der Pfeiler oder Widerlager die Veranlassung bildet. Es wird sich später zeigen, auf welche Weise man sich von dieser Einsturzgefahr Rechenschaft zu geben vermag. Vorerst soll aber, da es sich jetzt nur um die Stabilität des Gewölbes selbst handelt, von diesem Umstande abgesehen, also vorausgesetzt werden, dass die Widerlagsmauern hinreichend standfest sind.

Dann kommt ferner in Betracht, dass der Einsturz etwa durch ein Gleiten der Wölbsteine übereinander längs der Fugen eingeleitet werden könnte. Coulomb, der bekannte Physiker, der sich, soweit beglaubigte Nachrichten vorliegen*), zuerst mit der Frage des Gewölbegleichgewichts beschäftigt hat, sah diese Einsturzgefahr als die wesentlichste an. Sie lässt sich aber durch einen geeigneten Fugenschnitt stets leicht vermeiden. Ein Gleiten der Wölbsteine übereinander kann nämlich offenbar nur dann eintreten, wenn der Fugendruck mit der Normalen zur Fuge einen Winkel einschliesst, der den Reibungswinkel übersteigt. Der Reibungswinkel zwischen Stein und Stein ist sehr gross. Wenn ein weicher Mörtel dazwischen liegt, kann er freilich erheblich kleiner werden; aber auch dann ist er immer noch ausreichend, um ein Gleiten zu verhüten, wenn

*) Manche nehmen freilich an, dass sich schon die Baumeister der Gothik eine (von ihnen geheim gehaltene) zutreffende Anschauung über die Gleichgewichtsbedingungen der Gewölbe zurecht gelegt hätten, so z. B. Baurath Hasak in einem Vortrage, der in der Zeitschr. f. Arch. und Ingenieurwesen, Wochenausgabe, 1900, S. 246 auszugsweise abgedruckt ist.

die Fugenrichtungen einigermaassen zweckmässig gewählt werden. Thatsächlich ist daher die Gleitgefahr, wenn sie auch immerhin im Auge behalten werden muss, von viel geringerer Bedeutung, als man ursprünglich annahm und auch jetzt noch manchmal von Leuten, die sich mit dem Gegenstande nicht näher beschäftigt haben, versichern hört.

Eine andere Einsturzmöglichkeit besteht darin, dass das Gewölbe durch Oeffnen einiger Fugen (der sogenannten Bruchfugen) in mehrere Theile zerfällt, die sich um die Kanten der Bruchfugen abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen hin drehen. Wenn diese Bewegungen weit genug fortgesetzt werden, weichen einzelne Theile so weit nach oben hin aus, dass die anderen Raum zum Herabstürzen erlangen. Hierbei ist zu beachten, dass die Zug- oder Haftfestigkeit des Mörtels, die vor dem Oeffnen der Fugen überwunden werden muss, in vielen Fällen nur gering zu veranschlagen ist. Ein guter Cementmörtel hat zwar eine nicht zu unterschätzende Zugfestigkeit, sobald er genügend erhärtet ist. Man verlässt sich darauf aber nicht gern und fordert, dass das Gleichgewicht des Gewölbes auch schon ohne Zuhülfenahme der Zugfestigkeit des Mörtels genügend gesichert sei. Für diesen Fall lässt sich die Bedingung für das Gleichgewicht gegen Drehen benachbarter Wölbsteine gegeneinander um eine Fugenkante leicht angeben. Der Angriffspunkt des Fugendrucks muss nämlich auf der Fuge selbst enthalten sein und darf nicht in deren Verlängerung fallen. Denn in die Verlängerung der Fuge könnte er offenbar nur dann fallen, wenn in der Fuge auch Zugkräfte übertragen würden.

Bei dieser Betrachtung ist jedoch noch keine Rücksicht auf die begrenzte Druckfestigkeit des Wölbmaterials genommen und diese ist es, die nun thatsächlich den Ausschlag gibt. Schon dann, wenn der Angriffspunkt des Fugendrucks in die Nähe einer Fugenkante fällt, steigt die Druckbeanspruchung an dieser Kante so erheblich, dass dort ein Zertrümmern des Wölbmaterials stattfindet. Nachdem dieses Absplittern der Kanten erfolgt ist, steht den vorher besprochenen Drehungen der einzelnen Wölbtheile gegen einander kein Hinderniss mehr im Wege, obschon der Angriffspunkt des Fugendruckes noch innerhalb der ursprünglichen Fugenlänge liegt. Man muss daher verlangen, dass der Fugendruck nicht nur an keiner Stelle über den Gewölbequerschnitt hinaustritt, sondern dass er sich auch den Begrenzungslinien des Gewölbes nirgends so weit nähert, dass die zulässige Druckbeanspruchung des Wölbmaterials überschritten wird. Als statisch möglich im vorher erörterten Sinne sind daher nur solche Gleichgewichtszustände des Gewölbes anzusehen, die dieser Forderung genügen und bei denen überdies an keiner Stelle ein Gleiten der Wölbsteine gegen einander zu befürchten ist.

Die grösste Kantenpressung, die zu einem gegebenen Fugendrucke gehört, kann unter der hier wie in anderen Fällen üblichen Annahme eines linearen Spannungsvertheilungsgesetzes leicht ermittelt werden. Der Fugendruck (oder seine zur Fugenrichtung senkrecht stehende Componente, die sich aber von dem gesammten Fugendrucke unter den gegebenen Verhältnissen nur unerheblich unterscheiden kann) sei für die Länge $= 1$ des Gewölbes im Sinne der Axe, d. h. senkrecht zum Querschnitte gemessen, mit R, die Fugenlänge mit f und der Abstand des Druckmittelpunktes (oder Angriffspunktes von R) von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Dann ist die Kantenpressung σ

$$\sigma = \frac{R}{f} \pm \frac{6\,Ru}{f^2} \tag{82}$$

zu setzen. Dies ist nämlich die früher (im ersten Bande) abgeleitete Formel für die excentrische Druckbelastung. Das erste Glied stellt die von dem centrisch angebrachten Drucke herrührende, gleichförmig vertheilte Spannung, das zweite Glied die zu dem Momente Ru gehörige zusätzliche Biegungsspannung dar, wobei zu beachten ist, dass das Widerstandsmoment der Fuge gleich $\frac{f^2}{6}$ zu setzen ist, da die Fuge ein Rechteck von den Seitenlängen f und 1 bildet. Das obere oder untere Vorzeichen des zweiten Gliedes ist zu wählen, jenachdem die dem Druckmittelpunkte benachbarte oder die jenseits der Mitte liegende Kante in Frage kommt. Die grösste Kantenpressung entspricht natürlich dem positiven Vorzeichen.

Die Formel ist indessen nur so lange gültig, als sich die ganze Fuge an der Lastübertragung betheiligt. Setzt man $u = \frac{f}{6}$, so sinkt der Druck an der jenseits liegenden Kante auf Null und wenn u noch grösser wird, treten an dieser Kante Zugspannungen auf. Vermag der Mörtel Zugspannungen aufzunehmen, so ist die Formel zwar auch dann noch gültig. Im anderen Falle tritt aber auf der Zugseite ein Aufklaffen der Fuge ein. Das Spannungsvertheilungsdiagramm geht dann in ein Dreieck über, das sich nur über den unter Druck stehenden Theil der Fuge erstreckt und dessen Schwerpunkt auf der Richtungslinie von R liegt. Der Abstand von R bis zur Kante ist $\frac{f}{2} - u$, die an der Druckübertragung betheiligte Strecke der Fuge das Dreifache davon und die Kantenpressung wird doppelt so gross, als der Mittelwerth des Druckes längs jener Strecke. Daher ist die vorige Gleichung für diesen Fall zu ersetzen durch

$$\sigma = 2 \cdot \frac{R}{3\left(\frac{f}{2} - u\right)}. \tag{83}$$

Was die Dimensionen der in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen anbelangt, so ist zunächst daran zu erinnern, dass R einen Fugendruck für die Längeneinheit der Gewölbelänge bedeutete, also die Dimension kg/cm oder kg/m hat. Häufig benutzt man aber anstatt dessen andere Einheiten. Es zeigte sich nämlich vorher schon, dass die Lasten des Gewölbes durch Flächen im Gewölbequerschnitte zur Darstellung gelangen. Diese Flächen lassen sich zwar, sobald es gewünscht wird, sofort auch auf die zugehörigen Gewichte umrechnen. Man kann aber auch dabei stehen bleiben und findet dann auch R in einem Flächeninhalte ausgedrückt. Setzt man es mit dieser Benennung in die Formeln ein, so erhält man σ als eine Länge. Diese Länge gibt die „Druckhöhe“ an. Es ist dies jene Uebermauerungshöhe bei einem mit constantem Querschnitte in die Höhe geführten Pfeiler, die unten dieselbe Druckbeanspruchung der Fuge bewirkt, wie das berechnete σ. Auch die zulässige Kantenpressung kann anstatt in atm in einer solchen Druckhöhe angegeben werden und man erspart sich, wenn man dies von vornherein so einführt, später weitere Umrechnungen.

§ 56. Stützlinie und Drucklinie.

Eine gebrochene Linie, die die Druckmittelpunkte aller Fugen mit einander verbindet, wird als Stützlinie des Gewölbes bezeichnet. Da die Vertheilung und die Zahl der Fugen offenbar zufällig und unwesentlich ist, kann man sich auch unendlich viele Fugen oder wenigstens willkürlich durch die Wölbsteine in der Fugenrichtung gezogene „Fugenschnitte“ vorstellen und zu jedem dieser Fugenschnitte den Druckmittelpunkt aufgesucht denken. Die Stützlinie geht dann in eine Curve über. Nach dem, was wir vorher sahen, muss die Stützlinie überall in der Querschnittsfläche verlaufen und sie darf den Begrenzungslinien des Gewölbequerschnitts nicht zu nahe kommen, wenn sie einem möglichen Gleichgewichtszustande entsprechen soll.

Eine zweite Curve, die von der Stützlinie im Allgemeinen etwas, wenn auch gewöhnlich nicht viel verschieden ist, wird von den Richtungslinien der zu allen Fugenschnitten gehörigen Fugendrücke als Tangenten eingehüllt. Sie wird als die Drucklinie des Gewölbes bezeichnet. Indessen werden die Bezeichnungen „Stützlinie“ und „Drucklinie“ häufig auch mit einander vertauscht, um so mehr als beide unter einer Annahme, die sofort näher zu besprechen ist, mit einander zusammenfallen.

Die Construction der Stützlinie oder der Drucklinie macht nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen gar keine Schwierigkeiten, sobald Lage, Richtung und Grösse irgend eines Fugendruckes willkürlich gewählt oder gegeben sind. Man sucht aber diese Aufgabe dadurch noch weiter zu vereinfachen, dass man die Richtungen der Fugenschnitte so legt, wie es dafür am bequemsten ist. Am schnellsten kommt man zum Ziele für lothrechte Fugenschnitte. In diesem Falle bildet die Stützlinie eine zu der gegebenen Belastungsfläche gehörige Seilcurve und jede Tangente an die Seilcurve gibt zugleich die Richtung des zugehörigen Fugendruckes an, d. h. die Drucklinie fällt mit der Stützlinie zusammen.

Freilich dürfte man bei einem gemauerten Gewölbe die Fugen nicht wirklich in dieser Richtung ausführen, da sonst die Gefahr des Gleitens der Wölbsteine übereinander nahe gerückt würde. Bei einem Betongewölbe dagegen kommen Fugen im eigentlichen Sinne überhaupt nicht vor und es ist daher von vornherein gleichgültig, in welcher Richtung wir uns die Fugenschnitte bei ihm gelegt denken wollen. Aber auch bei gemauerten Gewölben steht es uns frei, uns trotz der anders gerichteten Mauerfugen auch noch Schnitte in lothrechter Richtung durch das Gewölbe gelegt zu denken, die wir als Fugenschnitte bezeichnen, und die in diesen Schnitten von der einen nach der anderen Seite hinüber übertragenen Kräfte oder „Fugendrücke“ zu untersuchen.

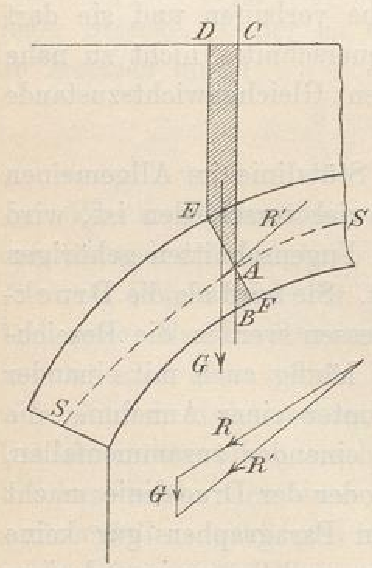

Abb. 151.

Ausserdem ist man auch jederzeit leicht im Stande, den Fugendruck für eine beliebig geneigte Fuge nachträglich anzugeben, sobald die Stütz- oder Drucklinie für senkrechte Fugenschnitte bereits bekannt ist. In Abb. 151 sei SS diese Stützlinie und EF die geneigte Fuge, für die der Fugendruck ermittelt werden soll. Man ziehe durch den Schnittpunkt A der Fuge EF mit der Stützlinie SS den senkrechten Fugenschnitt BC. Der zu diesem gehörige Fugendruck R ist aus dem zu dem Seilpolygone SS gehörigen Kräfteplane sofort zu entnehmen. Dann ziehe man von E aus die Lothrechte ED. Der Fugendruck R' für die geneigte Fuge EF muss dann mit R und dem zwischen den Linien DEF und BC liegenden Belastungsstreifen im Gleichgewichte stehen. Dieser Belastungsstreifen besteht aus dem Trapeze $ACDE$ mit senkrecht nach abwärts und dem kleinen Dreiecke ABF mit senkrecht nach oben gekehrtem Gewichte (dies nach oben gerichtet, weil die Fläche ABF nicht hinzukommt, sondern wegfällt, wenn wir vom senkrechten Fugenschnitte zum geneigten übergehen). Die Richtungslinie der Resultirenden G beider Gewichte kann auch als die senkrechte Schwerlinie der verschränkten Figur $BCDEF$ angesehen werden, in der ABF negativ zu rechnen ist. Durch Aneinandertragen von R und G erhalten wir R' als dritte Seite in dem nebenan gezeichneten Kräftedreiecke. Eine Parallele zu R' durch den Schnittpunkt von R mit G in der Hauptfigur liefert den gesuchten Fugendruck.

Man erkennt aus dieser Construction, dass die Stützlinie für die wirklich vorhandenen geneigten Fugen stets etwas höher liegen wird, als die ihr für senkrechte Fugenschnitte entsprechende. Der Unterschied ist aber so gering, dass man ihn unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen meist ganz vernachlässigen kann. Daher begnügt man sich in der Regel damit, die Stützlinie für senkrechte Fugenschnitte einzuzeichnen und sie zugleich für die geneigten Fugen als gültig zu betrachten. Wenn man will, kann man jedoch die besprochene geringfügige Verbesserung jederzeit leicht vornehmen.

Um die Untersuchung für die Stütz- oder Drucklinien bei senkrechten Fugenschnitten analytisch durchzuführen, geht man von der Differentialgleichung der Seilcurve aus. Diese lautet

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q,$$

wenn q die Belastungsintensität an der Stelle mit der Abscisse x bedeutet, die durch die Höhe der Belastungsfläche an dieser Stelle dargestellt wird. H ist der Horizontalschub der Drucklinie oder des Gewölbes, d. h. die constante Horizontal-Componente jedes Fugendrucks. Durch zweimalige Integration folgt daraus die endliche Gleichung der Curve

$$y = -\frac{1}{H}\int dx \int q\,dx + C_1 x + C_2. \qquad (84)$$

Unter C_1 und C_2 sind die Integrationsconstanten zu verstehen. Grenzbedingungen zu deren Bestimmung stehen nicht zur Verfügung, falls nicht willkürliche Annahmen etwa über einen Fugendruck zu Hülfe genommen werden. Auch der Horizontalschub H lässt sich ohne solche Annahmen auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht ermitteln. In der Gleichung kommen daher drei zunächst willkürliche Constanten vor. Dies steht in Uebereinstimmung mit dem schon vorher gezogenen Schlusse, dass das Tonnengewölbe eine dreifach statisch unbestimmte Construction bildet.

