Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Fünfter Abschnitt. Das Fachwerk im Raume

Fünfter Abschnitt.*)

Das Fachwerk im Raume.

§ 40. Die Zahl der nothwendigen Stäbe.

Im vorigen Abschnitte handelte es sich nur um den Widerstand, den ein ebener Stabverband gegen Formänderungen innerhalb seiner eigenen Ebene zu leisten vermag und um die Spannungen, die in den Stäben durch Lasten hervorgerufen werden, die selbst alle in der Constructions-Ebene enthalten sind. Gegen Formänderungen, bei denen die Knotenpunkte aus der Constructions-Ebene heraustreten, sind dagegen die ebenen Fachwerke an sich ganz widerstandslos oder sie vermögen wenigstens einen gewissen, geringen Widerstand gegen solche Formänderungen nur insoweit zu leisten, als der Biegungswiderstand der Stäbe und die Steifigkeit der Knotenpunkte es gestatten. Daher sind auch die Lehren des vorigen Abschnittes für die Beurtheilung der Steifigkeit eines Stabverbandes nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung anwendbar, dass auf irgend eine Art ausreichende Fürsorge dafür getroffen ist, dass die Knotenpunkte nicht aus der Constructions-Ebene heraus treten können.

Hieraus erhellt, dass die Theorie des Fachwerkes erst dadurch zu einer allgemeineren Fassung gelangen kann, die allen bei ihrer praktischen Anwendung auftretenden Bedingungen

*) In diesen Abschnitt habe ich einige Abbildungen aus meiner im Jahre 1892 erschienenen Schrift „Das Fachwerk im Raume“ herüber genommen.

gerecht wird, dass man die Fachwerke als Gebilde des dreifach ausgedehnten Raumes auffasst. Dies hindert zwar nicht, dass man, wie es auch hier geschehen ist, zuerst die einfacheren Probleme des ebenen Fachwerkes erledigt und sich erst nachher in die verwickelteren Bedingungen vertieft, die sich im dreifach ausgedehnten Raume oder kürzer im „Raume“ geltend machen. Eine solche Ergänzung ist aber durchaus nöthig, um Irrthümer selbst in manchen Fällen zu vermeiden, die auf den ersten Blick ausschliesslich zur Lehre vom ebenen Fachwerke zu gehören scheinen.

Wenn nämlich ein ebener Träger nur mit Lasten behaftet ist, die in seiner eigenen Ebene liegen, wie es bei den Anwendungen sehr oft genau genug zutrifft, kommt zwar in erster Linie nur der Widerstand gegen Formänderungen in dieser Ebene in Betracht. Falls aber hierbei eine Anzahl aufeinander folgender Stäbe auf Druck beansprucht ist, wie z. B. beim Obergurt eines gewöhnlichen, einzeln aufgestellten Fachwerkbalkens, darf man bei der Berechnung dieser Stäbe auf Knickfestigkeit nicht dabei stehen bleiben, nur die Möglichkeit des Ausknickens in der Constructions-Ebene zu berücksichtigen. Bei einem Ausknicken in dieser Ebene ist nämlich als Knicklänge nur die Länge *eines* Stabes zwischen seinen beiden Knotenpunkten in Ansatz zu bringen, da diese Knotenpunkte durch den Stabverband gegen Bewegungen innerhalb der Ebene abgestützt sind. Bewegungen senkrecht zu seiner Ebene vermag dagegen der Stabverband nicht zu verhindern und als Knicklänge tritt daher für einen solchen Obergurt — freilich unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Knicklast für die einzelnen Abschnitte — die ganze Länge auf. Dieser Umstand ist schon manchmal von einem Constructeur, der seine Erwägungen ausschliesslich auf das Verhalten des Trägers innerhalb der Trägerebene zuschnitt, unberücksichtigt geblieben, was sich nachher bitter rächte.

Gewöhnlich verhindert man freilich Bewegungen senkrecht zur Constructions-Ebene durch Anordnung eines Querverbandes zwischen zwei oder mehr in parallelen Ebenen neben einander stehenden Bindern. Diese Querverbände haben dann zugleich die bei Brücken z. B. durch den Winddruck hervorgerufenen, senkrecht zu den Binderebenen stehenden Lasten aufzunehmen, wesshalb man sie auch als Windverbände bezeichnet. Sowie aber die Windverbände sorgfältiger ausgebildet werden, so dass auch gegen Formänderungen, die ein Heraustreten der Knotenpunkte aus den Constructions-Ebenen mit sich bringen, der Biegungswiderstand der Stäbe nicht in Anspruch genommen werden soll, sondern nur ihre Zug- und Druckfestigkeit, gelangt man zu räumlichen Fachwerken, in denen die ebenen Binder nur als Constructions-Elemente, freilich als solche, die in sich schon zu einer gewissen Einheit zusammengefasst sind, auftreten.

Wir haben hier vor Allem wieder die Frage zu beantworten, wieviel Stäbe erforderlich sind, um n Knotenpunkte, die jedenfalls nicht alle in derselben Ebene liegen dürfen, zu einer räumlichen Figur von unveränderlicher Gestalt zu verbinden. Dabei sind freilich wieder verschiedene Bildungsgesetze möglich, entsprechend jenen, die wir schon beim ebenen Fachwerke kennen lernten. Wir gehen aber wie dort zunächst von der einfachsten Art des Aufbaues oder wenigstens von jener aus, die sich bei der ersten Betrachtung als die einfachste darbietet.

Zunächst verbinden wir wieder drei der Knotenpunkte durch drei Stäbe zu einem Dreiecke, denn das Dreieck ist bei unveränderlichen Seitenlängen auch im dreifach ausgedehnten Raume keiner Gestaltänderung fähig. Ein vierter Knotenpunkt, der mit den vorigen nicht in derselben Ebene liegen darf, kann hierauf durch drei Stäbe mit diesen steif verbunden werden. Hierbei entsteht ein Tetraeder, dessen Gestalt ebenfalls unveränderlich ist, so lange sich die Stablängen nicht ändern. Der Ausnahmefall kann hier nur eintreten, wenn die vier Ecken in eine Ebene fallen, das Tetraeder selbst also als solches verschwindet und einer in der Ebene geometrisch überbestimmten, im Raume aber unendlich wenig verschieblichen, ebenen Figur Platz macht. Diesen Fall hatten wir aber schon ausgeschlossen.