Diese Unbestimmtheit lässt sich freilich durch eine geeignete Construction bis zu einem gewissen Grade heben. Durch Anordnung von Gelenken kann man (wenigstens nahezu) der Drucklinie Punkte vorschreiben, durch die sie gehen muss. Ordnet man drei Gelenke (eins im Scheitel und an jedem Kämpfer) an, so ist die Lage der Drucklinie dadurch völlig bestimmt. Solche Gewölbe hat man neuerdings häufig ausgeführt und bei weitgespannten Brückenbögen scheint sich diese Construction jetzt ganz allgemein eingebürgert zu haben.

Die Berechnung der Gewölbe mit drei Gelenken erfolgt im Wesentlichen genau so, wie die der Bogenträger mit drei Gelenken. Die Gelenkdrücke findet man nach einem der damals besprochenen Verfahren (vgl. § 39) und hiermit kann auch die zugehörige Stützlinie ohne Weiteres gezeichnet werden.

Freilich ist es nicht möglich, ein Gelenk so zu construiren, dass der Gelenkdruck genau durch einen vorgeschriebenen Punkt gehen müsste. Eine geringe Abweichung wird immer noch möglich sein; diese ist aber von entsprechend geringer Bedeutung. — Als ein Hauptvorzug der Gelenkanordnung ist zu betrachten, dass weder Temperaturänderungen, noch geringe Bewegungen der Widerlager, die etwa durch die Nachgiebigkeit des Fundamentes veranlasst werden, eine wesentliche Aenderung des Gleichgewichtszustandes, also der Lage der Stützlinie herbeizuführen vermögen, so lange wenigstens als sich diese Aenderungen gleichförmig der ganzen Länge der Wölbaxe nach äussern.

Im Raume ist nämlich ein mit drei Gelenken ausgeführtes Gewölbe immer noch als eine statisch unbestimmte Construction anzusehen. Es ist keineswegs unbedingt nöthig, dass sich jeder zwischen zwei Querschnitten gelegene Gewölbeabschnitt genau ebenso verhalte, wie jeder andere und wenn der Boden, auf den sich die Widerlager stützen, an verschiedenen Stellen verschieden nachgiebig ist, wenn sich ungleichförmige Wärmeänderungen geltend machen (wenn die nach Süden gelegene Seite z. B. wärmer wird, als die nach Norden gekehrte) oder wenn die Gelenke nicht genau gleichmässig der ganzen Länge der Wölbaxe nach ausgeführt sind, werden sich Unterschiede im Verhalten der einzelnen Wölbabschnitte trotz der Gelenke sofort einstellen. Nur dann, wenn man sicher sein kann, dass alle Ursachen, die eine Verschiedenheit der Bedingungen längs der Wölbaxe herbeiführen könnten, hinreichend vermieden sind, so dass man sich in der That auf die Untersuchung innerhalb einer einzigen Querschnittsebene beschränken kann, ist die Construction als eine — innerhalb der Ebene — statisch bestimmte anzusehen. Ich hielt es für nöthig, dies hier zu betonen, weil bei der Beurtheilung des Sicherheitsgrades eines solchen Gewölbes auf diese Umstände gebührend Rücksicht genommen werden muss, was nicht immer geschehen zu sein scheint.

Natürlich gelten diese Bemerkungen im Uebrigen auch für die schon in der Ebene statisch unbestimmten Gewölbe ohne Gelenke; sie sind aber hier der ohnehin schon bestehenden Unbestimmtheit wegen von geringerer Wichtigkeit als im anderen Falle.

§ 57. Schiefe Projektion des Gewölbequerschnitts mit eingezeichneter Stützlinie.

Denkt man sich die Zeichnung eines Gewölbequerschnitts sammt Belastungslinie, Stützlinie und deren Kräfteplan durch parallele Projektionsstrahlen auf irgend eine zur Zeichenebene nicht parallele Ebene projicirt, so stellt die erhaltene Projektion selbst wieder einen Gewölbequerschnitt dar. In diesem ist als Lastrichtung jene anzusehen, die sich als Projektion der Lastrichtung im ersten Falle ergibt. Auch die Projektion der Stützlinie bildet dann wieder eine Stützlinie für den neu erhaltenen Gewölbequerschnitt. Dies folgt leicht daraus, dass sich der Schwerpunkt jedes Belastungsstreifens mit projicirt (vgl. Bd. I § 24).

Schneiden sich beide Ebenen in einer zur wagrechten Richtung in beiden Zeichnungen parallelen Geraden, so ist die Projektion wiederum symmetrisch in Bezug auf die Lastrichtung gestaltet, wenn dies von der ersten Zeichnung zutraf. Im anderen Falle erhält man aus dem symmetrischen Gewölbequerschnitte mit gleich hoch liegenden Kämpfern den Querschnitt eines sog. „einhüftigen“ Gewölbes.

Von dieser Betrachtung kann man auf verschiedene Weise Gebrauch machen. Zunächst kann man sie zum Vergleiche von Wölbbögen mit verschiedenen Pfeilhöhen und im selben Verhältnisse geänderten Belastungshöhen bei gleicher Spannweite benutzen. Man findet dann z. B., dass beide Gewölbe unter diesen Umständen — wenn alle übrigen ungeändert bleiben — den gleichen Horizontalschub haben. Andere Schlüsse von ähnlicher Art liegen zu nahe, als dass sie im Einzelnen aufgeführt zu werden brauchten.

Ausserdem wird aber auch ein unter allen Umständen sehr schätzenswerthes Hülfsmittel für die genauere Construction der Stützlinie dadurch an die Hand gegeben. Bei den weit gespannten flachen Brückenbögen von verhältnissmässig geringer Wölbstärke, die man in neuerer Zeit häufig (gewöhnlich unter Anordnung von Gelenken) ausführt, muss man nämlich, um die Stützlinie einigermaassen genau einzeichnen zu können, einen unbequem grossen Maassstab anwenden. In diesem Falle gelangt man weit besser zum Ziele, wenn man die Zeichnung verzerrt ausführt, so dass man die Ordinaten in einem grösseren Maassstabe, als die Abscissen, aufträgt. Man kann diese Zeichnung als eine schiefe Parallelprojektion jenes Wölbquerschnitts ansehen, für den man die Untersuchung durchzuführen hat. Die Stützlinie kann nun viel genauer eingetragen werden. Um nachher die Kantenpressung für irgend eine Fuge zu erhalten, muss man nur beachten, dass die Horizontal-Componente des zugehörigen Fugendrucks in einem anderen Maassstabe auszumessen ist, als die Vertikal-Componente. In der Praxis scheint dieses einfache und bequeme Verfahren, das sich im Uebrigen ganz an die beim Auftragen der elastischen Linie eines Balkens in verzerrtem Maassstabe angewendete Methode anlehnt, bisher unbekannt geblieben zu sein.

§ 58. Aeltere Ansichten über die wirklich auftretende Stützlinie.

Bei einem gelenklosen Gewölbe, wie es früher allein vorkam und auch jetzt noch, von den zuvor angeführten Fällen abgesehen, die Regel bildet, muss man sich auf irgend eine Art ein Urtheil darüber zu verschaffen suchen, welcher von den statisch möglichen Gleichgewichtszuständen in Wirklichkeit zu Stande kommt.

Der erste, der sich hierüber eine bestimmte Ansicht bildete, war der englische Ingenieur Moseley, der im Jahre 1837 das sogenannte Princip des kleinsten Widerstandes aufstellte und in derselben Arbeit zugleich zuerst die Stützlinie als Hülfsmittel der Untersuchung einführte. Die Arbeit von Moseley wurde von Scheffler ins Deutsche übersetzt und von diesem eifrig vertreten. Die Moseley'sche Theorie erlangte dadurch eine grosse Verbreitung und hat auch jetzt noch manche Anhänger. Es ist daher nöthig, dass man sich mit ihr bekannt macht.

Zur Zeit Moseley's galten die Bausteine als starre Körper. Dass auch die Steine elastischer Formänderungen fähig sind, die durchaus mit denen der Metalle vor Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze vergleichbar sind, hat man erst später gefunden. Sah man aber die Steine als starre Körper an und beachtete man, dass die Mechanik starrer Körper für sich allein nicht ausreicht, um eine Entscheidung zwischen den als statisch gleich möglich erkannten Gleichgewichtszuständen zu treffen, so musste man zu dem Schlusse kommen, dass die Mechanik starrer Körper, so wie sie vorlag, noch nicht vollständig sein könne, sondern einer Ergänzung bedürfe. Denn offenbar kann unter den unendlich vielen statisch möglichen Gleichgewichtszuständen immer nur einer in Wirklichkeit auftreten und es muss daher ein Gesetz geben, nach dem sich dieser regelt. Diese — scheinbare — Lücke suchte nun Moseley durch das Princip des kleinsten Widerstandes auszufüllen. Thatsächlich besteht nämlich eine solche Lücke nicht, da die den Steinen zukommenden elastischen Eigenschaften schon vollständig ausreichen, um einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtszustand herbeizuführen, der von jenem, der nach dem Moseley'schen Satze folgen würde, im Allgemeinen vollständig verschieden ist.

Da die Besprechung der Moseley'schen Ansicht nur noch einen historischen und allenfalls einen didaktischen Werth hat, indem sie vor einem allerdings nahe liegenden Fehlschlusse warnt, beschränke ich mich hier auf die Erörterung der wichtigsten Anwendung, die sie gefunden hat, nämlich auf die Entscheidung zwischen den verschiedenen möglichen Gleichgewichtszuständen eines Gewölbes. Das Gewölbe wird auf einem Lehrgerüste ausgeführt, das anfänglich die ganze Last allein aufnimmt. Wenn nachher das Gewölbe ausgerüstet, also seiner früheren Unterstützung beraubt wird, „sucht" es herabzufallen. Daran wird es nun durch die Unterstützung an den Widerlagern in Verbindung mit den passend angeordneten Fugenrichtungen verhindert. Denkt man sich die Ausrüstung allmählig vorgenommen, so dass ein allmählich wachsender Theil der Last auf das Gewölbe selbst entfällt, so wird auch der Horizontalschub des Gewölbes allmählich ansteigen. Moseley schloss nun, dass dieses Anwachsen gerade nur so lange andauere, bis der Horizontalschub gross genug geworden sei, um das Gewölbe zu befähigen, die Last allein aufzunehmen. Hiernach würde nach Beendigung des Ausrüstens die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes (der Horizontalschub ist in diesem Falle der kleinste „Widerstand“ nach der Moseley’schen Auffassung) aufgetreten sein und diese würde nach Moseley auch weiterhin bestehen bleiben.

Die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubs ist natürlich, wie bei allen Seilcurven, jene, die die möglichst grosse Pfeilhöhe hat. Bei den gewöhnlich — wenigstens damals gewöhnlich — vorkommenden Gewölbequerschnitten geht sie durch den tiefsten Punkt jeder Kämpferfuge und den höchsten Punkt der Scheitelfuge. Jedenfalls berührt sie aber sowohl die obere als die untere Begrenzungslinie des Gewölbequerschnitts.

Als man darauf aufmerksam wurde, dass bei dieser Drucklinie die Kantenpressung an den bezeichneten Stellen, sofern man auf die Zugfestigkeit des Mörtels nicht rechnen darf, unendlich gross würde, änderte man — unter Beibehaltung derselben Schlussweise im Uebrigen — die Betrachtung dahin ab, dass die Drucklinie von jenen Punkten gerade nur so weit abrücke, als es die Rücksicht auf die Festigkeit des Materials erfordere. In dieser Form wird die Moseley-Scheffler’sche Theorie heute noch vielfach als richtig angesehen. Man nimmt also an, dass unter allen „Gleichgewichtsdrucklinien“ in dem früher besprochenen Sinne die am steilsten verlaufende und daher dem kleinsten Horizontalschube entsprechende die richtige sei.

Freilich ist nun keineswegs einzusehen, wesshalb dieser Vorgang des Abrückens der Stützlinie von den zunächst am meisten gefährdeten Kanten gerade nur so lange andauern soll, als es der Festigkeit oder gar der schätzungsweise als „zulässig“ angesehenen Beanspruchung des Materials entspricht. Wenn man sich zu dieser Aenderung der ursprünglichen Betrachtung, die zu einer unendlich grossen Kantenpressung führte, einmal entschloss, hätte man weiter gehen, nämlich auf die Gründe eingehen müssen, die dieses Abrücken bedingen. Man musste dann zu der Einsicht gelangen, dass es die elastische Nachgiebigkeit des Materials ist, die zu der Abänderung des ursprünglich in Aussicht genommenen Gleichgewichtszustandes führt und dass daher die elastischen Eigenschaften den entscheidenden und ausreichenden Bestimmungsgrund für die Ausbildung des endgültigen Gleichgewichtszustandes abgeben.

Auf die Betrachtung dieser Formänderungen ging später Culmann näher ein. Dabei vernachlässigte er aber immer noch die elastische Nachgiebigkeit der Wölbsteine und achtete nur auf die Zusammendrückbarkeit des bald nach der Ausrüstung noch als ziemlich weich angesehenen Mörtels in den Fugen Er schloss, dass die Drucklinie des kleinsten Horizontalschubs, von der er zunächst ausging, zu einer sehr starken Zusammendrückung und zu einem Ausweichen des Mörtels an den meist beanspruchten Stellen führen müsse. Sobald der Mörtel an diesen Stellen nachgibt, kommen auch die anderen Stellen der Fuge zur Lastübertragung und die Drucklinie rückt weiter ins Innere des Gewölbequerschnitts. Indem er sich diesen Vorgang in derselben Weise weiter fortgesetzt dachte, gelangte er zu der Ansicht, dass sich schliesslich der günstigste Gleichgewichtszustand einstelle, nämlich jener, bei dem die Kantenpressung an den gefährdetsten Stellen den möglichst kleinen Werth annehme. Diese Culmann'sche Theorie der günstigsten Drucklinie zählte lange Zeit hindurch die meisten Anhänger. Sie unterscheidet sich in ihren Ergebnissen übrigens auch nur wenig von der heute meist als zutreffend angesehenen, die von der Betrachtung des Gewölbes als eines elastischen Bogens ausgeht und die im nächsten Paragraphen näher besprochen werden soll.

Vorher sei indessen noch darauf hingewiesen, dass bei der Culmann'schen Betrachtung — ebenso wie bei der nachher folgenden — vollkommen unverrückbare Widerlager vorausgesetzt wurden. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, dass ein merkliches Nachgeben der Widerlager wieder eine Annäherung der Stützlinie an jene des kleinsten Horizontalschubes bewirkt, denn ein starkes Nachgeben müsste, wie aus rein geometrischen Gründen folgt, zu einem Oeffnen der Fugen (im Scheitel nach innen, am Kämpfer nach aussen hin) und damit zu einem Abrücken des Druckmittelpunktes nach der entgegengesetzten Kante hin führen. Wenn die Widerlagsmauern sehr stark, das Gewölbe selbst im Vergleiche dazu sehr schwach zusammendrückbar wären, würde die Culmann'sche Betrachtung ebenfalls zu dem Schlusse führen, dass sich die Stützlinie nicht viel von der des kleinsten Horizontalschubes unterscheiden könne. Bei einer sorgfältig durchdachten und gut ausgeführten Construction liegt aber zu einem so verschiedenen Verhalten der Widerlagsmauern und des Wölbbogens kein Grund vor. Gewöhnlich können die Widerlager einfach als Fortsetzungen des Gewölbes bis zum Fundamente hin angesehen werden und was hier zunächst von dem Wölbbogen selbst gesagt wird, lässt sich dann sofort auch auf die aus ihm und den Widerlagsmauern bestehende ganze Construction sinngemäss übertragen.

§ 59. Die Elasticitätstheorie des Tonnengewölbes.

Die Mauersteine gehorchen zwar nicht genau dem Hooke'schen Gesetze von der Verhältnissgleichheit der elastischen Formänderungen mit den Spannungen, ebensowenig der Cement-Beton, aus dem man in neuerer Zeit häufig grosse Gewölbe herstellt. Immerhin sind bis zu den als zulässig angesehenen und daher in Aussicht zu nehmenden Spannungen die Abweichungen nicht sehr erheblich. Man darf es daher als eine recht gute Annäherung an das wirkliche Verhalten betrachten, wenn man die Theorie der Gewölbe auf die allgemeinen Lehrsätze der gewöhnlichen Elasticitätstheorie stützt. In der That haben auch Versuche, die vor einigen Jahren von dem Oesterreichischen Ing.- und Arch.-Vereine in grossem Maassstabe veranlasst wurden, eine befriedigende Uebereinstimmung zwischen dem thatsächlich beobachteten und dem auf Grund der Elasticitätstheorie berechneten Verhalten der Gewölbe ergeben.

Um nicht zu weitläufig werden zu müssen, beziehe ich mich hier auf die im dritten Bande auseinandergesetzten Lehren und zwar werde ich mich dabei des Castigliano'schen Satzes bedienen, wonach die statisch unbestimmten Grössen einer Construction solche Werthe annehmen, die die Formänderungsarbeit zu einem Minimum machen. Es wird sich also vor Allem darum handeln, einen Ausdruck für die elastische Formänderungsarbeit A aufzustellen, die in dem elastischen Bogen, als den wir das Gewölbe ansehen dürfen, in Folge der in ihm auftretenden Spannungen und Formänderungen aufgespeichert ist. Dabei mag in erster Linie angenommen werden, dass die Widerlager als vollkommen starr und unbeweglich angesehen werden dürfen, so dass auf sie keine Formänderungsarbeit entfällt. Dagegen steht es späterhin auch frei, dieselbe Betrachtung auf die ganze Construction mit Einschluss der Widerlagsmauern auszudehnen, wobei diese als Fortsetzungen des Gewölbes bis zur Fundamentsohle hin anzusehen sind.

Für irgend einen normal zur Wölbmittellinie gezogenen Fugenschnitt sei der Fugendruck mit R, der Abstand des Druckmittelpunktes von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Die Formänderungsarbeit dA in einem Gewölbeelemente, das zum Bogenelemente ds der Wölbmittellinie gehört, setzt sich dann aus zwei Gliedern zusammen, von denen das erste dem centrisch angebracht gedachten Drucke R, das andere dem Biegungsmomente $M = Ru$ entspricht. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die ganze Fuge an der Druckübertragung betheiligt sei. Bei jenen Gewölben, für die man genauere Rechnungen dieser Art durchführt und auf deren Grund die Gestalt und Stärke des Gewölbes bemisst, trifft dies auch stets zu. Für dA hat man dann nach den Lehren des dritten Bandes

$$dA = \frac{R^2}{2\,EF}\,ds + \frac{M^2}{2\,E\Theta}\,ds.$$

Hierin bedeutet F die Fugenfläche, die auch gleich der Fugenlänge f gesetzt werden kann, da die senkrecht zum Gewölbequerschnitte stehende Länge der Fuge gleich der Längeneinheit ist. Unter Θ ist das Trägheitsmoment der Fugenfläche oder $\frac{f^3}{12}$ und unter E der Elasticitätsmodul des Wölbmaterials zu verstehen. Im Ganzen wird daher die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2\,E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12\,M^2}{f^3}\right) ds, \qquad (85)$$

wobei sich das Integral auf die ganze Bogenlänge (eventuell mit Einschluss der Widerlager) zu erstrecken hat.

Die Werthe von R und M sind an jeder Stelle von der Stützlinie abhängig, die man ins Auge fasst. Für jede Stützlinie lässt sich A berechnen und der Castigliano'sche Satz lehrt, dass jene Stützlinie wirklich zur Geltung kommt, für die A zu einem Minimum wird. Wir wissen ferner, dass jede Stützlinie von drei Bestimmungsstücken abhängig ist, also z. B. von Grösse, Lage und Richtung irgend eines Fugendruckes. Denkt man sich diese Bestimmungsstücke auf irgend eine Art ausgewählt, so können alle R und M in ihnen ausgedrückt werden. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit A lässt sich dann vollständig auswerthen, bis auf die drei zunächst willkürlich bleibenden Bestimmungsstücke, die als die statisch unbestimmten Grössen des Problems anzusehen sind. Man differentiirt nun A partiell nach jeder dieser drei Grössen und setzt die Differentialquotienten gleich Null. Damit erhält man drei Gleichungen, deren Auflösung die drei statisch unbestimmten Grössen liefert, womit der zu erwartende Gleichgewichtszustand des Gewölbes vollständig bekannt wird.

Hiermit ist das Verfahren im Allgemeinen umschrieben. Auf die ausführliche Ausrechnung brauche ich mich hier nicht einzulassen; es genügt vielmehr, im Anschlusse an das Vorausgehende die Ableitung eines wenigstens näherungweise zutreffenden Satzes zu geben, der von Winkler aufgestellt wurde und der einen raschen Ueberblick darüber gestattet, welche Stützlinie ungefähr zu erwarten ist.

Das erste Glied in dem Ausdrucke für A ändert sich nämlich von einer Stützlinie zur anderen verhältnissmässig nur wenig. Für alle Stützlinien, die hierbei überhaupt in Frage kommen können, weichen die zu gegeben Fugen gehörigen Fugendrücke R nicht allzuviel von einander ab. Anders ist es dagegen mit dem zweiten Gliede, da die Abstände u der Druckmittelpunkte von den Fugenmitten und hiermit die Momente M bei verschiedenen Stützlinien sehr verschieden ausfallen. Dabei ist das zweite Glied, wie man aus dem Ausdrucke $M = Ru$ erkennt, der Grösse nach im Allgemeinen durchaus mit dem ersten vergleichbar. Nur bei jenen Stützlinien, die etwa überall sehr nahe an der Mittellinie verlaufen, wird das zweite Glied klein gegenüber dem ersten. Sehen wir aber von diesem Falle vorläufig ab, so wird A besonders dadurch verkleinert werden können, dass man das stark veränderliche zweite Glied möglichst klein macht, während man das wenig veränderliche erste Glied für eine erste Annäherung unbeachtet lassen kann. Bei der als wahrscheinlich in Aussicht zu nehmenden Stützlinie wird daher der Ausdruck

$$\int \frac{M^2}{f^3} ds$$

zu einem Minimum werden.

Anstatt $M = Ru$ zu setzen, wie es vorher geschehen war, kann man sich von der Fugenmitte aus eine Strecke z in lothrechter Richtung bis zur Richtungslinie von R gezogen denken und R im Endpunkte von z in eine horizontale und eine vertikale Componente zerlegen. Die horizontale Componente ist der constante Horizontalschub H des Gewölbes und deren Moment ist gleich Hz, während das Moment der Vertikalcomponente in Bezug auf den Fugenmittelpunkt verschwindet. Man hat daher auch $M = Hz$ und der Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll, geht über in

$$H^2 \int \frac{z^2}{f^3} ds.$$

Auch der Horizontalschub H zeigt bei den verschiedenen Stützlinien, die mit einander zu vergleichen sind, keine grossen Abweichungen, während der zweite Faktor des Produkts stark veränderlich ist. Nimmt man überdies an, dass die Wölbstärke f constant sei, so wird demnach ungefähr jene Stützlinie zu Stande kommen, für die

$$\int z^2 ds$$

den möglichst kleinen Werth annimmt. Dieser Ausdruck hat aber eine einfache Bedeutung: er stellt die Summe der Quadrate der in lothrechter Richtung gemessenen Abweichungen zwischen

Bogenmittellinie und Stützlinie dar und kann geradezu als ein Maass für die gesammte Abweichung zwischen beiden Linien betrachtet werden. Wir können demnach mit Winkler den Satz aussprechen, dass unter den angegebenen Voraussetzungen jene Stützlinie nahezu die richtige ist, die sich der Bogenmittellinie so eng als möglich anschliesst.

Gewöhnlich nimmt man freilich die Wölbstärke f nicht constant an, sondern macht sie im Scheitel am kleinsten und lässt sie von da aus nach den Kämpfern hin etwas zunehmen, weil auch der Fugendruck R in dieser Richtung hin zunimmt. Bezeichnet man die Horizontalprojektion des Bogenelementes ds mit dx, so nimmt für gleiche dx auch ds vom Scheitel nach den Kämpfern hin zu. Für den Fall, dass sich f^3 gerade proportional mit $\frac{ds}{dx}$ ändert, dass also

$$f^3 = f_0^3 \frac{ds}{dx}$$

ist, wenn f_0 die Scheitelstärke bezeichnet, erhält man für den Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll,

$$\frac{H^2}{f_0^3} \int z^2 dx,$$

d. h., da H nicht merklich veränderlich und f_0 constant ist, muss

$$\int z^2 dx$$

möglichst klein werden und auch dieses Resultat kann ähnlich gedeutet werden, wie das vorhergehende.

Wird die Mittellinie des Bogens so gewählt, dass sie selbst mit einem zur Belastungsfläche gehörigen Seilpolygone zusammenfällt, also eine der statisch möglichen Stützlinien darstellt, so kann sich nach den vorausgehenden Betrachtungen die wahre Stützlinie nicht viel von der Mittellinie entfernen. Für die Mittellinie selbst als Stützlinie wird nämlich $\int z^2 ds$ oder auch $\int z^2 dx$ zu Null und daher zu einem Minimum, da sich beide Integrale aus lauter positiven Gliedern zusammensetzen und daher niemals negativ werden können. Man darf daraus nun freilich nicht schliessen, dass die wahre Stützlinie unter den bezeichneten Umständen genau mit der Mittellinie zusammenfalle. Bei den in nächster Nähe der Mittellinie verlaufenden Stützlinien wird nämlich das zweite Glied in dem Ausdrucke für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12\,M^2}{f^3}\right) ds$$

überhaupt sehr klein und es kommt dann wesentlich auf die, wenn auch an sich nicht sehr erheblichen, Aenderungen des alsdann viel grösseren ersten Gliedes an. Man kann auch leicht sagen, in welchem Sinne eine Abweichung der wahren Stützlinie von der Mittellinie in diesem Falle zu erwarten ist. Je steiler nämlich die Stützlinie verläuft, um so kleiner wird der Horizontalschub H und mit ihm auch jedes R. Die Abweichung wird also nach der Richtung der Drucklinie des kleinsten Horizontalschubs hin erfolgen. Sehr gross kann aber diese Abweichung andererseits niemals werden, weil sich sonst sofort ein starkes Anwachsen des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für A herausstellen müsste, das weit mehr ausmachte, als die Verkleinerung, deren das erste Glied fähig ist.

Diese Betrachtung liefert das für die praktische Beurtheilung des Gewölbegleichgewichts sehr werthvolle Resultat, dass die elastischen Formänderungen des Gewölbes in Folge der Belastung die Stützlinie so verschieben, dass sie sich ziemlich eng an die Mittellinie anschliesst, so weit dies durch die Gestalt des Gewölbes ermöglicht ist. Zugleich lehrt sie, dass es vortheilhaft ist, die Gestalt der Wölbmittellinie, deren Wahl dem Constructeur häufig frei steht, so zu bestimmen, dass sie mit einer Seilcurve für die Belastungsfläche zusammenfällt.

§ 60. Vereinfachte Berechnung der Gewölbe.

Die genauere Berechnung der Gewölbe auf Grund der Elasticitätstheorie, die vorher nur in allgemeinen Umrissen beschrieben wurde, macht ziemlich viel Mühe und lohnt sich nur bei besonders grossen und wichtigen Ausführungen. Da man aber bei diesen jetzt meist Gelenke einschaltet, wird sie auch hier in der Regel entbehrlich. Bei kleineren Ausführungen macht man das Gewölbe lieber etwas stärker, als eigentlich nöthig wäre und behilft sich dafür bei der Stabilitätsuntersuchung mit einer vereinfachten Berechnung. Man kann es auf Grund der zahlreichen Erfahrungen, die in dieser Hinsicht vorliegen, als verbürgt betrachten, dass ein Gewölbe, das den üblichen Vorschriften genügt, hinreichend sicher ist.

Wenn ein Gewölbequerschnitt sammt Belastungsfläche gegeben ist, zeichnet man zunächst eine Stützlinie, die durch die Mitten der Scheitelfuge und der beiden Kämpferfugen geht. Hierauf überzeugt man sich, ob diese willkürlich gewählte Stützlinie nicht nur überall innerhalb des Gewölbequerschnitts verläuft, sondern ob sie sich auch keiner Kante um mehr als bis auf ein Drittel der betreffenden Fugenlänge nähert. Dies sieht man nämlich als nöthig an, theils um einen gewissen Ueberschuss an Sicherheit zu erlangen, theils um eine Zugbeanspruchung des Mörtels und ein bei dessen Versagen zu befürchtendes Aufklaffen der Fuge zu verhüten. Hierauf berechnet man nach den früher gegebenen Formeln die grösste auftretende Kantenpressung und vergleicht sie mit der als zulässig zu betrachtenden Druckbeanspruchung des Materials. Wird diese nirgends überschritten und ist die vorher genannte Bedingung erfüllt, so betrachtet man das Gewölbe an sich als vollkommen sicher.

Ergibt sich bei dieser Berechnung, dass die Kantenpressung überall erheblich kleiner bleibt, als die zulässige Materialbeanspruchung, so schliesst man, dass das Gewölbe unnöthig stark ist und hält eine Verkleinerung der Wölbstärke für angezeigt. Findet man umgekehrt, dass die zuerst gezeichnete Stützlinie nicht überall innerhalb des mittleren Fugendrittels verläuft, so kann man, namentlich für den Fall einer unsymmetrischen Belastung, zunächst versuchen, ob sich die Stützlinie durch eine Aenderung in der Annahme der Druckmittelpunkte in Scheitel- und Kämpferfugen so verschieben lässt, dass sie nachher überall innerhalb des mittleren Drittels bleibt. Lässt sich dies erreichen und wird die Kantenpressung für die neu gezeichnete Stützlinie nicht zu gross, so ist das Gewölbe immer noch als hinreichend sicher für die gegebene Belastung anzusehen. Im anderen Falle muss man entweder die zuerst in Aussicht genommene Gewölbeform entsprechend abändern oder die Wölbstärken vergrössern, bis den gegebenen Vorschriften genügt ist.

Hiermit ist die Untersuchung aber noch nicht abgeschlossen. Man muss nun auch noch die Druckübertragung in den Pfeilern oder Widerlagsmauern verfolgen, am einfachsten, indem man die Stützlinien in diese hinein fortführt (durch Zusammensetzung des Kämpferdruckes des Gewölbes mit den Mauergewichten des Widerlagers). Auf diese Weise gelangt man entweder unten zu ausgedehnten Mauermassen, deren Standsicherheit ohne Weiteres feststeht oder zur Fundamentsohle. Der Druck auf die Fundamentsohle wird ebenfalls berechnet und mit der zulässigen Belastung des Baugrundes, die gewöhnlich durch baupolizeiliche Bestimmungen vorgeschrieben ist, verglichen.

Ausserdem ist noch auf die verschiedenen Belastungsarten zu achten, die bei dem fertigen Bauwerke vorkommen können. Man hat den Nachweis zu führen, dass für jede Belastungsweise, die als möglich in Aussicht zu nehmen ist, die vorher besprochenen Bedingungen erfüllt sind. Freilich ist, wie ich schon früher bemerkte, die Verkehrslast gewöhnlich nicht sehr erheblich gegenüber der Eigenlast des Gewölbes und seiner Uebermauerung oder Ueberschüttung. Daher genügt es in der Regel, ausser der grössten Belastung, die das Gewölbe zu tragen hat, nur noch jenen Belastungsfall ins Auge zu fassen, bei dem die eine Gewölbehälfte möglichst viel, die andere möglichst wenig belastet ist.

Einige Beispiele für die Ausführung der Berechnung findet man unter den Aufgaben.

§ 61. Die Kuppelgewölbe.

Die Kuppel unterscheidet sich in ihrem statischen Verhalten von dem Tonnengewölbe wesentlich dadurch, dass ausser den Fugenpressungen in den Lagerfugen, deren Angriffspunkte im Gewölbequerschnitte in ihrer Aufeinanderfolge die Stützlinie bilden, auch noch Fugenpressungen in den Meridianschnitten vorkommen. Früher suchte man zwar die Theorie der Kuppelgewölbe dadurch auf die Theorie der Tonnengewölbe zurückzuführen, dass man einen zwischen zwei unendlich benachbarten Meridianschnitten liegenden Kuppelsektor mit einem Abschnitte eines Tonnengewölbes verglich. Man nahm hierbei keine Rücksicht auf die Fugenpressungen in den Meridianschnitten (oder in den „Stossfugen“), setzte dagegen voraus, dass im Scheitel ein Horizontalschub auftrete, wie bei einem Tonnengewölbe. Dies war aber, wie Moseley zuerst zeigte, irrig. Endet nämlich zunächst das Kuppelgewölbe oben in einen Nabelring, so fehlt dem Kuppelsektor am oberen Ende überhaupt jede Stützung und er müsste nothwendig herabfallen, wenn er für sich allein ausgeführt wäre. Man erkennt hieraus schon, dass die Fugenpressungen in den Meridianschnitten zwischen den benachbarten Kuppelsektoren im Gegensatze zum Tonnengewölbe eine sehr wesentliche Rolle spielen und zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts durchaus unentbehrlich sind.