Auch jeder folgende Knotenpunkt kann an die vorigen durch drei Stäbe unverschieblich angeschlossen werden, wenn nur darauf geachtet wird, dass die drei Anschlussstäbe niemals in einer Ebene liegen dürfen. Dies folgt sowohl aus der geometrischen Betrachtung, wie aus der statischen Bedingung, dass die Spannungen in den Anschlussstäben ausreichen müssen, um gegen jede Last, die an dem angeschlossenen Knotenpunkte angreifen mag, das Gleichgewicht zu sichern.

Für jeden anzuschliessenden Knotenpunkt müssen wir hiernach drei Stäbe aufwenden und nur im Anfange genügten zur Verbindung der drei Ausgangsknotenpunkte drei Stäbe. Hiernach ist die Zahl m der nothwendigen Stäbe

$$m = 3n - 6 . \tag{54}$$

Natürlich können auch hier wieder nachträglich überzählige Stäbe zwischen die bereits steif mit einander verbundenen Knotenpunkte eingeschoben werden, wodurch das räumliche Fachwerk in ein geometrisch überbestimmtes und zugleich statisch unbestimmtes übergeht. Die hierüber bereits beim ebenen Fachwerke durchgeführten Betrachtungen bleiben auch hier gültig und brauchen nicht nochmals wiederholt zu werden. In diesem Abschnitte soll übrigens nur von den geometrisch und statisch bestimmten räumlichen Fachwerken die Rede sein.

Ferner kann man auch beim räumlichen Fachwerke von den nach dem soeben besprochenen Plane aufgebauten zu Fachwerken von abweichender Gliederung durch das schon früher angewendete Mittel der Stabvertauschung übergehen. Beseitigt man nämlich einen Stab, so erhält man einen zwangläufigen Mechanismus und der damit gegebene Freiheitsgrad kann wieder beseitigt, die Steifigkeit also wieder hergestellt werden, indem man irgend zwei Knotenpunkte, die bei einer Bewegung des Mechanismus ihren Abstand ändern müssten, durch einen neuen Stab mit einander verbindet.

Die Zahl der durchschnittlich von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe folgt aus Gl. (54) zu

$$\frac{2m}{n} \quad \text{oder} \quad 6 - \frac{12}{n};$$

sie bleibt also stets kleiner als sechs. Bei einer grossen Zahl von Knotenpunkten gehen bei den gewöhnlich vorkommenden Fachwerkformen von den meisten Knotenpunkten je sechs Stäbe aus, während bei einigen Knotenpunkten die Zahl geringer ist. Jedenfalls müssen bei einem statisch bestimmten räumlichen Fachwerke Knotenpunkte vorkommen, von denen höchstens fünf Stäbe ausgehen. Andererseits dürfen von keinem Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen und ausserdem dürfen die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe niemals alle in derselben Ebene enthalten sein, weil sonst ein Ausnahmefall (mit unendlich kleiner Verschieblichkeit des Knotenpunktes senkrecht zur Ebene der Stäbe und unendlich grossen Stabspannungen beim Angriffe einer senkrecht zu dieser Ebene stehenden Last) vorläge.

Wie beim ebenen Fachwerke die Scheibe, kann man hier den starren Körper als Fachwerkelement mit einführen. Man kann sich darunter selbst wieder ein in sich steif verbundenes räumliches Fachwerk oder auch einen zusammenhängenden Körper vorstellen. Namentlich die ganze feste Erde kann als Fachwerkbestandtheil aufgefasst werden und man gewinnt damit auf einfachste Weise den Uebergang von den nicht festgehaltenen, sondern nur in sich unverschieblichen Fachwerken zu zahlreichen Fachwerkträgern, nämlich zu allen, bei denen keine Walzenlager oder Gleitlager vorkommen.

Hat ein räumliches Fachwerk einen starren Körper und n freie (d. h. nicht zu jenem gehörige) Knotenpunkte, so beträgt die Zahl der nothwendigen Stäbe

$$m = 3n, \tag{55}$$

denn jeder freie Knotenpunkt wird durch je drei Stäbe unverschieblich angeschlossen. Dabei ist es aber nicht nöthig, dass auch wirklich von jedem Knotenpunkte drei Stäbe unmittelbar zum starren Körper geführt sind. Man kann, schon nachdem ein Knotenpunkt angeschlossen ist, einen der Verbindungsstäbe zum zweiten Knotenpunkte auch von diesem aus führen und später braucht man überhaupt keine Stäbe mehr unmittelbar vom starren Körper ausgehen zu lassen. Ausserdem kann man nachträglich auch noch Stabvertauschungen vornehmen. Es kommt also im Wesentlichen nur auf die Zahl der Verbindungsstäbe an, obschon natürlich Missgriffe in der Vertheilung der Stäbe, wie sie schon beim ebenen Fachwerke besprochen wurden, oder Ausnahmefälle, die nicht durch die Gliederung im Allgemeinen, sondern dadurch bedingt sind, dass ein Stab im Maximum oder Minimum seiner Länge steht, hierbei vermieden sein müssen.

Enthält das Fachwerk mehr als einen, also etwa r starre Körper, so kann man sich zunächst zwei derselben verbunden denken. Hierzu braucht man sechs Stäbe. Dies geht einerseits daraus hervor, dass ein starrer Körper gegen den anderen sechs Freiheitsgrade hat, so dass sechs Fesseln nöthig sind, von denen jede einen Freiheitsgrad aufhebt, und andererseits auch daraus, dass jede an dem einen Körper auftretende Last nach sechs Richtungslinien eindeutig zerlegt werden kann. Natürlich müssen dabei die schon im dritten Abschnitte besprochenen Ausnahmefälle vermieden werden: es darf sich also keine Gerade ziehen lassen, die alle sechs Stabrichtungen schneidet und namentlich dürfen nicht mehr als drei Stabrichtungen durch denselben Punkt gehen und nicht mehr als drei dürfen in derselben Ebene enthalten sein.