Aber auch wenn das Kuppelgewölbe oben geschlossen ist, kann kein Horizontalschub am oberen Ende des Kuppelsektors auftreten. Der Kuppelsektor endet nämlich im Scheitel in einer Kante oder, wie wir auch sagen können, in einer Fläche, deren Inhalt gleich Null ist. Da unendlich grosse specifische Spannungen nicht übertragen werden können, wird mit dem Flächeninhalte Null auch der in dieser Fläche übertragene Druck zu Null. Auf die Uebertragung eines Horizontalschubs im Scheitel des Kuppelsektors, der dessen Gleichgewicht in ähnlicher Weise wie bei einem Tonnengewölbe aufrecht erhalten könnte, ist daher in keinem Falle zu rechnen.

Dagegen setzen sich die in je zwei entsprechenden Flächentheilen beider Meridianschnitte übertragenen Stossfugendrücke zu einer horizontalen Resultirenden zusammen, die der Symmetrie wegen in die Mittelebene des Kuppelsektors fällt. Diese horizontal nach aussen hin gehenden Resultirenden treten hier an die Stelle des Horizontalschubs im Scheitel. Dabei besteht aber gegenüber dem Tonnengewölbe immer noch der Unterschied, dass sich diese Resultirenden über die ganze Mittelebene des Kuppelsektors nach einem zunächst unbekannten Gesetze vertheilen und nicht im Scheitel concentrirt sind.

Hieraus folgt auch, dass die Stützlinie beim Kuppelgewölbe keineswegs ein Seilpolygon zu den Lasten des Kuppelsektors bildet. Vielmehr ist jede beliebig im Gewölbequerschnitte gezogene Linie als Stützlinie statisch möglich, falls nur die in den Meridianschnitten übertragenen Ringspannungen (oder Stossfugendrücke) passend dazu gewählt werden. Das Gleichgewicht im Kuppelgewölbe ist daher unendlichfach statisch unbestimmt.

Natürlich gilt auch hier, wie bei den Tonnengewölben, wenn man auf die elastischen Eigenschaften des Wölbmaterials Rücksicht nimmt, der Satz, dass jener Gleichgewichtszustand in Wirklichkeit zu erwarten ist, für den die Formänderungsarbeit zu einem Minimum wird. Dies wird nahezu jener sein, bei dem sich die Stützlinie so eng als möglich an die Mittellinie des Gewölbequerschnitts anschliesst. Nun kann sich die Stützlinie hier bei jeder Gestalt des Gewölbequerschnitts mit der Mittellinie decken. Man nimmt also bei der Ausführung der Berechnung zunächst die Stützlinie als zusammenfallend mit der Mittellinie an und bestimmt die aus dieser Annahme folgenden Spannungen in den Meridianschnitten, die man sich der Gewölbedicke nach ebenfalls gleichförmig vertheilt zu denken hat. Hierbei stellt sich nun bei den gewöhnlich ausgeführten Kuppelformen heraus, dass in den Meridianschnitten im oberen Theile Druckspannungen, weiter unten hin dagegen Zugspannungen zu übertragen wären, um den zunächst in Aussicht genommenen Gleichgewichtszustand zu verwirklichen.

Der Mörtel kann aber grössere Zugspannungen nicht übertragen und in der That hat man auch bei vielen der berühmtesten Kuppelbauten die Erfahrung gemacht, dass sich in den unteren Theilen der Kuppel Risse einstellten, die in der Richtung der Stossfugen (oder der Meridianschnitte) verlaufen. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, hat man gewöhnlich nachträglich eiserne Reifen um die unteren Theile der Kuppel gelegt, die diese ähnlich zusammenhalten, wie die Reifen ein Fass. Man erreichte dadurch, dass nun in der That in den Meridianschnitten Zugspannungen übertragen werden konnten, zwar nicht mehr im Mauerwerke selbst, sondern in den eisernen Reifen, die dafür eintraten.

Will man, dass das Gleichgewicht der Kuppel auch ohne eine Verstärkung durch Eisenringe gesichert sei, so muss man von jener Stelle ab, wo sonst die Zugspannungen einsetzen würden, die Stützlinie nach abwärts ohne Heranziehung der Ringspannungen fortsetzen. Im unteren Theile ist dann die Stützlinie wieder ein Seilpolygon zu den Lasten des Kuppelsektors. Sie ist ferner auch in die Widerlagsmauern der Kuppel hinein fortzusetzen. Entspricht die in dieser Weise ermittelte Stützlinie überall denselben Forderungen, wie sie schon beim Tonnengewölbe erhoben wurden, so kann das Gleichgewicht der Construction auch ohne Zuhülfenahme einer Verstärkung durch Eisenringe als gesichert gelten.

Bei allen diesen Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass die Kuppel einen Rotationskörper bilde und dass auch die Lasten, die sie zu tragen bestimmt ist, symmetrisch um die Rotationsaxe herum vertheilt seien. Für andere Belastungsfälle, etwa für den, dass die eine Hälfte der Kuppel stärker belastet ist, als die andere, hat man bisher, soweit mir bekannt ist, keine Theorie aufgestellt. Diese müsste auch jedenfalls viel verwickelter und schwieriger sein, als für den Fall der symmetrischen Belastung.

In Abb. 152 ist die vorher besprochene Construction für eine oben geschlossene Kuppel durchgeführt, die nur ihr eigenes Gewicht zu tragen bestimmt ist. Der Kuppelquerschnitt wurde durch Fugen, die rechtwinklig zur Mittellinie gezogen sind

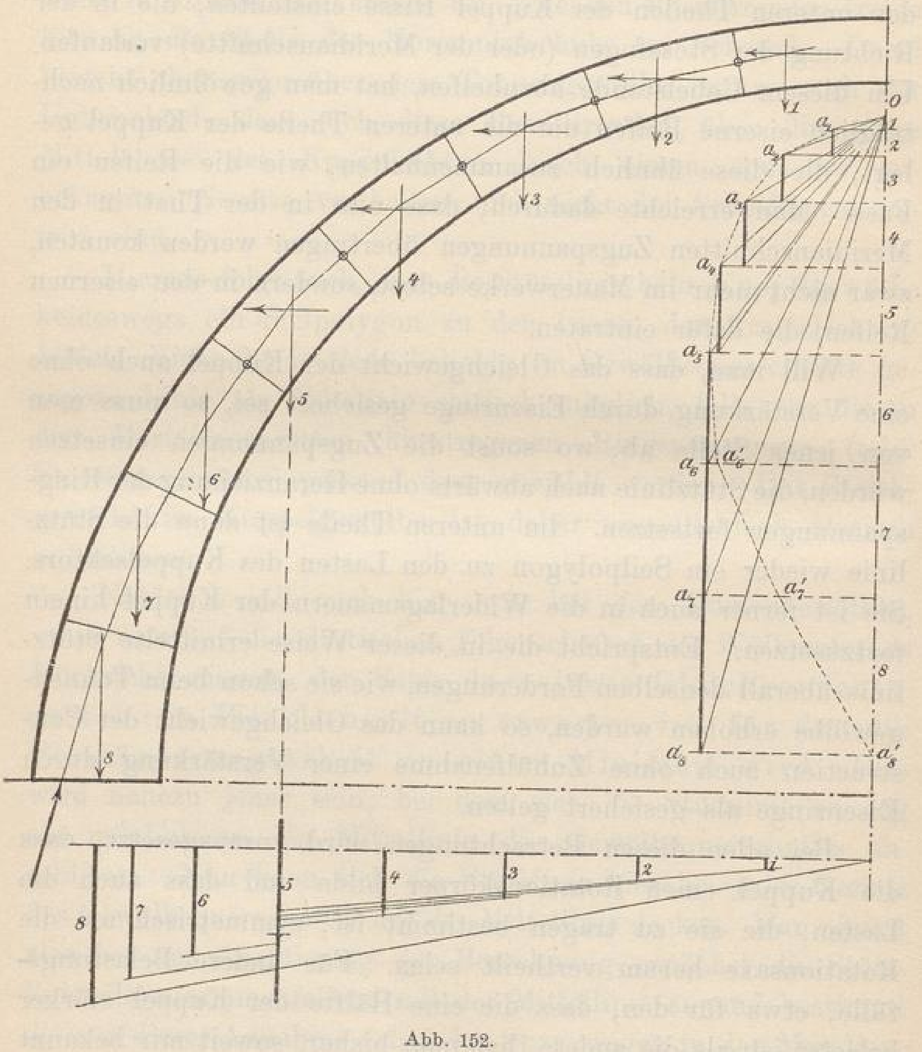

Abb. 152.

und deren längs der Mittellinie gemessenen Abstände gleich gross gewählt wurden, in acht Abschnitte eingetheilt. Die zu diesen Abschnitten gehörigen Gewichte im Kuppelsektor verhalten sich zu einander wie die Produkte aus den mittleren Wölbstärken und den Entfernungen der Schwerpunkte von der Kuppelaxe. Das dem Abschnitte 5 entsprechende Gewicht wurde im Kräfteplane durch die mittlere Wölbstärke dieses Abschnitts dargestellt. Um die Gewichte der übrigen Abschnitte im gleichen Maassstabe auftragen zu können, mussten deren mittlere Wölbstärken im Verhältnisse der Schwerpunktsabstände zum Schwerpunktsabstande des fünften Abschnitts verkleinert oder vergrössert werden. Dies ist im unteren Theile der Figur, der keiner weiteren Erläuterung bedarf, ausgeführt worden.

Die Linien 1, 2 u. s. f. im Kuppelquerschnitte sind durch die Schwerpunkte der betreffenden Abschnitte des Kuppelsektors zu ziehen, die etwas weiter nach aussen hin liegen, als die Schwerpunkte der zugehörigen Abschnitte des Kuppelquerschnitts. Indessen macht sich der Unterschied nur bei den oberen Abschnitten stärker bemerklich; bei den tiefer liegenden ist er unerheblich.

Im oberen Theile soll die Stützlinie mit der Mittellinie zusammenfallen. Ferner kann angenommen werden, dass sich die Ringspannungen innerhalb jedes Abschnitts gleichförmig über die Fläche vertheilen. Die in der Mittelebene des Kuppelsektors liegende Resultirende der in den beiden Meridianschnitten übertragenen Ringspannungen ist daher durch den Schwerpunkt des zugehörigen Querschnittstheiles horizontal nach aussen hin zu ziehen. Der Schnittpunkt dieser Resultirenden für den obersten Abschnitt mit der Richtungslinie des Gewichtes 1 ist mit der Mitte der nächsten Lagerfuge zu verbinden. Die Verbindungslinie gibt die Richtung des zugehörigen Fugendruckes an. Da das Gewicht 1 bekannt ist, liefert das Dreieck, dessen Hypotenuse Oa_1 und dessen vertikale Kathete 1 ist, im Kräfteplane sofort die Grösse des Fugendrucks und die Resultirende aus den Ringspannungen.

Dann geht man zum Abschnitte 2 über, setzt dessen Gewicht mit dem von oben kommenden Lagerfugendrucke zusammen, ermittelt den Schnittpunkt der Resultirenden mit der

Resultirenden der Ringspannungen für diesen Abschnitt (in der Abbildung gehen die Richtungslinien der drei Kräfte zufällig fast genau durch einen Punkt) und verbindet den Schnittpunkt mit der nächstfolgenden Fugenmitte. Dadurch werden die Richtungen aller am Abschnitte 2 angreifenden Kräfte bekannt. Auch die Grössen der beiden bis dahin noch unbekannten folgen ohne Weiteres aus dem Kräfteplane. Der Fugendruck auf die untere Fuge wird durch die Strecke Oa_2, die Resultirende aus den Ringspannungen durch die horizontale Componente der Strecke $a_1 a_2$ angegeben. In derselben Weise setzt man die Construction weiter nach unten hin fort.

Wenn man zum fünften Abschnitte gelangt ist, bemerkt man, dass die Resultirende aus den Ringspannungen, die durch den horizontalen Abstand von a_4 und a_5 im Kräfteplane dargestellt wird, nur noch sehr klein ist. Beim sechsten Abschnitte würde diese Resultirende negativ (nach innen zu gerichtet) werden, d. h. es müssten Zugspannungen in den Meridianschnitten auftreten, wenn man die Stützlinie hier immer noch mit der Mittellinie zusammenfallen lassen wollte. Wir nehmen daher an, dass im sechsten, siebenten und achten Abschnitte überhaupt keine Ringspannungen mehr auftreten und setzen nur jedesmal den von oben her kommenden Fugendruck mit dem Gewichte des Abschnitts zusammen. Hierdurch erhält man den unteren Theil der Stützlinie, auf dessen Gestalt es vorwiegend ankommt.

Sitzt die Kuppel auf einer Mauertrommel, so ist die Stützlinie in diese hinein fortzusetzen, indem man den von der Kuppel herrührenden Fugendruck mit dem Gewichte des Trommelsektors zusammensetzt. Zu dessen Darstellung im Kräfteplane ist natürlich von derselben Construction Gebrauch zu machen, die schon bei den Kuppelabschnitten verwendet wurde. Ringspannungen sind in der Mauertrommel ausser Ansatz zu lassen.

Will man ferner durch Umlegen von eisernen Reifen vermeiden, dass die Trommel durch einen Horizontalschub der Kuppel beansprucht wird, so ist die Grösse der Kräfte, die von den Eisenreifen aufzunehmen sind, ebenfalls aus dem Kräfteplane zu entnehmen. Man setzt dann die Stützlinie auch im unteren Theile längs der Mittellinie fort, wozu die Punkte a_6', a_7' und a_8' im Kräfteplane gehören. Die horizontalen Componenten der Strecken $a_5 a_6'$, $a_6' a_7'$ und $a_7' a_8'$ geben nach einer sofort vorzunehmenden einfachen Umrechnung die von den Eisenreifen aufzunehmenden Ringspannungen an.

Für diese Umrechnung nehme man an, dass der Winkel zwischen den beiden Meridianebenen, die den betrachteten Kuppelsektor begrenzen, $d\alpha$ sei. Die Länge eines Abschnittes der Mittellinie zwischen zwei aufeinanderfolgenden Fugen in der natürlichen Grösse gemessen sei l, der Schwerpunktsabstand des fünften Abschnittes von der Kuppelaxe s, der Maassstab der Zeichnung $\frac{1}{n}$ und das Gewicht der Raumeinheit des Mauerwerks γ. Dann sind die Gewichte im Kräfteplane so aufgetragen, dass die Längeneinheit ein Mauervolumen $nlsd\alpha$ und daher eine Kraft von der Grösse $nls\gamma d\alpha$ vorstellt. Nun gibt die Strecke $a_7 a_7'$ die Resultirende der zum siebenten Abschnitte gehörigen Ringspannungen in diesem Maassstabe an. Die Ringspannungen selbst stehen senkrecht zu den beiden Meridianebenen, die den Kuppelsektor begrenzen und bilden einen Winkel mit einander, der um $d\alpha$ von einem Gestreckten abweicht. Ihre Resultirende ist gleich der Grösse von einer von ihnen, multiplicirt mit $d\alpha$. Umgekehrt wird daher die in einem Theile des Meridianschnitts übertragene Ringspannung aus jener Resultirenden durch Streichen des Faktors $d\alpha$ gefunden. Hiernach bedeutet die Längeneinheit der Strecke $a_7 a_7'$ im Kräfteplane eine von den Eisenreifen aufzunehmende Ringspannung von der Grösse $nls\gamma$. Wäre also z. B. $a_7 a_7'$ gleich 1 cm oder 0,01 m, der Maassstab der Zeichnung $1 : n$ gleich $1 : 100$, $l = 2$ m, $s = 9$ m und das Gewicht von 1 m^3 Mauerwerk gleich 2000 kg, so würde die Ringspannung im siebenten Abschnitte gleich $100 \cdot 0{,}01 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2000$ oder gleich 36000 kg zu setzen sein. — Aehnlich ist auch bei allen anderen Umrechnungen zu verfahren, z. B. wenn man die Knotenpressungen in einer Fuge ermitteln will. Der zunächst einzuführende Faktor $d\alpha$ hebt sich dann jedesmal wieder heraus.

Bei diesem Beispiele wurde vorausgesetzt, dass die Kuppel nur ihr eigenes Gewicht zu tragen habe. Kommt noch eine Belastungsfläche hinzu, so erhöhen sich die Gewichte der einzelnen Abschnitte entsprechend, während das Verfahren im Uebrigen genau so beizubehalten ist.

Auch dann übrigens, wenn die Kuppel thatsächlich nur ihre Eigenlast aufnehmen soll, thut man, wie Autenrieth in einer Besprechung des vorher geschilderten Verfahrens ganz zutreffend hervorgehoben hat, besser daran, sie unter der Voraussetzung zu berechnen, dass ihr überdies noch eine passend gewählte fremde Last (in symmetrischer Vertheilung um die Kuppelaxe) aufgebürdet sei. Im anderen Falle würde nämlich jeder Maassstab für die Bemessung der erforderlichen Wölbstärke fehlen. Macht man nämlich die Kuppel schwächer (namentlich in ihrem oberen Theile), so vermindern sich die Lasten in demselben Maasse wie die Fugenflächen und die Beanspruchung des Materials bleibt dieselbe. Mit Rücksicht auf zufällige Umstände, die eine andere Art der Belastung herbeiführen könnten, ist aber die Kuppel mit grösserer Wölbstärke trotzdem als sicherer zu betrachten, als die mit schwächerer Wölbstärke. Man trägt dem am besten durch Annahme einer etwa gleichförmig vertheilten zufälligen Belastung Rechnung. Dann ergibt sich, wie gross die Wölbstärke etwa im Scheitel zu wählen ist, damit die Druckbeanspruchung des Materials nicht zu gross ausfällt. — Die Beanspruchung im Scheitel ergibt sich übrigens aus der horizontalen Componente von Oa_1 in derselben Weise wie vorher, da im Scheitel nur die Spannungen in den Meridianschnitten in Frage kommen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass auch Temperaturschwankungen von erheblichem Einflusse auf das Verhalten der Kuppel sein können. Sie werden sich, unter der Voraussetzung, dass sich die Temperatur der ganzen Kuppel gleichmässig ändert, zunächst vorwiegend darin äussern, dass die Stelle, von der ab die Stützlinie nicht mehr mit der Mittellinie zusammenfällt, etwas hinauf oder hinabrückt. Namentlich bei der Berechnung von eisernen Reifen, die etwa um den unteren Theil der Kuppel gelegt werden sollen, ist auf die Temperaturschwankungen Rücksicht zu nehmen, da der Ausdehnungscoefficient des Eisens von dem des Mauerwerks verschieden ist. Hier ist aber auf diese Dinge nicht weiter Rücksicht zu nehmen, da es sich für uns nur darum handeln kann, die Hauptgrundlagen der Theorie auseinander zu setzen.

§ 62. Die graphische Berechnung der durchlaufenden Träger.

Früher bildete die Theorie der durchlaufenden oder continuirlichen Träger eines der wichtigsten und mit besonderer Ausführlichkeit bearbeiteten Capitel der technischen Mechanik. Heute hat sie an Bedeutung verloren, theils weil man von der Ausführung durchlaufender Träger wegen der Schwierigkeit, die Höhenlagen der Stützpunkte genau einzuhalten und wegen des Einflusses ungleicher Temperaturänderungen mehr abgekommen ist, theils weil die in grösserem Maassstabe ausgeführten durchlaufenden Träger als Fachwerkbalken construirt und als solche berechnet werden. Immerhin verdient aber die Theorie der durchlaufenden vollwandigen Träger in ihren Grundzügen auch heute noch grosse Beachtung, da man immer noch häufig genug Gelegenheit hat, von ihr Gebrauch zu machen.

Die analytische Berechnung der durchlaufenden Träger bespreche ich in der Festigkeitslehre; ich verweise wegen ihr auf den dritten Band dieses Werkes. Hier handelt es sich im Wesentlichen nur um die von Mohr gelehrte graphische Methode, die sich auf den Umstand stützt, dass die elastische Linie eines Balkens mit Hülfe eines Seilpolygons gefunden werden kann. Im nächsten Paragraphen wird sich dann noch die Clapeyron'sche Gleichung der drei Momente daran schliessen, die am besten an dieser Stelle ihren Platz findet.

Zunächst möge es sich um den in Abb. 153 dargestellten Fall handeln. Ein Balken sei in drei Punkten A, B, C unterstützt. Die eine Oeffnung AB soll eine irgendwie vertheilte

Belastung — etwa eine gleichförmig vertheilte, wie in der Abbildung angenommen ist —, tragen, während die andere Oeffnung unbelastet sein soll. Es wird verlangt, die Momentenfläche zu construiren, ferner auch, was damit eng zusammenhängt, die Auflagerkräfte auf den drei Stützen und die Schwerkräfte V, die zu den einzelnen Querschnitten gehören, anzugeben.

Die Aufgabe ist statisch unbestimmt, so lange man den Träger als starr ansieht. Man bedenke, dass es überhaupt nicht möglich ist, die drei Stützpunkte A, B, C absolut genau in einer geraden Linie anzuordnen. Wäre nun der Träger genau geradlinig und starr, so könnte er nur auf zwei der drei nicht genau in einer Geraden angeordneten Stützpunkte aufruhen. Selbst wenn etwa der mittlere Stützpunkt nur um den millionten Theil eines Millimeters tiefer läge, als die Verbindungslinie der äusseren Stützpunkte, die ebenfalls als unverrückbar angesehen werden, könnte der Träger nur auf den äusseren Punkten aufruhen und die mittlere Stütze wäre als nicht vorhanden zu betrachten. Umgekehrt wäre es, wenn B etwas höher läge, als die Verbindungslinie AC. Es hinge also ganz von unvorhersehbaren Zufälligkeiten ab, wie sich die Last auf die einzelnen Stützen vertheilte und eine Berechnung wäre unmöglich.

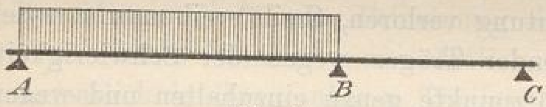

Abb. 153.

Anders ist es aber, wenn man auf die elastischen Formänderungen des Trägers achtet. Unter dem Einflusse der Belastung erfährt der Träger elastische Einsenkungen, die zwar an sich gering, aber doch genau verfolgbar sind. Jetzt macht es nur wenig aus, wenn der Punkt B um eine so kleine Strecke, wie vorher vorausgesetzt war, tiefer oder höher liegt, als die Verbindungslinie AC. Liegt B etwas tiefer, so legt sich der Balken nach einer geringfügigen Durchbiegung sofort auf B auf. Es ist jetzt nur nöthig, dass die unvermeidlichen Ungenauigkeiten in der Höhenlage der Stützpunkte klein gegen die Ordinaten der elastischen Linie sind, um die aus diesen

Zufälligkeiten hervorgehende Ungewissheit unschädlich zu machen. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist freilich eine zuverlässige Berechnung des durchlaufenden Trägers immer noch unmöglich und gerade dieser Umstand hat wesentlich dazu beigetragen, dass man sich von der Ausführung durchlaufender Träger, die früher viel üblicher war, wieder abgewendet hat. Es liegt nämlich in der That oft genug die Befürchtung vor, dass die Ungenauigkeit der Ausführung bei der Höhenlage der Stützpunkte von derselben Grössenordnung werden kann, wie die elastischen Einsenkungen des Trägers.

Jetzt nehme ich aber an, dass diese Ungenauigkeiten klein genug seien, um sie vernachlässigen zu können. Das Verhalten des Trägers wird dann eindeutig durch die Bedingung bestimmt, dass die elastische Linie stets durch die drei Auflagerpunkte A, B, C gehen muss.

Hierbei ist übrigens zu beachten, dass die Auflagerpunkte gegen jede Bewegung in senkrechter Richtung, also auch gegen ein Abheben von den Stützen festgehalten sein müssen. Wäre dies nicht der Fall, so würde sich bei dem in Abb. 153 angegebenen Belastungsfalle der Endpunkt C von der Stütze abheben und man hätte dann nur noch einen Träger über einer Oeffnung AB vor sich, an dessen elastische Linie sich der unbelastete und daher geradlinig bleibende Theil BC als eine Endtangente im Punkte B anschlösse. Hier wird dagegen vorausgesetzt, dass der Punkt C festgehalten sei. Zugleich erkennt man, dass hierzu ein negativer Auflagerdruck — oder ein „Auflagerzug“ — im Punkte C übertragen werden muss.

Ihrer allgemeinen Gestalt nach kann die zu dem Belastungsfalle in Abb. 153 gehörige Momentenfläche ohne Schwierigkeit angegeben werden. Man bedenke nämlich, dass die Stütze C auch entfernt werden kann, wenn man dafür nur eine senkrecht nach abwärts gerichtete Kraft an dem Trägerende anbringt, die so bemessen wird, dass sich der Punkt C nicht in senkrechter Richtung — weder nach oben, noch nach unten hin — verschiebt. Der dann nur noch auf den Stützen A

und B aufliegende Träger hat ausser den gegebenen Lasten der Spannweite AB noch die der Grösse nach vorläufig unbekannte Last an dem vorkragenden Ende C aufzunehmen. Das Biegungsmoment setzt sich daher an jeder Stelle aus zwei Theilen zusammen, von denen der eine von den gegebenen Lasten, der andere von der Einzellast im Punkte C herrührt.

Der erste Theil wird mit Hülfe eines Seilpolygons, durch das man die gegebenen Lasten verbindet, nach den Lehren des zweiten Abschnitts leicht gefunden. Ist die Belastung gleichförmig über die Spannweite AB vertheilt, so bildet dieser Theil der Momentenfläche einen Parabelabschnitt; aber auch bei anderer Lastvertheilung kann er immer leicht ermittelt werden. Jedenfalls ist das hierzu gehörige Moment innerhalb der Oeffnung AB überall positiv (nämlich so gerichtet, dass es eine Biegung des Balkens hervorruft, bei der sich die Hohlseite der elastischen Linie nach oben hin kehrt), während es an den Stützen A und B und auf der Strecke BC gleich Null ist.

Der von der Einzellast im Punkte C herrührende zweite Theil des Biegungsmoments ist im Gegensatze hierzu längs des ganzen Balkens AC negativ; nur an den Enden A und C wird er zu Null. Die zugehörige Momentenfläche wird, wie gleichfalls aus den Lehren des zweiten Abschnitts hervorgeht, ein Dreieck, dessen Ecken auf den drei Auflagervertikalen liegen.

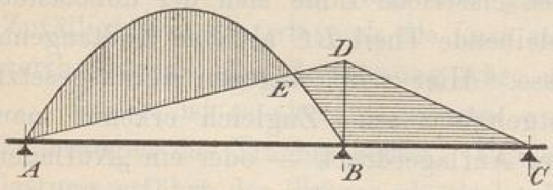

Abb. 154.

Setzen wir nun beide Theile zusammen, so erhalten wir im Ganzen eine Momentenfläche von der in Abb. 154 angegebenen Gestalt. Die von den gegebenen Lasten herrührende positive Momentenfläche sowohl, als das Dreieck ADC der negativen Momente sind dabei der besseren Vergleichbarkeit wegen von der Balkenaxe aus nach oben hin abgetragen. Innerhalb der Strecke AB kommt nur der Unterschied zwischen den positiven und den negativen Beiträgen zum Biegungsmomente in Betracht. Im Punkte E, wo sich die beiden Linien überschneiden, ist das Biegungsmoment Null, links von der durch E gezogenen Vertikalen überwiegt der positive, rechts davon der negative Beitrag. Die hiernach verbleibenden Flächen sind durch Schraffirung hervorgehoben und zwar die zu positiven Momenten gehörigen durch vertikale, die zu negativen gehörigen durch horizontale Schraffirung. Für jeden Punkt der Balkenaxe wird demnach das zugehörige Biegungsmoment nach Grösse und Vorzeichen durch den Abschnitt angegeben, der von einer durch diesen Punkt gezogenen Lothrechten in die schraffirten Flächen hineinfällt.

Um die Figur genau im Maassstabe zeichnen zu können, fehlt uns nur noch die Höhe BD des Dreiecks ADC, also das Biegungsmoment über der Mittelstütze. Dieses soll nun aus der Bedingung ermittelt werden, dass die elastische Linie durch die drei vorgeschriebenen Punkte A, B, C gehen muss.

Wir erinnern uns, dass die elastische Linie ein Seilpolygon bildet, dessen Belastungsfläche die Momentenfläche ist. Es ist dabei nicht nöthig, den Horizontalzug dieses Seilpolygons nach der dafür früher aufgestellten Formel zu wählen, denn wenn er anders angenommen wird, erhalten wir die elastische Linie nur in entsprechender Verzerrung. Das Maass der Verzerrung ist aber hier gleichgültig, denn an der Bedingung, dass die Ordinaten an den drei Punkten A, B, C zu Null werden müssen, wird dadurch nichts geändert.

Wir wollen ferner von der Seilcurve, die zu der Belastungsfläche in Abb. 154 gehört, nur die Tangenten an den drei Punkten A, B, C ins Auge fassen, da dies für unsere Zwecke schon genügt. Die Seilspannungen bei A und B müssen mit den Lasten, die dazwischen liegen und ebenso die bei B und C mit den zwischen ihnen liegenden Lasten im Gleichgewichte stehen. Auf dieser Bemerkung beruht die Lösung der Aufgabe.

Ueber BC bildet die Belastungsfläche ein Dreieck. Die Resultirende der durch sie dargestellten Lasten geht durch den Schwerpunkt des Dreiecks und die vertikale Schwerlinie kann sofort angegeben werden, wenn man auch von der Höhe des Dreiecks noch nichts weiss; sie muss nämlich jedenfalls von B aus ein Drittel der Länge von BC auf BC abschneiden. Auf dieser der Lage nach bekannten Schwerlinie müssen sich die Tangenten der elastischen Linie in den Punkten B und C schneiden.

Ueber AB denken wir uns die Belastungsfläche wieder in die beiden Antheile zerlegt, aus denen sie vorher zusammengesetzt wurde. Der negative, durch das Dreieck ABD dargestellte Antheil liefert wieder eine nach oben gekehrte Resultirende, die durch den Schwerpunkt des Dreiecks geht, also ein Drittel der Spannweite AB von B aus auf AB abschneidet. Auch der positive Antheil kann durch eine Resultirende ersetzt werden, die durch den Schwerpunkt der betreffenden Fläche geht und nach abwärts gerichtet ist. Da als Beispiel eine gleichförmige Belastung der Oeffnung AB angenommen wurde, geht die Schwerlinie dieses Theiles der Belastungsfläche für die elastische Linie hier durch die Mitte; aber auch in jedem anderen Falle könnte diese Schwerlinie leicht gefunden werden.

Die durch die Punkte A und B gehenden Seilspannungen müssen im Gleichgewichte mit den beiden soeben angeführten Lasten stehen. Dabei ist zu beachten, dass die Richtungslinien beider Lasten bekannt sind, während man nur von der senkrecht nach abwärts gerichteten Last, die durch den Schwerpunkt des positiven Antheils der Momentenfläche geht, von vornherein die Grösse kennt. Auch die Grösse der nach oben gehenden Last zwischen B und C ist vorläufig unbekannt.

Dies hindert jedoch nicht, das zu den der Lage nach bekannten Lasten I, II, III gehörige Seilpolygon 1, 2, 3, 4 in Abb. 155 sofort auszuführen. Man ziehe von C aus den Seilstrahl 1 in beliebiger Richtung. Diese Linie kann als die Tangente an die in entsprechender Verzerrung aufgetragene Seilcurve im Punkte C aufgefasst werden. Der Seilstrahl 2, der die Tangente an dieselbe Seilcurve im Punkte B darstellt, schneidet sich mit 1 auf der gegebenen Richtungslinie I und folgt hieraus sofort. Um die Seilspannung 2 ferner mit der Last II zusammenzusetzen, beachten wir, dass sich 1 und 3 jedenfalls auf der Resultirenden der dazwischen liegenden Lasten I und II schneiden müssen. Wenn uns nun auch diese beiden Lasten der Grösse nach vorläufig nicht bekannt sind, so kennen wir doch ihr Verhältniss. Denn I stellt das senkrecht nach oben gehende Gewicht des Dreiecks BCD in Abb. 154 und II das von ABD dar und die beiden Dreiecksflächen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien AB und BC oder wie die beiden mit l_1 und l_2 in Abb. 155 bezeichneten Spannweiten. Die Resultirende der beiden parallelen

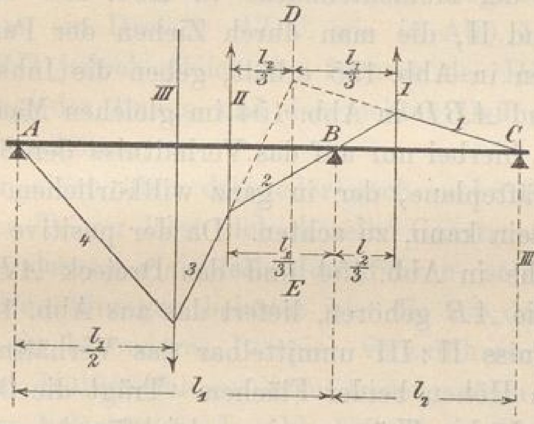

Abb. 155.