Auch jeder folgende starre Körper kann durch sechs Stäbe an die vorigen und jeder freie Knotenpunkt durch drei Stäbe angeschlossen werden. Im Ganzen beträgt daher die Stabzahl in diesem allgemeinen Falle

$$m = 3n + 6(r - 1) = 3n - 6 + 6r, \tag{56}$$

womit auch Gleichung (54) für $r = 0$ mit umfasst wird. Auch hier ist es natürlich nicht nöthig, dass die Stäbe genau so vertheilt sind, wie wir jetzt annehmen; man kann vielmehr nachträglich noch Stabvertauschungen vornehmen. Jedenfalls dürfen aber von keinem starren Körper weniger als sechs und von keinem freien Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen.

In Verbindung hiermit soll sofort auch die Frage der Auflagerbedingungen erledigt werden. Nöthigt man einen Knotenpunkt, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben, die man sich für eine unendlich kleine Verschiebung auch durch ihre Berührungsebene ersetzt denken kann, so schreibt man ihm eine Auflagerbedingung vor. Von den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers wird nämlich dadurch, wenn sonst keine Bewegungsbeschränkung vorliegt, nur einer vernichtet. Wird der Knotenpunkt genöthigt, auf einer Linie zu bleiben, so entspricht dies zwei Auflagerbedingungen und der Körper hat, wenn kein anderes Hinderniss vorliegt, noch vier Freiheitsgrade. Wählt man nämlich den Auflagerknotenpunkt als Anfangspunkt für die Beschreibung der Bewegung, so müssen von den sechs Componenten der Vektoren $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$, durch die der Geschwindigkeitszustand gekennzeichnet wird, zwei Componenten von $\mathfrak{v}_0$ verschwinden, da $\mathfrak{v}_0$ nur in die Richtung der Auflagerbahn fallen kann. — Einem vollständig festgehaltenen Knotenpunkte sind drei Auflagerbedingungen vorgeschrieben.

Die Zahl der Auflagerbedingungen, die man einem starren Körper im Ganzen vorschreiben muss, um ihn festzuhalten, beträgt sechs, nämlich so viel als die Zahl der Freiheitsgrade, die aufzuheben sind. Die sechs Auflagerbedingungen müssen sich auf mindestens drei Knotenpunkte vertheilen. Wollte man zwei Knotenpunkte vollständig festhalten, so würde dies nur fünf von einander unabhängigen Auflagerbedingungen entsprechen. Denkt man sich nämlich einen Knotenpunkt festgehalten und den anderen längs irgend einer Linie beweglich, so kann sich dieser schon nicht mehr bewegen, da er wegen des Zusammenhangs im starren Körper seinen Abstand von dem festgehaltenen Punkte nicht zu ändern vermag.

Man kann also etwa einem Knotenpunkte eine, einem zweiten zwei und einem dritten drei Auflagerbedingungen vorschreiben. Oder man kann auch die sechs Auflagerbedingungen auf sechs Knotenpunkte vertheilen, von denen dann jeder auf einer Fläche gelagert ist, längs deren er sich, wenn sonst kein Hinderniss vorläge, frei zu verschieben vermöchte. Ausserdem vermag man auch, wie schon bei den ebenen Trägern, eine grössere Zahl von Auflagerbedingungen einzuführen, ohne den Träger dadurch statisch unbestimmt zu machen, falls man dafür eine entsprechende Zahl von Stäben aus dem Verbande herausnimmt.

Bezeichnet man die Zahl der Auflagerbedingungen mit p, so erhält man an Stelle von Gl. (54)

$$m = 3n - p, \tag{57}$$

denn um ebensoviel als p grösser wird als 6, ist m zu vermindern, damit der Träger nicht statisch unbestimmt wird.

Die Auflagerbedingungen vermag man übrigens stets auch durch Stäbe zu erfüllen, die hinreichend lang sind und von der festen Erde nach den Auflagerknotenpunkten geführt sind. Ist ein Knotenpunkt durch einen Stab mit der festen Erde verbunden, so wird er dadurch genöthigt, auf einer Kugelfläche zu bleiben, deren Halbmesser gleich der Länge des Stabes ist. Zwei Stäbe führen den Knotenpunkt auf einer Linie; er muss nämlich auf dem Kreise bleiben, in dem sich die den beiden Stäben zugehörigen Kugelflächen schneiden. Drei Stäbe halten den Knotenpunkt vollständig fest. Jeder Stab entspricht daher einer Auflagerbedingung.

Infolgedessen vermag man auch die nähere Untersuchung der Auflagerbedingungen ganz zu umgehen, indem man sie sich alle durch Stäbe ersetzt denkt, abgesehen von den festgehaltenen Knotenpunkten, die man unmittelbar als Punkte der festen Erde betrachtet. Man kann dann jeden räumlichen Fachwerkträger auch als ein Fachwerk auffassen, das die Erde als starren Körper enthält und in dem nur Verbindungsstäbe, sonst aber keine Bewegungsfesseln, die als Auflagerbedingungen zu bezeichnen wären, vorkommen.

Schliesslich sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass man bei der Theorie des ebenen Fachwerkes jedem Knotenpunkte im Grunde genommen eine Auflagerbedingung vorschreibt, von der dort freilich gar nicht ausdrücklich die Rede ist. Man setzt nämlich voraus, dass die Knotenpunkte genöthigt seien, in der Constructionsebene zu bleiben und dies entspricht in der That, sobald wir den Stabverband als ein räumliches System auffassen, einer Auflagerbedingung. Diese n Auflagerbedingungen bewirken einerseits, dass die Figur auch im Raume ihre Gestalt nicht ändern kann und sie führen andererseits zugleich eine Beschränkung in der Bewegungsfreiheit des unveränderlichen Stabgebildes herbei. Es kann sich nachher nur noch in der gemeinsamen Auflagerebene bewegen, hat also nur noch drei Freiheitsgrade. Berücksichtigt man dies, so gehen die Formeln für die nothwendige Stabzahl beim räumlichen Fachwerke ohne Weiteres in die beim ebenen Fachwerke über.

§ 41. **Das Flechtwerk.**

Die Formen, in denen das räumliche Fachwerk, namentlich bei einer grösseren Zahl von Knotenpunkten, aufzutreten vermag, sind überaus mannichfaltig. Unter ihnen zeichnet sich aber eine bestimmte Art des Aufbaues ihrer einfachen Gesetzmässigkeit wegen besonders aus. Auch für die Anwendungen sind Fachwerke von der Gliederung, die ich hier meine, von besonderer Wichtigkeit und es rechtfertigt sich daher, eine besondere Bezeichnung für sie einzuführen: ich nenne sie Flechtwerke.

Ein Flechtwerk ist ein räumliches Fachwerk, dessen Knotenpunkte und Stäbe sämmtlich auf einem Mantel enthalten sind, der einen inneren Raum umschliesst.

Um zu erkennen, dass räumliche Fachwerke von dieser Art möglich sind, geht man von dem Satze aus, den Euler über die Zahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen in einem Polyeder aufgestellt hat. Der Satz gilt übrigens nur für Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume und kann für diese durch eine einfache Ueberlegung bewiesen werden.

Beginnt man nämlich beim Aufbaue des Polyeders zunächst mit einer Seitenfläche, so hat man damit schon eine Seitenfläche, eine Anzahl Kanten und ebensoviel Ecken des

Polyeders. Setzt man eine neue Seitenfläche daran, so kommt eine neue Kante mehr dazu, als neue Ecken, weil diese zwischen jenen liegen. Dies gilt auch beim Ansetzen weiterer Seitenflächen und wir können sagen, dass die Zahl der neu hinzukommenden Kanten ebenso gross ist, als die Zahl der neu hinzukommenden Ecken, vermehrt um die Zahl der hinzukommenden Seitenflächen. Nur zuletzt, wenn der Mantel des Polyeders durch Einfügen der letzten Seitenfläche geschlossen wird, tritt weder eine neue Ecke, noch eine neue Kante, wohl aber eine neue Seitenfläche auf. Die Zahl der Ecken und der Seitenflächen bleibt also sonst immer gleich der Zahl der Kanten, mit Ausnahme des Anfanges und des Endes, wo jedesmal eine Seitenfläche mehr auftritt, als zur Herstellung des Ausgleichs zwischen jenen Zahlen erforderlich wäre. Wird also die Zahl der Kanten mit m, die Zahl der Ecken mit n, die Zahl der Seitenflächen mit f bezeichnet, so hat man

$$m = n + f - 2 \tag{58}$$

und diese Gleichung spricht den Euler'schen Satz aus.

Wir wollen den Satz auf den besonderen Fall anwenden, dass alle Seitenflächen Dreiecke sind. In diesem Falle besteht noch ein leicht nachweisbarer Zusammenhang zwischen m und f. Das Dreifache von f gibt nämlich die Zahl der Kanten an, die man erhält, wenn man in jedem Dreiecke die Kanten von Neuem zählt. Hierbei wird aber jede Kante, die immer eine Grenze zwischen zwei Dreiecken bildet, doppelt gezählt und die Anzahl der Tetraederkanten beträgt daher gerade die Hälfte von $3f$.

Mit $m = \frac{3f}{2}$ oder $f = \frac{2m}{3}$ geht aber Gl. (58) über in

$$\frac{m}{3} = n - 2 \quad \text{oder} \quad m = 3n - 6$$

und damit ist, wie ein Vergleich mit Gl. (54) lehrt, nachgewiesen, dass die Zahl der Kanten in einem von lauter Dreiecken umschlossenen Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume gerade ausreicht, um bei unveränderlicher Länge die Ecken unverschieblich mit einander zu verbinden. Hiermit ist auch die Möglichkeit der Flechtwerke erkannt und zugleich nachgewiesen, dass sie nicht nur stabile, sondern zugleich auch statisch bestimmte Fachwerke bilden. Man muss sich nur vorbehalten, dass Ausnahmefälle, die hier natürlich ebenso gut, wie beim ebenen Fachwerke vorkommen können, vermieden werden. Dann kann man sagen:

Jede aus Dreiecken zusammengesetzte Mantelfläche, die einen einfach zusammenhängenden Raum vollständig umschliesst, liefert im Allgemeinen, wenn man die Kanten als Stäbe und die Ecken als Knotenpunkte auffasst, ein stabiles und statisch bestimmtes Fachwerk, das man ein Flechtwerk nennt.

Hierbei ist nicht nöthig, dass alle Dreiecke des Mantels in verschiedenen Ebenen liegen; nur dürfen nicht alle Dreiecke, die von einer Ecke ausgehen, in derselben Ebene liegen, weil dies sonst auch von den Stäben an dieser Ecke zuträfe und weil der Knotenpunkt gegen Verschiebungen senkrecht zu jener Ebene alsdann nicht genügend abgestützt wäre. — Ob im Uebrigen ein Ausnahmefall vorliegt oder nicht, entscheidet man am einfachsten dadurch, dass man die Stabspannungen berechnet. Bleiben diese für beliebige endliche Lasten stets endlich, so ist der Ausnahmefall vermieden.

Flechtwerkmäntel vermag man selbst wieder von sehr verschiedenen Gestalten anzugeben und man erkennt daraus leicht den Formenreichthum im Gebiete des räumlichen Fachwerkes. Von den regelmässigen Polyedern sind z. B. das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder ohne Weiteres Flechtwerke; beim Würfel und beim Dodekaeder muss man jede Seitenfläche durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke zerlegen, um Flechtwerke zu erhalten.

Zieht man auf einer Kugel eine Anzahl von Meridianen und Parallelkreisen, wie bei der Gradeintheilung auf einem Erdglobus, betrachtet die Schnittpunkte als Knotenpunkte und die zu den Kreisbögen zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten gehörigen Sehnen als Stäbe, so braucht man nur noch in jedes vierseitige Fach einen Diagonalstab einzuschieben, um zu einem Flechtwerke zu gelangen. Bei einem Ellipsoide oder einer geschlossenen Fläche von ähnlicher Art führt dasselbe Verfahren, das leicht auch noch ein wenig abgeändert werden kann, falls man dabei nur zu einem aus Dreiecken zusammengesetzten Mantel gelangt, ebenfalls zum Ziele.