Abb. 156.

und gleich gerichteten Kräfte I und II liegt zwischen beiden und theilt den Abstand zwischen ihnen im umgekehrten Verhältnisse zu den Grössen beider Kräfte. Tragen wir daher $\frac{l_1}{3}$ von I aus nach links oder $\frac{l_2}{3}$ von II aus nach rechts hin ab, so erhalten wir die Richtungslinie DE der Resultirenden aus I und II. Wir brauchen jetzt nur 1 bis zum Schnittpunkte mit DE zu verlängern, um den durch diesen Punkt gehenden Seilstrahl 3 zu erhalten. Der Seilstrahl 4 endlich schneidet sich mit 3 auf der Richtungslinie von III und geht durch den Punkt A.

Von den vier Seilstrahlen des soeben construirten Seilpolygons haben nur 1, 2 und 4 eine unmittelbare Beziehung zur elastischen Linie des Balkens, indem sie deren Tangenten in den Punkten C, B, A unter der Voraussetzung einer entsprechend gewählten Verzerrung darstellen. Der Seilstrahl 3 ist nur zur Ermöglichung der Construction dazwischen geschoben und hat mit der elastischen Linie unmittelbar nichts zu thun.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, können wir nachträglich auch den ihm zugehörigen Kräfteplan in Abb. 156 zeichnen. Hierbei ist zu beachten, dass III auch der Grösse nach gegeben ist, indem es den von vornherein bekannten positiven Antheil der Momentenfläche in Abb. 154 darstellt. Die Strecken I und II, die man durch Ziehen der Parallelen zu den Seilstrahlen in Abb. 155 erhält, geben die Inhalte der Dreiecke BCD und ABD in Abb. 154 im gleichen Maassstabe an. Man braucht hierbei nur auf das Verhältniss der Strecken II und III im Kräfteplane, der in ganz willkürlichem Maassstabe gezeichnet sein kann, zu achten. Da der positive Antheil der Momentenfläche in Abb. 154 und das Dreieck ABD zur gleichen Grundlinie AB gehören, liefert das aus Abb. 156 entnommene Verhältniss II : III unmittelbar das Verhältniss der durchschnittlichen Höhen beider Flächen. Trägt die Oeffnung AB des durchlaufenden Trägers eine gleichförmig vertheilte Last, so ist der positive Antheil der Momentenfläche ein Parabelsegment, dessen durchschnittliche Höhe $\frac{2}{3}$ der grössten Höhe ausmacht. Bezeichnen wir daher die Pfeilhöhe dieser Parabel mit f, so ist die Höhe BD des Dreiecks ABD gleich $\frac{4}{3} f \cdot \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{III}}$. Nachdem BD auf diese Weise ermittelt ist, kann Abb. 154 sofort im richtigen Maassstabe aufgetragen werden. Ausserdem können, nachdem die Momentenfläche bekannt ist, auch die zugehörigen Auflagerkräfte oder die Scheerkräfte für gegebene Querschnitte unter Zuhülfenahme des zur Momentenfläche als Seilpolygon gehörigen Kräfteplanes leicht in von früher her bekannter Weise gefunden werden. Die zunächst gestellte Aufgabe ist hiermit als gelöst zu betrachten.

Hat der Träger in beiden Spannweiten gegebene Lasten aufzunehmen, so ermittelt man zuerst die Momentenfläche unter der Voraussetzung, dass nur eine Spannweite belastet, die andere unbelastet sei, wiederholt dann das Verfahren für den Fall, dass die zweite Oeffnung belastet und die erste unbelastet ist und addirt beide Momentenflächen zu einander. Die dem gegebenen Belastungsfalle entsprechende Momentenfläche setzt sich daher aus zwei positiven Antheilen zusammen, von denen zu jeder Spannweite einer gehört und die ebenso gross und ebenso gestaltet sind, als wenn diese Spannweite durch einen einfachen Träger überdeckt wäre, der die zugehörigen Lasten aufzunehmen hätte, sowie aus einem negativen Antheile, der wiederum ein Dreieck ADC, wie in Abb. 154 bildet, dessen Höhe BD jedoch gleich der Summe der Höhen ist, die zur Belastung der linken und der rechten Oeffnung für sich genommen gehören.

Für einen über drei oder noch mehr Oeffnungen durchlaufenden Träger lässt sich dieselbe Construction ohne wesentliche Aenderung gleichfalls durchführen, solange nur eine der beiden Endöffnungen belastet ist. Es ist daher nicht nöthig, hierfür ein besonderes Beispiel vorzuführen. Dagegen muss noch ein Hülfsverfahren dazu treten, wenn eine der Mittelöffnungen belastet ist. In Abb. 157 ist ein über drei Oeffnungen durchgehender Träger gezeichnet, dessen Mittelöffnung BC eine gleichförmig vertheilte Belastung aufnehmen soll, während die beiden Endöffnungen als unbelastet vorausgesetzt werden. An Stelle der gleichförmig vertheilten kann übrigens auch eine irgendwie anders angeordnete Belastung der Mittelöffnung treten, ohne dass sich darum die Betrachtung zu ändern brauchte.

Man denke sich die beiden Stützen A und D entfernt und die Auflagerkräfte durch passend gewählte Lasten ersetzt, die so zu bestimmen sind, dass die Punkte A und D keine Bewegung in vertikaler Richtung ausführen. Wenn diese Kräfte von vornherein bekannt wären, könnte man die Momentenfläche mit Hülfe eines Seilpolygons sofort construiren. Jedenfalls kennt man aber aus dieser Ueberlegung bereits die allgemeine Gestalt der Momentenfläche. Die Lasten an den Enden A und D des auf B und C gestützten Trägers bringen nämlich überall negative Momente hervor, die durch das Viereck $AEFD$ in Abb. 158 dargestellt werden. Dazu kommen die positiven, durch das Parabelsegment über BC dargestellten Momente, die

Abb. 157.

Abb. 158.

Abb. 159.

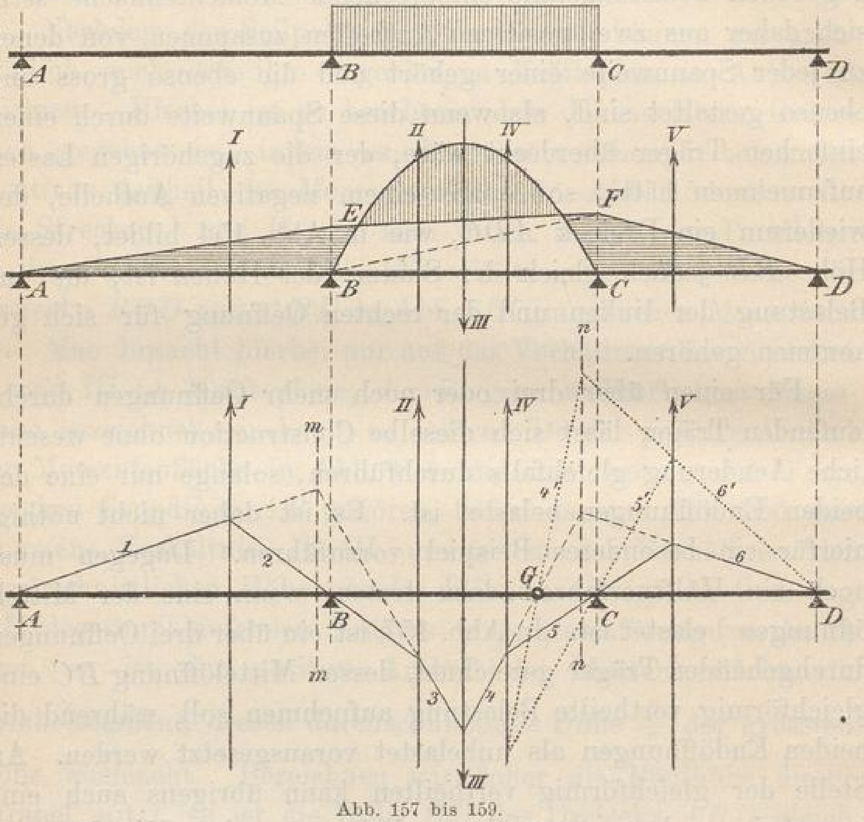

Abb. 157 bis 159.

durch die gegebenen Lasten in der Oeffnung BC unmittelbar hervorgerufen werden. Beide Momenflächen überschneiden sich wieder und die Unterschiede zwischen ihnen, die durch Schraffirung hervorgehoben sind, geben wie im früheren Falle, die im Ganzen auftretenden Biegungsmomente an. Um Abb. 158 richtig auftragen zu können, bleiben nur die Höhen BE und FC, d. h. die Momente über den Mittelstützen zu ermitteln.

Dies geschieht wieder auf Grund der Erwägung, dass die elastische Linie, die als Seilpolygon zur Momentenfläche als Belastungsfläche construirt werden kann, durch die vorgeschriebenen Punkte A, B, C, D gehen muss. Wir achten nur auf die durch diese Punkte gehenden Seilspannungen der in beliebiger Verzerrung gezeichneten Seilcurven, von denen wir wissen, dass sie mit den zwischen ihnen liegenden Lasten, die wir in geeigneter Weise zusammenfassen, im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Lasten für das „zweite" Seilpolygon sind in Abb. 158 eingetragen. In den beiden Endöffnungen kommt nur je eine Last in Frage, die durch den Schwerpunkt des zugehörigen Belastungsdreiecks geht. In der Mittelöffnung geht III durch den Schwerpunkt des Parabelsegments; diese Last ist von allen allein ihrer Grösse nach sofort bekannt, da sie durch die Fläche des Parabelsegments dargestellt wird. Das Trapez $BEFC$ vom negativen Antheile der Momentenfläche zerlegen wir durch die Diagonale BF in zwei Dreiecke und führen die nach oben gekehrten Lasten dieser Dreiecke gesondert ein. Wir erreichen dadurch, dass auch die Richtungslinien II und IV, die durch die Schwerpunkte der Dreiecke gehen, sofort angegeben werden können, wenn man auch die Inhalte der Dreiecke noch nicht kennt. Ebenso muss man übrigens auch verfahren, wenn eine Endöffnung belastet ist.

Wir tragen jetzt die hiermit ermittelten Richtungslinien der Lasten von I bis V in Abb. 159, die nichts mehr enthält, was noch als unbekannt anzusehen wäre, von Neuem ein. Zugleich ziehen wir die Linie mm als Richtungslinie der Resultirenden von I und II, die ebenso wie im früheren Falle gefunden wird, da sich auch jetzt die Lasten I und II oder die Dreieckflächen AEB und BEF in Abb. 158 wie die Spannweiten AB und BC zu einander verhalten müssen. Ebenso kann die Linie nn als Richtungslinie der Resultirenden aus IV und V gefunden werden, indem man den Abstand zwischen IV und V im umgekehrten Verhältnisse der Spannweiten BC und CD theilt, d. h. indem man den Abstand von C bis V von IV aus nach rechts hin aufträgt.

Wir zeichnen ferner das durch die vorgeschriebenen Punkte

A, *B*, *C*, *D* gehende Seilpolygon zu diesen Lasten, indem wir die Seilspannung 1 in beliebiger Richtung — entsprechend der beliebig zu wählenden Verzerrung der elastischen Linie — eintragen. Auf 1 folgen 2 und 3 sofort, da sich 1 und 3 auf *mm* schneiden müssen, während 2 durch *B* gehen muss. Die Fortsetzung 4, 5, 6 macht indessen zunächst einige Schwierigkeiten, da man vorerst nicht wissen kann, in welcher Richtung 4 weiter zu führen ist.

Man bedenke jedoch, dass die Richtungslinien von 4, 5, 6 ein Dreieck mit einander bilden müssen, das sechs vorgeschriebene Bedingungen zu erfüllen hat, wodurch es ausreichend gekennzeichnet wird. Die Seiten müssen nämlich durch drei vorgeschriebene Punkte gehen (4 durch den Schnittpunkt von 3 mit III, 5 durch *C* und 6 durch *D*) und die Ecken müssen auf drei gegebenen Graden liegen, die parallel zu einander sind, nämlich auf den Geraden IV, *nn* und V. Das Dreieck kann daher nach einem schon oft benutzten Verfahren ermittelt werden.

Wir zeichnen zuerst irgend ein Dreieck, das nur fünf der aufgezählten Bedingungen erfüllt. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Linie 6′ in beliebiger Richtung durch *D* und reihen daran in leicht ersichtlicher Weise die Seiten 4′ und 5′. Das Dreieck 4′5′6′ erfüllt nur die eine Bedingung nicht, dass 4′ durch den Endpunkt von 3 gehen sollte. Denkt man sich das Dreieck 4′5′6′ veränderlich, so dass es stets dieselben fünf Bedingungen erfüllt, so muss sich die Seite 4′ ebenfalls um einen festen Punkt drehen. Dieser Punkt *G* muss auf der Balkenaxe liegen, da eines der Dreiecke 4′5′6′ mit allen Punkten und Seiten auf die Balkenaxe fällt. Punkt *G* ist daher als Schnittpunkt von 4′ mit der Balkenaxe bekannt.

Auch das gesuchte Dreieck 456 bildet eines der Dreiecke 4′5′6′ und wir wissen jetzt, dass 4 durch den Punkt *G* zu ziehen ist. Nachdem dies geschehen ist, macht auch die Fortsetzung 5, 6 keine Schwierigkeiten mehr.

Von den Seilpolygonseiten 1 bis 6 sind 1, 2, 5, 6 Tangenten an die in entsprechender Verzerrung aufgetragene elastische

Linie in den Auflagerpunkten, während die dazwischen eingeschobenen Seiten 3 und 4 in keiner unmittelbaren Beziehung zur elastischen Linie stehen.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, kann man dazu, wie im früheren Falle, nachträglich den Kräfteplan zeichnen. Da die Last III ihrer Grösse nach bekannt ist, folgen daraus auch die Grössen der übrigen Lasten. — Hiermit findet man die Inhalte der Dreiecksflächen I, II, IV, V in Abb. 158, so dass dem richtigen Auftragen von Abb. 158 kein Hinderniss mehr im Wege steht. — Auch für den Fall, dass mehrere Oeffnungen belastet sind, kann man so verfahren, wie es schon vorher bei dem einfacheren Falle des über zwei Oeffnungen durchlaufenden Trägers auseinandergesetzt worden ist.

§ 63. Gleichung von Clapeyron.

Wenn jede Oeffnung des durchlaufenden Trägers nur eine gleichförmig vertheilte Belastung trägt, die aber bei den einzelnen Oeffnungen verschieden gross sein darf (und bei einigen daher auch gleich Null sein kann), erhält man die Biegungsmomente über den Stützen, die man zum Auftragen der Momentenfläche nöthig hat, auch sehr einfach auf analytischem Wege, mit Hülfe der von Clapeyron aufgestellten „Gleichung der drei Momente“.

Die Zahl der Oeffnungen kann jetzt beliebig gross sein. Wir denken uns zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen, die wir als die n-te und die $(n+1)$-te bezeichnen, herausgegriffen. Die positiven Antheile der Momentenflächen bestehen wieder aus Parabelabschnitten, die negativen aus Trapezen. Abb. 160 gibt den zu den beiden Oeffnungen gehörigen Theil der Momentenfläche an. Die Pfeilhöhen der Parabeln sind mit B_n und B_{n+1} bezeichnet. Trägt die n-te Oeffnung eine Belastung q_n für die Längeneinheit, so hat man für das Biegungsmoment B_n, das in der Mitte dieser Oeffnung entstehen würde, wenn diese durch einen einfachen Träger überdeckt wäre,

$$B_n = \frac{q_n l_n^2}{8} \text{ und ebenso } B_{n+1} = \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{8}. \qquad (86)$$

Die Momente M_n, M_{n+1} und M_{n+2} über den drei Stützen sind dagegen vorläufig unbekannt.

Im unteren Theile von Abb. 160 ist der zu den beiden Oeffnungen gehörige Abschnitt der elastischen Linie des Balkens gezeichnet. Wir wissen, dass die elastische Linie als ein Seilpolygon aufgefasst werden kann, dessen Belastungsfläche durch die Momentenfläche gebildet wird. Wie schon früher, ersetzen

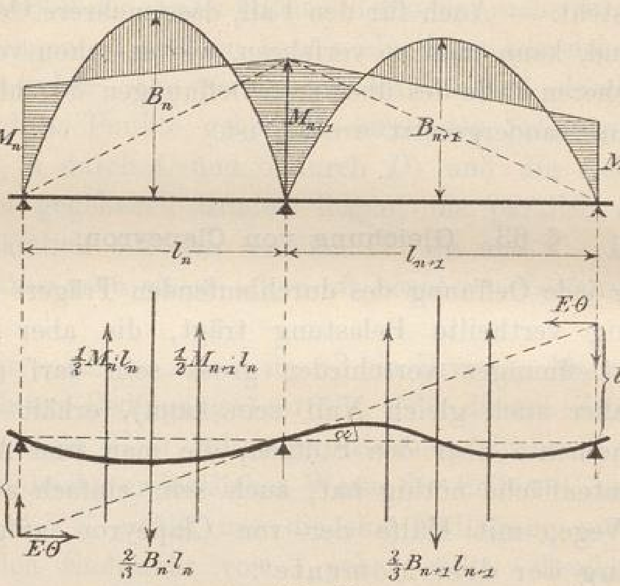

Abb. 160.

wir die zu jeder Oeffnung gehörigen Lasten durch drei Resultirende von bekannter Lage. In der n-ten Oeffnung erhalten wir die durch die Mitte der Spannweite nach abwärts gehende Belastung $\frac{2}{3} B_n l_n$, indem der Inhalt der Parabel gleich Zweidrittel von dem Produkte aus Grundlinie und Höhe ist. Freilich ist B_n nicht eigentlich selbst die Höhe der Parabel, sondern das Biegungsmoment, das aus der Ordinate der Momentenfläche durch Multiplikation mit dem Horizontalzuge H_{I} des ersten Seilpolygons gefunden wird. Wir können uns aber alle Lasten mit dem constanten Faktor H_{I} multiplicirt denken, falls wir dann nur auch den Horizontalzug H_{II} des zweiten Seilpolygons, der nach Gl. 27 (S. 107)

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{E\Theta}{H_{\mathrm{I}}}$$

ist, mit H_{I} multipliciren, ihn also gleich $E\Theta$ setzen. — Das Trapez mit den Seiten M_n und M_{n+1} zerlegen wir in zwei Dreiecke, deren Lasten mit $\frac{1}{2} M_n l_n$ und $\frac{1}{2} M_{n+1} l_n$ anzusetzen sind. Beide gehen nach oben hin und theilen die Spannweite l_n in drei gleiche Theile. Ebenso verfahren wir in der zweiten Oeffnung.

Die durch die n-te und die $(n+1)$-te Stütze gehenden Seilspannungen müssen mit den drei zuvor aufgeführten Lasten im Gleichgewichte stehen. Wir schreiben dafür eine Momentengleichung in Bezug auf den n-ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Die durch diesen Stützpunkt gehende Seilspannung fällt aus der Momentengleichung fort. Der Winkel, den die durch den $(n+1)$-ten Stützpunkt gehende Seilspannung mit der Horizontalen bildet, sei mit α bezeichnet. Wir verlegen den Angriffspunkt dieser Seilspannung auf die durch die n-te Stütze gehende Auflagervertikale und zerlegen sie dort in eine vertikale und eine horizontale Componente. Die vertikale Componente geht durch den Momentenpunkt und tritt daher nicht in die Momentengleichung ein. Die horizontale Componente ist der vorher schon zu $E\Theta$ festgestellte Horizontalzug des zweiten Seilpolygons. Dessen Moment ist gleich $-E\Theta l_n \operatorname{tg} \alpha$. Die Momente der drei Lasten lassen sich ebenfalls sofort anschreiben und im Ganzen erhält man daher

$$-E\Theta l_n \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} M_n l_n \cdot \frac{l_n}{3} + \frac{2}{3} B_n l_n \cdot \frac{l_n}{2}$$
$$- \frac{1}{2} M_{n+1} l_n \cdot \frac{2 l_n}{3} = 0.$$

Eine Momentengleichung von derselben Form schreiben wir ferner auch für die $(n+1)$-te Oeffnung und zwar in Bezug auf den $(n+2)$-ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Auch hier wird wieder die durch den $(n+1)$-ten Stützpunkt gehende Seilspannung zum Schnitte mit der durch den Momentenpunkt gehenden Vertikalen gebracht und dort in zwei Componenten zerlegt, von denen nur die Horizontalcomponente $E\Theta$ in die Momentengleichung eintritt. Die Gleichung lautet

$$-E\Theta l_{n+1}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}M_{n+2}l_{n+1}\cdot\frac{l_{n+1}}{3} - \frac{2}{3}B_{n+1}l_{n+1}\cdot\frac{l_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}M_{n+1}l_{n+1}\cdot\frac{2l_{n+1}}{3} = 0.$$

Wir wollen beide Gleichungen, nachdem die in ihnen vorkommenden Faktoren l_n bezw. l_{n+1} weggehoben sind und mit 6 multiplicirt ist, noch einmal unter einander schreiben. Sie lauten dann

$$\left.\begin{array}{l} -6E\Theta\operatorname{tg}\alpha - M_n l_n + 2B_n l_n - 2M_{n+1}l_n = 0, \\ -6E\Theta\operatorname{tg}\alpha + M_{n+2}l_{n+1} - 2B_{n+1}l_{n+1} \\ \qquad\qquad + 2M_{n+1}l_{n+1} = 0. \end{array}\right\} \quad (87)$$

Subtrahirt man sie von einander, so heben sich die mit dem unbekannten Winkel α behafteten Glieder gegen einander fort und nachdem man die Glieder passend geordnet hat, erhält man die Clapeyron'sche Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} M_n l_n + 2M_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + M_{n+2}l_{n+1} \\ \qquad = 2(B_n l_n + B_{n+1}l_{n+1}). \end{array}\right\} \quad (88)$$

Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten M_n, M_{n+1} und M_{n+2} besteht eine Gleichung von dieser Form, in der alle übrigen Grössen bekannt sind, da man für die B die dafür vorher schon aufgestellten Werthe einsetzen kann. Schreibt man alle diese Gleichungen für je zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen an, so erhält man ebenso viele Gleichungen als unbekannte Stützenmomente. Diese lassen sich daher durch Auflösen der Gleichungen ermitteln, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Bei einem Träger, der über nur zwei Oeffnungen durchgeht, sind z. B. die Momente M_n und M_{n+2} an den Enden gleich Null zu setzen und die Gleichung der drei Momente enthält nur noch das unbekannte Moment M_{n+1} über der

Mittelstütze, das daraus sofort gefunden werden kann. Bei einem Träger über drei Oeffnungen sind nur die Momente über der zweiten und der dritten Stütze unbekannt und die Gleichung kann zweimal angeschrieben werden, einmal für die erste und zweite und das nächste Mal für die zweite und dritte Oeffnung. Bezeichnet man allgemein die Zahl der Oeffnungen mit m, so ist die Zahl der unbekannten Stützenmomente gleich $(m-1)$ und ebenso viele Gleichungen lassen sich auch nach der Clapeyron'schen Formel ansetzen.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Enden frei aufliegen. Sollten diese eingespannt sein, so sind die zugehörigen Stützenmomente freilich nicht gleich Null zu setzen und man hat zwei Unbekannte mehr, als Gleichungen vorhanden sind. Dafür kann man aber in diesem Falle auch noch zwei neue Gleichungen angeben. Man nehme z. B. an, dass die $(n+1)$-te Oeffnung in Abb. 160 die letzte und der Träger über der Endstütze $(n+2)$ eingespannt sei. Dann muss auch die zugehörige Endtangente der elastischen Linie horizontal gerichtet sein. Schreibt man daher nun noch eine Momentengleichung für den $(n+1)$-ten Stützpunkt an, so hebt sich das Moment der letzten Seilspannung fort und man erhält unter dieser Voraussetzung

$$-\frac{1}{2} M_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{3} + \frac{2}{3} B_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} - \frac{1}{2} M_{n+2} l_{n+1} \cdot \frac{2 l_{n+1}}{3} = 0,$$

oder nach Wegheben der gemeinsamen Faktoren u. s. f.

$$M_{n+1} + 2 M_{n+2} = 2 B_{n+1} \tag{89}$$

und eine Gleichung von derselben Form gilt auch für die erste Oeffnung, wenn der Träger auch über der ersten Stütze eingespannt ist, nämlich

$$M_2 + 2 M_1 = 2 B_1. \tag{90}$$

Die Clapeyron'schen Gleichungen reichen daher in Verbindung mit diesen beiden auch bei eingespannten Enden aus, um alle unbekannten Stützenmomente zu berechnen. Sobald aber diese bekannt sind und die Momentenfläche mit ihrer Hülfe aufgetragen ist, kann man daraus auch alle übrigen Fragen, wie über die Grössen der Auflagerkräfte u. s. f. ohne Weiteres beantworten. Man muss sich hierzu nur erinnern, dass die Momentenfläche ein Seilpolygon zu den gegebenen Lasten und den zugehörigen Auflagerkräften bildet. Der Kräfteplan zu diesem Seilpolygone kann nachträglich gezeichnet werden und er liefert dann die Grössen der Auflagerkräfte. — Ausserdem lassen sich auch die Scheerkräfte V an jeder Stelle aus der Momentenfläche mit Hülfe der Gleichung $V = \frac{dM}{dx}$ ableiten.

Aufgaben.

37. Aufgabe. Für ein symmetrisch gestaltetes und symmetrisch belastetes Gewölbe soll eine Drucklinie eingezeichnet werden, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge geht.

Lösung. Die Hälfte des Gewölbequerschnitts ist in Abb. 161ᵃ gezeichnet; AB sei die Belastungslinie und BC die Symmetrieaxe. Man ziehe durch den Anfangspunkt F der inneren Wölblinie einen lothrechten Fugenschnitt DE und theile die zwischen DE und BC liegende Belastungsfläche in eine Anzahl lothrechter Streifen von gleicher Breite. In der Abbildung sind sechs Belastungsstreifen gewählt, eine Zahl, die schon ausreicht, um die einzelnen Streifen näherungsweise als unendlich schmal betrachten zu können und die andererseits auch noch nicht so gross ist, dass dadurch die Ausführung der Zeichnung erschwert würde. Die einzelnen Streifen können genau genug als Trapeze betrachtet werden, deren Schwerpunkte aufgesucht und durch kleine Kreise hervorgehoben wurden. Die durch diese Schwerpunkte gehenden Lasten 1, 2 u. s. f. sind wegen der gleichen Breite der Streifen den mittleren Höhen proportional. Im Kräfteplane, Abb. 161ᵇ wurden die Lasten durch $\frac{1}{6}$ der mittleren Streifenhöhe dargestellt. Hierauf wählt man einen Pol O beliebig und vereinigt die gegebenen Lasten durch das im unteren Theile von Abb. 161ᵃ gezeichnete Seileck SS. Durch den Schnittpunkt der äussersten Seilstrahlen geht die Schwerlinie a der ganzen Belastungsfläche. Ausserdem ermittelt man auch noch die Schnittpunkte der übrigen Seilstrahlen mit dem horizontalen Anfangsstrahle und zieht durch sie die Lothrechten b, c, d, e. Man kann diese Linien als Schwerlinien jener Theile der Belastungsfläche ansehen, die vom Scheitel bis zum fünften, vierten, dritten oder zweiten Belastungsstreifen reichen.

Nach diesen Vorbereitungen kann man leicht jede gewünschte Drucklinie in den Gewölbequerschnitt eintragen. Zunächst beachte man, dass wegen der vollständigen Symmetrie des Gewölbes und seiner Belastung auch die Drucklinie symmetrisch sein muss, dass also der Druck in der Scheitelfuge jedenfalls horizontal gerichtet ist. Da in der Aufgabe verlangt wird, die Drucklinie durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfugen zu führen, ziehen wir eine Horizontale durch die Mitte der Scheitelfuge, suchen deren Schnitt

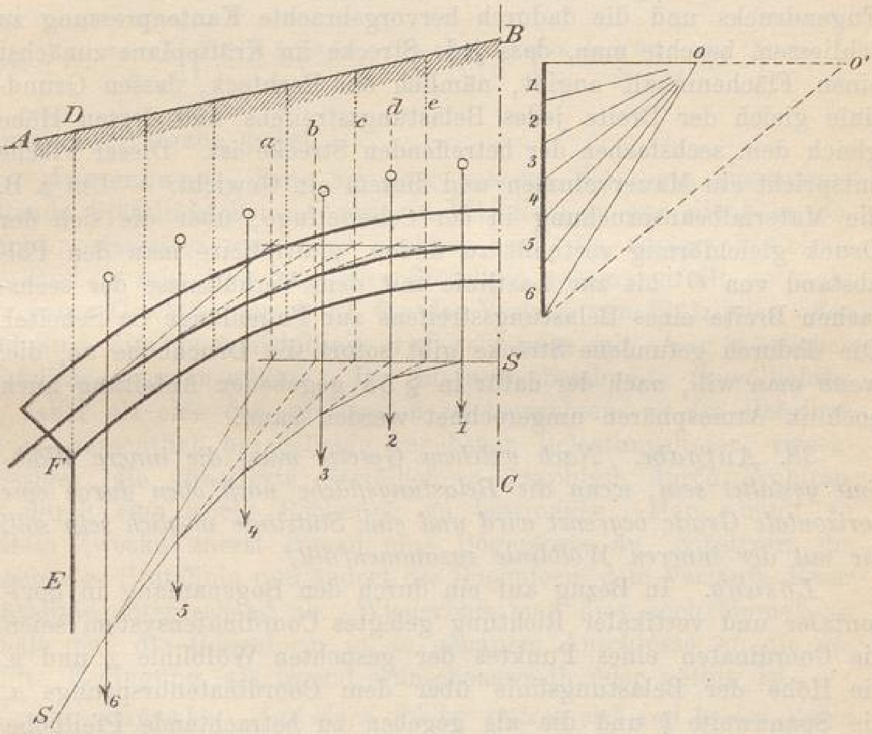

Abb. 161 a. Abb. 161 b.

mit der Schwerlinie a auf und verbinden den Schnittpunkt mit der Mitte der Kämpferfuge. Die Verbindungslinie gibt die Richtungslinie des Kämpferdruckes an, da sich diese Kraft mit dem Drucke in der Scheitelfuge und dem Gewichte der Gewölbehälfte im Gleichgewichte halten und daher mit ihnen in demselben Punkte treffen muss. Zieht man zu dieser Linie eine Parallele im Kräfteplane durch den Endpunkt der Last 6, so erhält man den Pol O' des neuen, zur gesuchten Drucklinie gehörigen Kräfteplanes.

Anstatt aber die Drucklinie durch Ziehen von Parallelen zu den Polstrahlen im Kräfteplane zu construiren, ist es bequemer, darauf zu achten, dass sich jeder andere Seilstrahl der Drucklinie mit dem horizontalen Seilstrahle auf einer der Linien a, b, c, d, e schneiden muss. Dies folgt sowohl aus dem in § 11 bewiesenen Satze über die zu denselben Lasten, aber zu verschiedenen Polen im Kräfteplane gehörigen Seilecke, als auch daraus, dass jene Linien als Schwerlinien der zwischen der Scheitelfuge und den übrigen Fugenschnitten gelegenen Theile der Belastungsfläche angesehen werden können.

Um nachträglich aus dem Kräfteplane auf die Grösse des Fugendrucks und die dadurch hervorgebrachte Kantenpressung zu schliessen, beachte man, dass jede Strecke im Kräfteplane zunächst einen Flächeninhalt angibt, nämlich ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Breite jedes Belastungsstreifens und dessen Höhe gleich dem sechsfachen der betreffenden Strecke ist. Dieser Fläche entspricht ein Mauervolumen und diesem ein Gewicht. — Um z. B. die Materialbeanspruchung in der Scheitelfuge, über die sich der Druck gleichförmig vertheilt zu finden, multiplicire man den Polabstand von O' bis zur Lastlinie mit dem Verhältnisse der sechsfachen Breite eines Belastungsstreifens zur Fugenlänge im Scheitel. Die dadurch gefundene Strecke gibt sofort die Druckhöhe an, die, wenn man will, nach der dafür in § 55 gegebenen Anleitung auch in Atmosphären umgerechnet werden kann.

38. Aufgabe. Nach welchem Gesetze muss die innere Wölblinie gestaltet sein, wenn die Belastungsfläche nach oben durch eine horizontale Grade begrenzt wird und eine Stützlinie möglich sein soll, die mit der inneren Wölblinie zusammenfällt?