Uebrigens macht es auch nicht viel aus, wenn man bei dem in der beschriebenen Weise erhaltenen Kugelflechtwerke die Stäbe nicht geradlinig ausführt, sondern sie nach den Meridian- und Parallelkreisen, denen sie folgen, krümmt. Denn auch ein Stab, der zwischen seinen beiden Knotenpunkten ein wenig gekrümmt ist, vermag Entfernungsänderungen seiner Endpunkte zu verhüten, ohne dabei wesentlich auf Biegung beansprucht zu werden, solange nur die kreisförmige Stabaxe sich von der zugehörigen Sehne nicht viel entfernt. Die Zahl der Knotenpunkte oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Zahl der Meridiane und Parallelkreise, darf also in diesem Falle nicht zu klein gewählt sein. Andererseits soll freilich die Zahl der Knotenpunkte auch nicht zu gross sein, weil sich sonst die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe zu wenig von der Tangential-Ebene an die Kugel abheben. Liegen die Stäbe nämlich nahezu in einer Ebene, so nähern wir uns dem Ausnahmefalle und wir erhalten für Einzellasten an einem solchen Knotenpunkte, die eine Componente rechtwinklig zur Tangential-Ebene haben, grosse Stabspannungen.

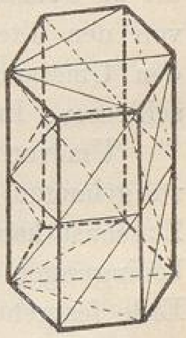
Abb. 107.

Ein anderer Fall wird durch das in Abb. 107 an einem einfachen Beispiele vorgeführte Cylinder- oder Tonnenflechtwerk gebildet. Wie vorher die Kugel, kann man sich auch einen Cylindermantel durch eine Anzahl von Parallelkreisen und (an Stelle der Meridiane) durch Cylinder-Erzeugende in vierseitige Fächer zerlegt denken, die durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke getheilt werden können. Um einen geschlossenen Flechtwerkmantel zu erhalten, muss man aber dann auch noch die beiden Basispolygone durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen.

Da die Bögen, wenn man ursprünglich von einem Cylinder ausging, nachträglich durch die zugehörigen Sehnen ersetzt werden müssen, wenn man nur geradlinige Stäbe anwenden will, erscheint der Flechtwerkmantel schliesslich in der Gestalt eines Prismas. Bemerkenswerth ist dabei, dass man sich das Flechtwerk auch durch Aneinanderfügen von lauter ebenen Fachwerken entstanden denken kann. Die auf jeder Seitenfläche des Prismas liegenden Stäbe bilden für sich genommen ein ebenes Fachwerk mit parallelen Gurten. Dabei haben je zwei aufeinanderfolgende ebene Fachwerke die dazwischen liegende Gurtung gemeinsam. Von diesem Umstande kann man Gebrauch machen, um die Berechnung der Stabspannungen im Tonnenflechtwerke bei gegebenen Lasten auf die Berechnung der Stabspannungen in den ebenen Fachwerken zurückzuführen.

Schliesslich kann, um noch einen anderen einfachen und wichtigen Fall hervorzuheben, das Prisma in Abb. 107 auch durch eine abgestumpfte Pyramide ersetzt werden, ohne dass sich sonst etwas änderte. Ausserdem steht auch nichts im Wege, diese Pyramide bis zur Spitze hin durchzuführen. Das eine Basispolygon fällt dann fort und wird durch die Spitze ersetzt. Man gelangt so zu den bei neueren Kirchthurmbauten oft zu Grunde gelegten Pyramiden-Flechtwerken, die sich von den älteren Constructionen, wie alle Flechtwerke, durch den Umstand unterscheiden, dass der von dem Mantel umschlossene Innenraum von keinen Stäben durchsetzt wird.

Um von einem Flechtwerke zu einem Flechtwerkträger zu gelangen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Zunächst kann man sechs von einander unabhängige Auflagerbedingungen vorschreiben, durch die das Flechtwerk gegen die Erde festgehalten wird, wodurch es in einen Träger übergeht, der beliebige Lasten, die nun nicht mehr in derselben Ebene zu liegen brauchen, aufnehmen kann. Am einfachsten werden diese Auflagerbedingungen gewöhnlich durch Stäbe, die von der Erde nach dem Flechtwerke geführt sind, ersetzt. Von früher her ist schon bekannt, welche Ausnahmefälle bei der Anordnung der sechs Verbindungsstäbe vermieden werden müssen, um eine steife Verbindung herzustellen. Ein Beispiel für einen in dieser Weise gewonnenen Flechtwerkträger wird uns unter den Aufgaben begegnen. Zieht man mehr als sechs Verbindungsstäbe, so wird der Träger statisch unbestimmt; man kann aber dann, ebenso wie es schon in der Lehre vom ebenen Fachwerke besprochen wurde, durch Fortlassen einer entsprechenden Anzahl von Stäben des Flechtwerkes die statische Bestimmtheit auch wieder herstellen.

Ein anderer Weg zur Gewinnung von Flechtwerkträgern wird durch die folgende Ueberlegung gewiesen. Man denke sich ein Flechtwerk durch einen beliebigen Schnitt in zwei Theile getrennt. Jeder Theil für sich ist dann nicht mehr steif, wenigstens dann nicht, wenn der Schnitt, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, mehr als sechs Stäbe trifft. Nimmt man aber den einen Theil und verbindet ihn durch die vom Schnitte getroffenen Stäbe mit der festen Erde, so erhält man auf jeden Fall einen unverschieblichen Stabverband. Denn schon der Zusammenhang mit dem für sich nicht steifen Reste, der bei der Führung des Schnittes wegfiel, reichte aus, um Gestaltänderungen auszuschliessen. Um so mehr muss also der Zusammenhang mit einem starren Körper denselben Erfolg herbeiführen.

Zugleich macht uns diese Betrachtung freilich auch darauf aufmerksam, dass der Flechtwerkträger, den man auf solche Art erhält, geometrisch überbestimmt und darum zugleich auch statisch unbestimmt ist. Wenn man darin einen Mangel erblickt — und ein Nachtheil ist die statische Unbestimmtheit zum mindesten insofern, als die Berechnung der Stabspannungen dadurch erheblich erschwert und das Auftreten von Spannungen, die unabhängig von den Lasten (infolge von Ausführungsfehlern oder infolge von Temperaturänderungen einzelner Theile) zu Stande kommen, ermöglicht wird —, so kann man ihm nachträglich wieder dadurch abhelfen, dass man noch eine entsprechende Anzahl von Stäben aus dem Flechtwerkverbande entfernt.

§ 42. Die Schwedler'sche Kuppel.

Das älteste und bis auf den heutigen Tag wichtigste Beispiel für die praktische Ausführung eines folgerichtig aufgebauten Flechtwerkträgers bildet die von Schwedler herrührende Kuppel-Construction. Man gelangt zu ihr, indem man von einem Kugelflechtwerke eine Haube abschneidet und diese mit der Erde durch die vom Schnitte getroffenen Stäbe verbindet. Entfernt man nachträglich noch die Spitze mit den von ihr ausgehenden Stäben, so dass die eigentliche Trag-Construction in einem „Nabelringe" endet, auf den dann gewöhnlich noch ein sog. Laternenaufsatz kommt, der als blosse Sekundär-Construction aufzufassen ist, die mit dem Haupttragnetze nichts zu thun hat, so wird der Flechtwerkträger statisch bestimmt. Auf die besondere Gestalt des Meridians kommt es übrigens hierbei nicht an: ebensogut als nach der Kugel, kann man den Flechtwerkmantel auch nach irgend einer anderen Rotationsfläche gestalten. Der Meridian kann selbst geradlinig sein und das alsdann entstehende Kegeldach ist nur als ein besonderer Fall der Schwedler'schen Kuppel aufzufassen.

Abb. 108 zeigt eine Schwedler'sche Kuppel mit offenem Nabelringe in Aufriss und Grundriss. Dass sie die zur Herstellung eines steifen Verbandes erforderliche Zahl von Stäben umfasst, kann durch Nachzählen leicht festgestellt werden. Man hat nämlich ebensoviel Ringstäbe, ferner ebensoviel Sparrenstäbe (so sollen die längs der Meridiane verlaufenden genannt werden) und auch ebensoviel Diagonalstäbe, als freie Knotenpunkte vorkommen, also die nach Gl. (55) erforderliche Zahl. Wird ausserdem noch ein Auflagerring ausgeführt, der die Auflagerpunkte mit einander verbindet, wie es gewöhnlich geschieht, so wird dadurch an der statischen Bestimmtheit der Kuppel nichts geändert, denn die Stäbe des Auflagerringes dienen nur zur Verbindung von Punkten der festen Erde, helfen also die von vornherein vorausgesetzte Starrheit des Widerlagers herstellen, die ohne sie vielleicht nicht genügend gesichert wäre.

Dass kein Ausnahmefall vorliegt, dass also die Knotenpunkte durch die Stäbe auch wirklich steif mit einander und mit der Erde verbunden sind, wird sich daraus ergeben, dass jedem beliebigen Lastensysteme durch endliche Werthe der Stabspannungen entsprochen werden kann.

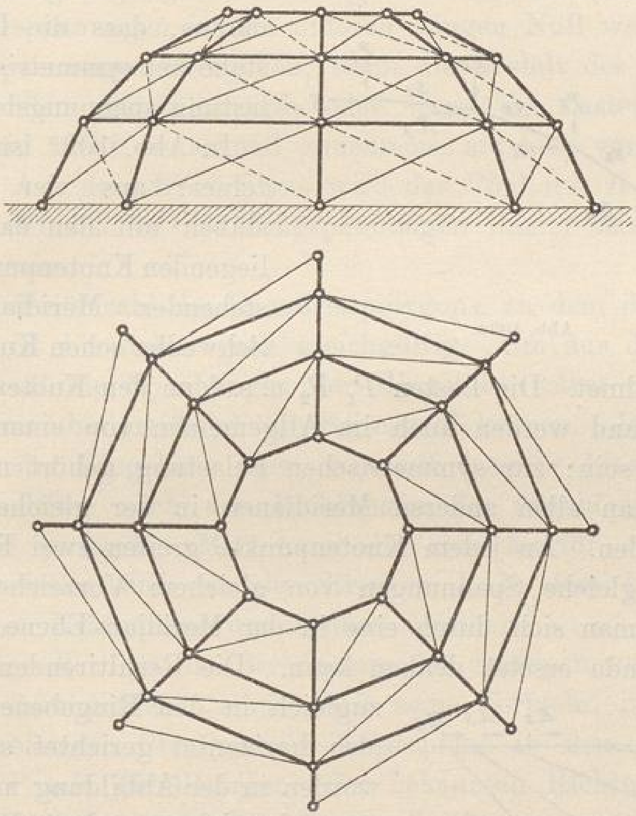

Abb. 108.

Schwedler selbst hat übrigens die richtige Lösung des Spannungsproblems für die von ihm ausgeführten Kuppeln nur für den Fall der symmetrischen Belastung, wie sie durch das Eigengewicht oder durch eine gleichmässig vertheilte Schneelast gebildet wird, angegeben und sich im Uebrigen mit einer ungefähren Abschätzung der Spannungen für eine andere Lastvertheilung geholfen. — Bei symmetrischer Belastung der Kuppel genügt es, die auf einer Kuppelseite liegenden Stabspannungen zu kennen, da die auf allen anderen Seiten ebensogross sind. Ferner kann man Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herstellen, ohne die Spannungen der Diagonalstäbe dabei in Anspruch zu nehmen. Da in einem statisch bestimmten Fachwerke nur *ein* System von Stabspannungen möglich ist, das den Gleichgewichtsbedingungen genügt, folgt daraus, dass die Diagonalstäbe bei symmetrischer Belastung spannungslos sind.

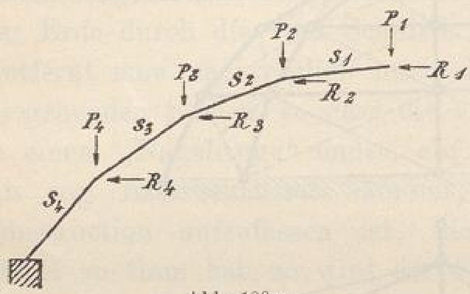

Abb. 109a.

In Abb. 109ª ist ein einzelner, aus vier Sparrenstäben mit den dazwischen liegenden Knotenpunkten bestehender Meridian einer Schwedler'schen Kuppel herausgezeichnet. Die Lasten P_1 P_2 u. s. f. an den Knotenpunkten können und werden auch im Allgemeinen von einander verschieden sein; zur symmetrischen Belastung gehört nur, dass sie sich an allen anderen Meridianen in der gleichen Weise wiederholen. An jedem Knotenpunkte greifen zwei Ringstäbe an, die gleiche Spannungen von gleichem Vorzeichen haben und die man sich durch eine in der Meridian-Ebene liegende Resultirende ersetzt denken kann. Die Resultirenden müssen zugleich in den Ringebenen liegen, also horizontal gerichtet sein. Sie wurden in der Abbildung mit R_1 R_2 u. s. f. bezeichnet und die Pfeile sind so eingetragen, wie sie bei Druckspannungen in den Ringstäben ausfallen.