Lösung. In Bezug auf ein durch den Bogenanfang in horizontaler und vertikaler Richtung gelegtes Coordinatensystem seien die Coordinaten eines Punktes der gesuchten Wölblinie x und y, die Höhe der Belastungslinie über dem Coordinatenursprunge a, die Spannweite l und die als gegeben zu betrachtende Pfeilhöhe des Bogens f. Die Höhe der Belastungsfläche bei der Abscisse x ist dann gleich $a - y$ zu setzen und die Differentialgleichung der Wölblinie lautet, da sie mit einer Stützlinie zusammenfallen soll,

$$H \frac{d^2 y}{d x^2} = y - a.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y = a + A e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + B e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}.$$

Die Integrationsconstanten A und B folgen aus den Grenzbedingungen, nach denen $y = 0$ für $x = 0$ und $y = f$ für $x = \frac{l}{2}$ werden muss. Dazu kommt zur Bestimmung des gleichfalls unbekannten Horizontalschubs H die Bedingung, dass im Scheitel, also für $x = \frac{l}{2}$ der Differentialquotient von y zu Null werden muss. Die drei Gleichungen lassen sich nach den Unbekannten A, B und H ohne Schwierigkeit auflösen und durch Einsetzen der gefundenen Werthe erhält man für y

$$y = a - \frac{a-f}{2}\left\{\left(\frac{a + \sqrt{2af - f^2}}{a-f}\right)^{\frac{2x-l}{l}} + \left(\frac{a + \sqrt{2af - f^2}}{a-f}\right)^{\frac{l-2x}{l}}\right\},$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Anmerkung. Eine mit der inneren Wölblinie zusammenfallende Stützlinie kommt zwar in Wirklichkeit gar nicht in Betracht. Gestaltet man aber nachher auch die äussere Wölblinie so, dass sie mit einer möglichen Stützlinie zusammenfällt, so steht der ganze Gewölbequerschnitt für den Verlauf von Stützlinien offen und auch die Bogenmittellinie wird sehr nahe mit einer möglichen Stützlinie zusammenfallen. Die hiernach bestimmte Gewölbeform ist daher als eine der günstigsten zu betrachten. — Im Uebrigen ist es, namentlich bei beliebig gegebenen Belastungslinien, zweckmässiger, die günstigste Gewölbeform graphisch durch Probiren, als durch eine solche Rechnung zu bestimmen. Man nimmt zu diesem Zwecke zuerst irgend eine Bogenform an, construirt die zugehörige Stützlinie und ändert die Bogenform dem Verlaufe dieser Stützlinie entsprechend ab. Wiederholt man dies noch einmal, so erhält man die Bogenform in so genauem Anschlusse an die gestellte Bedingung, als irgend wünschenswerth oder nöthig ist.

39. Aufgabe. Auf einen Pfeiler stützen sich von beiden Seiten her Gewölbe in ungleicher Höhe (Abb. 162); man soll die Stabilität des Pfeilers untersuchen.

Lösung. Der rechts angreifende Bogen ist halbkreisförmig angenommen. In einem solche Falle ist der untere Theil des Bogens nicht mehr zum Gewölbe, sondern schon als Bestandtheil des Widerlagers zu rechnen. Jedenfalls muss nämlich der Pfeiler den vom Gewölbe kommenden Horizontalschub aufnehmen. Dies kann aber nicht oder wenigstens nicht ausschliesslich durch die horizontale Kämpferfuge geschehen, sondern die unteren Theile des Gewölberückens, die vom Pfeilermauerwerke gegen eine horizontale Verschiebung gestützt sind, müssen sich daran wesentlich mit betheiligen. Die bei der Behandlung der Gewölbe vorangestellte

Annahme, dass auf den Wölbrücken nur Lasten in lothrechter Richtung einwirkten, ist demnach im unteren Theile des halbkreisförmigen Bogens sicher nicht mehr erfüllt, d. h. dieser Theil ist bei der Untersuchung des Gewölbes nach den dafür früher gegebenen

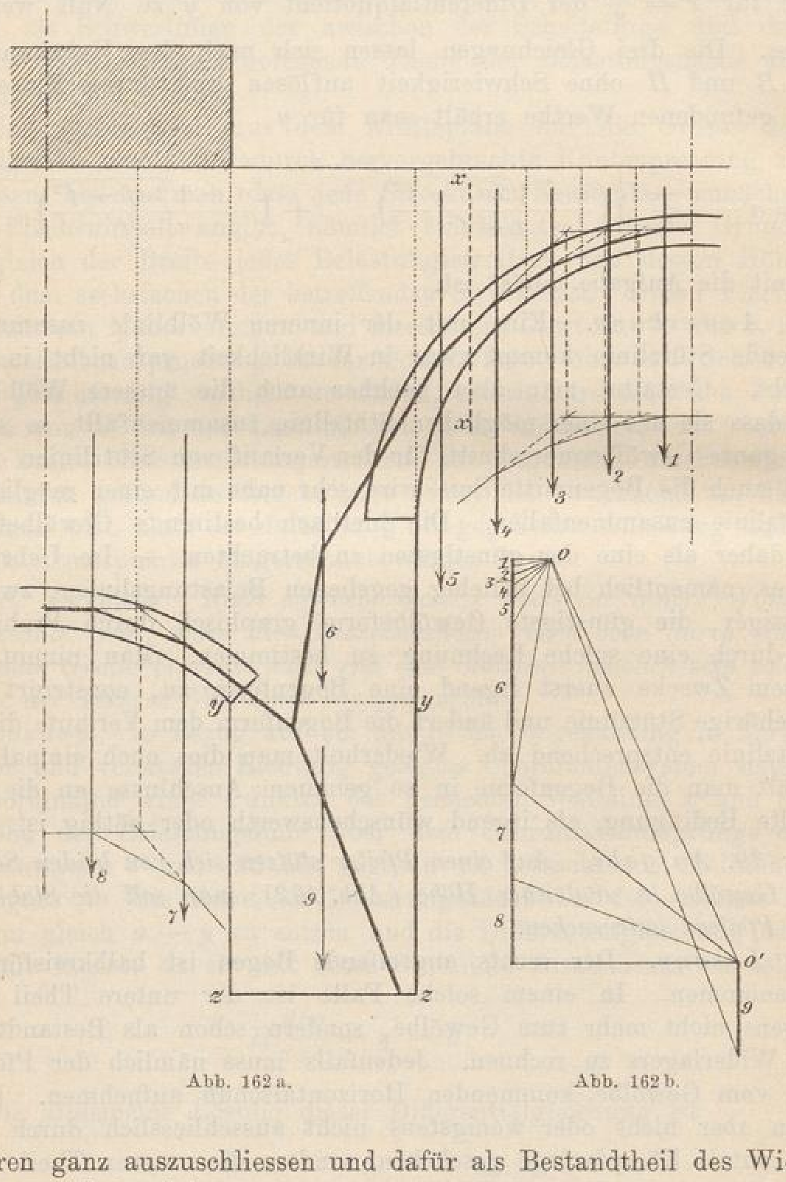

Abb. 162 a. Abb. 162 b.

Lehren ganz auszuschliessen und dafür als Bestandtheil des Widerlagers zu behandeln.

Nun fragt sich freilich, wie weit man diesen unteren Theil rechnen soll. In der Abbildung ist der Fugenschnitt xx gezogen und angenommen, dass der rechts davon liegende Theil als Gewölbe, der links davon liegende als Widerlager anzusehen sei. Man könnte aber xx ganz gut auch etwas mehr nach links oder mehr nach rechts rücken. Im Allgemeinen empfiehlt es sich in solchen zweifelhaften Fällen, die beiden äussersten Lagen, die man schätzungsweise noch für annehmbar halten kann, in Aussicht zu nehmen und die Betrachtung für die beiden extremen Fälle gesondert durchzuführen. Dabei muss nicht gerade verlangt werden, dass das Gleichgewicht auch für beide extreme Fälle noch hinreichend gesichert sei; man weiss vielmehr umgekehrt, dass Gewölbeeinstürze nur dann zu erfolgen pflegen, wenn überhaupt auf keine Art mehr Gleichgewicht zu Stande kommen kann. Immerhin wird man sich nicht damit beruhigen, nachgewiesen zu haben, dass das Gewölbe gerade noch an der Grenze des Gleichgewichts steht, sondern man wird noch einen gewissen Spielraum für die Gleichgewichtszustände verlangen, die keinen Einsturz befürchten lassen. Hierüber wird man sich am besten dadurch einen Ueberblick verschaffen, dass man die äussersten Fälle in Betracht zieht. In Abb. 162 ist indessen nur für eine mittlere Lage des Schnittes xx die Construction durchgeführt; für andere Annahmen von xx wäre sie in derselben Weise zu wiederholen.

Für den rechts von xx liegenden Theil des Bogens zeichnet man nun eine Stützlinie, die durch die Mitten der Scheitelfuge und der Fuge xx geht. Dies wird genau so durchgeführt, wie in Aufg. 37 und bedarf hier keiner weiteren Besprechung. Den zum Schnitte xx gehörigen Fugendruck setzt man dann mit dem Gewichte des links von xx gehörigen Abschnitts 5 und die daraus hervorgehende Resultirende weiterhin mit dem Pfeilergewichte 6 zusammen, das bis zum Kämpfer des unteren Bogens, also bis zu dem mit yy bezeichneten horizontalen Fugenschnitte gerechnet ist.

Hierauf zeichnet man auch die zum unteren Bogen gehörige Drucklinie, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge gelegt wird. Im Kräfteplane Abb. 162^b kann O' als der zu dieser Drucklinie gehörende Pol angesehen werden. Die für die erste Zusammensetzung der Lasten dienenden Seilpolygone wurden übrigens mit Hülfe von Kräfteplänen construirt, die in die Abbildung nicht mit aufgenommen sind. — Vereinigt man die vom oberen Bogen und dem Pfeilergewichte 6 her stammende Kraft mit dem Kämpferdrucke des unteren Bogens, so erhält man den im Kräfteplane durch die Strecke OO' dargestellten resultirenden Fugendruck für den Fugenschnitt yy. Dieser ist dann ferner noch mit dem zwischen yy und zz liegenden Pfeilergewichte 9 vereinigt, womit der Druck auf den Pfeilerfuss gefunden wird. — Wenn man will, kann man zwischen yy und zz auch noch einige andere horizontale Fugenschnitte einschalten und die zugehörigen resultirenden Fugendrücke in derselben Weise construiren. Man erhält dann den Verlauf der Stützlinie im Pfeiler noch etwas genauer. Die Berechnung der Kantenpressung in der Fuge zz kann nach den früher gegebenen Anleitungen nun auch noch leicht ausgeführt werden.

In Abb. 162 ist angenommen, dass die Belastungslinie der bleibenden Last nach oben durch eine horizontale Gerade begrenzt sei, dass aber auch eine über dem linken Bogen stehende verhältnissmässig grosse bewegliche Last hinzukomme, die ebenfalls in einer Uebermauerungshöhe ausgedrückt ist. Diese könnte ebenso gut auch über dem rechten Bogen stehen und die Untersuchung wäre für diesen Belastungsfall zu wiederholen. Dabei zeigt sich indessen, dass der hier betrachtete Fall der gefährlichere für den Bestand des Pfeilers ist.

Schliesslich bemerke ich noch, dass ausser den durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfugen gezogenen Stützlinien natürlich auch noch andere möglich sind und darunter solche, die dem Bestande des Pfeilers günstiger sind, als jene. Es ist daher selbst dann, wenn für keine Lage der vorher eingeschätzten Linie xx Gleichgewicht des Pfeilers ohne Ueberschreitung der zulässigen Kantenpressung möglich ist, immer noch keineswegs zu erwarten, dass der Pfeiler nun auch wirklich einstürzen wird. Zu erwarten ist weit eher, dass nach geringen Bewegungen des Pfeilers ein anderer Gleichgewichtszustand in den Wölbbögen zu Stande kommt, der für die Beanspruchung des Pfeilers günstiger ist. Erst dann, wenn es auch durch solche Veränderungen in den Lagen der Stützlinien in den Gewölben nicht möglich sein sollte, einen mit der Festigkeit des Materials verträglichen Gleichgewichtszustand herzustellen, wäre ein Einsturz ohne Zweifel zu erwarten. Billigerweise ist aber zu verlangen, dass der Pfeiler stark genug construirt sei, um der Beanspruchung gewachsen zu sein, die durch den zunächst in Aussicht zu nehmenden Gleichgewichtszustand der Wölbbögen hervorgerufen wird, so dass ein merkliches Ausweichen des Pfeilers zur Herbeiführung eines für ihn günstigeren Gleichgewichtszustandes nicht zu erwarten ist.

40. Aufgabe. Ein Träger ist auf beiden Seiten eingespannt und trägt die in Abb. 163 angegebenen Lasten. Man soll die Gestalt der Momentenfläche nach der in § 62 besprochenen Methode ermitteln.

Lösung. Die Momentenfläche wird jedenfalls aus einem Seilpolygone $ABCDE$ in Abb. 164 gebildet, dass zu den gegebenen

Lasten sofort gezeichnet werden kann, dessen Schlusslinie FG aber vorläufig unbekannt ist, da deren Lage von den Auflagerkräften und Einspannmomenten abhängig ist. Die Endtangenten 1 und 4 der elastischen Linie in Abb. 165 müssen beide horizontal sein und auf dieselbe Gerade fallen. Zwischen den Seilspannungen 1 und 4 des zweiten Seilpolygons liegen die aus der Momentenfläche hervorgehenden Lasten I, II, III. Man ermittelt die Schwerlinie und den Inhalt des positiven Antheils $ABCDE$ der Momentenfläche und kennt damit die Last II nach Lage und Grösse. Von der Lastlinie I weiss man, dass sie eine Schwerlinie des Dreiecks AFG bildet und daher um ein Drittel der Spannweite vom linken Auflager entfernt ist. Die zum Dreiecke AGE gehörige Lastlinie

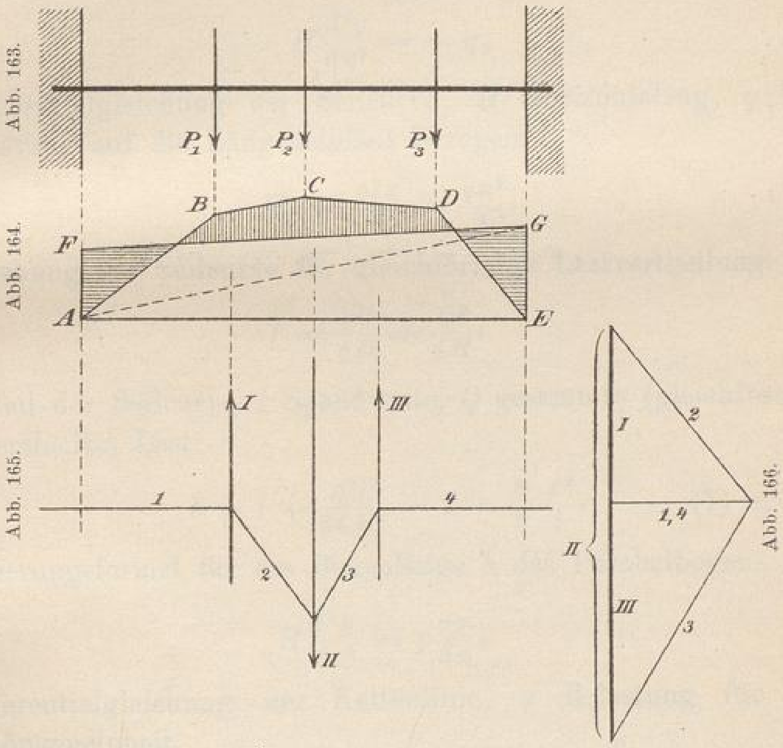

Abb. 163 bis 166.

ist um ebenso viel vom rechten Auflager entfernt. Man zieht die Seilspannung 2 in Abb. 165 in beliebiger Richtung (entsprechend der willkürlichen Verzerrung der elastischen Linie) und schiebt 3 dazwischen. Hierauf kann der zu dem Seilpolygone gehörige Kräfteplan in Abb. 166 construirt werden, indem man die der Grösse nach bekannte Last II in einem passend gewählten Maassstabe abträgt und Parallelen zu den Seilstrahlen zieht. Dadurch findet man die Grössen der Lasten I und III in demselben Maassstabe, d. h. die Flächen der Dreicke AFG und AGE in Abb. 164. Hiermit kennt man auch die Höhen AF und GE dieser Dreiecke, d. h. die beiden Einspannmomente des Balkens und die Verbindungslinie FG liefert die gesuchte Schlusslinie, womit die Aufgabe gelöst ist.