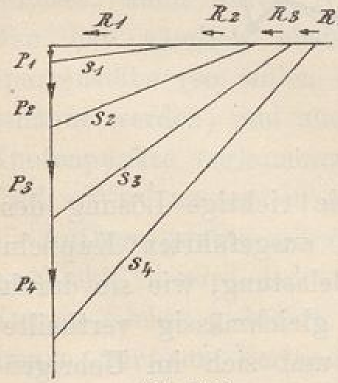

Abb. 109b.

Zur Ermittelung der Resultirenden R und der Spannungen S_1 S_2 u. s. f. in den Sparrenstäben dient der Kräfteplan in Abb. 109ᵇ. Man beginnt ihn mit dem Kräftedreiecke $P_1 R_1 S_1$ für den Knotenpunkt des Nabelrings, reiht daran das Kräfteviereck $S_1 P_2 R_2 S_2$

für den Knotenpunkt des unteren Ringes und fährt in dieser Weise fort. Die Sparrenstäbe sind sämmtlich gedrückt und ihre Spannungen wachsen von oben nach unten. Auch die Resultirenden R entsprechen bei dem gewählten Beispiele überall Druckspannungen in den Ringstäben, die aber nach unten hin abnehmen. Es kann aber auch vorkommen, dass die Stabspannungen in den unteren Ringen Null werden oder in Zugspannungen übergehen, wenn die Gestalt des Meridians etwas anders gewählt wird, oder wenn die Lasten P nach unten hin nicht so schnell zunehmen, als hier vorausgesetzt wurde. Aus dem Kräfteplane wird der Pfeil der R und hiermit das Vorzeichen der Ringspannungen immer leicht zu erkennen sein.

Die Seitenzahl des Grundrisspolygons, zu dem die Kuppel gehört, ist bis dahin ganz gleichgültig. Um aus den Resultirenden R die Spannungen der Ringstäbe selbst zu finden, muss man aber natürlich die Seitenzahl kennen. Jedes R ist dann in der Ringebene oder, was auf dasselbe hinauskommt, im Grundrisse nach den Richtungen der zugehörigen Ringstäbe zu zerlegen. Man kann die sich hierfür ergebenden Kräftedreiecke auch an die Strecken R in dem bereits gezeichneten Kräfteplane unmittelbar anreihen.

Schwedler hat die Berechnung der Stabspannungen rechnerisch durchgeführt; man erhält seine Formeln, indem man die betreffenden Strecken im Kräfteplane in den gegebenen Lasten P mit Zuhülfenahme der bekannten Richtungswinkel trigonometrisch ausdrückt. Da die Zeichnung weit bequemer ist, als die trigonometrische Rechnung, soll aber von dieser Umsetzung hier abgesehen werden.

Um ein Urtheil darüber zu gewinnen, wie sich das Spannungsbild bei unsymmetrischer Lastvertheilung gestaltet, muss man vor Allem untersuchen, welche Spannungen durch eine Einzellast, die an einem beliebigen Knotenpunkte angreift, hervorgerufen werden. Zu diesem Zwecke muss ich aber zunächst eine Bemerkung über die sogenannten Gegendiagonalen vorausgehen lassen.

Zur Aussteifung genügt es, wie wir sahen, wenn in jedes vierseitige, aus Sparren- und Ringstäben gebildete Fach eine einzige Diagonale eingeschaltet wird, die das Fach in zwei Dreiecke zerlegt. Bei symmetrischer Belastung sind die Diagonalen spannungslos, bei unsymmetrischer haben sie aber Spannungen aufzunehmen. Daraus folgt schon, dass sie bei manchen Belastungen gezogen, bei anderen — namentlich also bei jenen, die die vorigen zu symmetrischen Belastungen ergänzen — gedrückt sein werden. Nun vermeidet man es gerne, solche Stäbe, die ohnehin nur verhältnissmässig geringe Spannungen aufzunehmen haben, auf Druck in Anspruch zu nehmen, weil sie dann auf Zerknicken berechnet werden müssten und daher bei grösserer Länge einen erheblichen Materialaufwand erforderten. Man kann dies dadurch umgehen, dass man jedes Fach mit zwei Diagonalstäben versieht, die nur auf Zug widerstandsfähig zu sein brauchen, so dass die Knickgefahr ausser Betracht bleiben kann.

Freilich erhält man damit streng genommen überzählige Stäbe und ein statisch unbestimmtes Fachwerk. Die statische Unbestimmtheit ist aber hier von besonders einfacher Art und sie hindert nicht, dass die Berechnung im Wesentlichen gerade so erledigt werden kann, wie für den statisch bestimmten Träger. Denkt man sich nämlich zunächst nur in einem einzigen Fache zwei Diagonalen angeordnet, so können dadurch die Spannungen aller ausserhalb dieses Faches liegenden Stäbe überhaupt nicht geändert werden, wie auch der Träger belastet sein möge. Man erkennt dies, wenn man sich den überzähligen Diagonalstab durchschnitten und die in ihm herrschende Spannung durch äussere Kräfte an den beiden Endknotenpunkten ersetzt denkt. Nach Durchschneidung der Diagonale wird der Träger wieder statisch bestimmt und die zu den beiden neu auftretenden Lasten gehörigen Stabspannungen vertheilen sich nur auf die zu demselben Fache gehörenden Stäbe, weil man hierdurch bereits Gleichgewicht an allen Knotenpunkten herstellen kann. Daraus folgt, dass es für alle übrigen Stäbe ganz gleichgültig ist, ob die zweite Diagonale vorhanden ist oder nicht und welche Spannung in ihr auftritt, wenn sie vorhanden ist.

In Abb. 110ª ist ein einzelnes Fach herausgezeichnet. Die gestrichelt angegebene Linie 6 sei als die überzählige Diagonale angesehen. Herrscht in dieser eine beliebige Spannung, so findet man die Spannungen in den Stäben 1 bis 5, die zum statisch bestimmten Träger gehören, wenn 6 durch Lasten an den Endknotenpunkten ersetzt wird, aus dem Kräfteplane in Abb. 110ᵇ. Diese Spannungen stellen in der That Gleichgewicht an allen Knotenpunkten mit den Lasten 6 her, ohne dass die übrigen Stäbe des ganzen Trägers dabei in Mitleidenschaft gezogen würden. Der Kräfteplan ist zur Figur des einzelnen Faches reciprok und zugleich ihr auch ähnlich, wenn sich auch die einzelnen Seiten dabei nicht in der gleichen

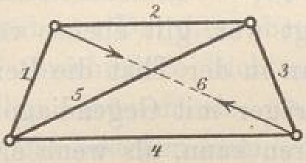

Abb. 110 a.

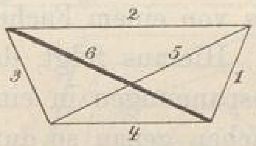

Abb. 110 b.

Weise entsprechen, wie sie sonst einander zugewiesen sind. Jedenfalls kann man aber hieraus leicht erkennen, wie gross die Spannungen in den fünf übrigen Stäben des Faches sind, die zu den Spannungen im statisch bestimmten Träger noch hinzutreten, wenn auch 6 in irgend eine Spannung geräth.

Ueber die Grösse der Spannung in 6 kann man zunächst nichts aussagen; sie hängt vor Allem davon ab, wie der Träger hergestellt wurde. Ist nämlich etwa die Diagonale 6, falls sie zuletzt eingesetzt wird, anfänglich ein wenig kürzer als die Entfernung der Knotenpunkte, so müssen diese gewaltsam ein wenig zusammengerückt werden, um die Diagonale zwischen ihnen befestigen zu können. Die Diagonale 6 geräth dann in Zugspannung und auch in den übrigen Stäben des Faches treten Montirungsspannungen auf, die dem Spannungsbilde in Abb. 110ᵇ entsprechen. Ueber diese Montirungsspannungen vermag natürlich die Theorie nichts auszusagen, so lange über den Hergang bei der Montirung nichts bekannt ist.

Nimmt man an, dass die Montirungsspannungen durch genaues Einpassen vermieden sind und dass beide Diagonalen nur gegen Zug widerstandsfähig sind, so behalte man für die Berechnung der Stabspannungen im Fachwerkträger zunächst nur eine von beiden Diagonalen bei und führe die Berechnung für den auf diese Weise erhaltenen statisch bestimmten Träger durch. Zeigt sich dann, dass die beibehaltene Diagonale bei der gegebenen Belastung auf Druck beansprucht wurde, so schalte man sie aus und setze die andere an ihre Stelle. Diese muss dann, um die Druckspannung in der vorigen zu tilgen, gezogen sein und zwar ebenso stark, als jene gedrückt war. Dabei ändern sich auch die Spannungen der zu demselben Fache gehörenden Stäbe um die aus Abb. 110[b] zu entnehmenden Beträge.

Was von einem Fache gesagt war, gilt ebenso von jedem anderen. Hieraus folgt, dass man in der That die Berechnung der Stabspannungen in einem Träger mit Gegendiagonalen im Wesentlichen genau so durchführen kann, als wenn er statisch bestimmt wäre. Man braucht nur für jedes Fach eine Diagonale beizubehalten, falls man sich vorbehält, für jene Fächer, in denen die Diagonale gedrückt würde, nachträglich die besprochene kleine Umrechnung vorzunehmen. — In der Folge werde ich mich daher auch nur mit der Berechnung des statisch bestimmten Trägers mit einer einzigen Diagonale in jedem Fache beschäftigen.

Zunächst sucht man jene Stäbe auf, die durch die gegebene Einzellast überhaupt nicht in Spannung versetzt werden. Man beginnt mit einem unbelasteten Knotenpunkte des Nabelrings. Von einem solchen gehen vier Stäbe aus, von denen drei in derselben Ebene liegen (nämlich zu demselben trapezförmigen Fache gehören). Der vierte, der nicht in dieser Ebene enthalten ist, muss nothwendig spannungslos sein, weil einer etwa in ihm auftretenden Spannung durch die Resultirende der drei anderen Stabspannungen, die mit diesen ebenfalls in derselben Ebene liegt, nicht Gleichgewicht gehalten werden könnte.

In dem Kuppelgrundrisse der Abb. 111 betrachte man z. B. das Gleichgewicht der Kräfte am Knotenpunkte A. Aus der soeben angestellten Ueberlegung folgt dann, dass der mit den drei übrigen nicht in derselben Ebene liegende Ringstab BA spannungslos sein muss. Derselbe Schluss lässt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des Nabelrings wiederholen. Wenn die gegebene Last überhaupt nicht an einem Punkte des Nabelrings angreift, wie in Abb. 111 angenommen wurde, sind alle Stäbe dieses Rings spannungslos. Nachdem man dies erkannt hat, gehe man zum Knotenpunkte A zurück. An ihm kommen jetzt nur noch zwei Stabspannungen vor, nämlich die Spannung des Sparrenstabs AC und die Spannung des Diagonalstabes. Da diese beiden Kräfte in verschiedene Richtungslinien fallen, müssen sie, damit Gleichgewicht bestehen kann, nothwendig beide gleich Null sein.

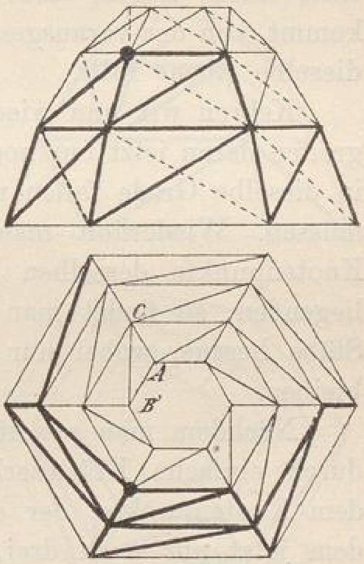

Abb. 111.

Wiederholt man diese Betrachtung für die übrigen Knotenpunkte des Nabelrings, so findet man, dass alle zum obersten Kuppelgeschosse gehörigen Stäbe an der Aufnahme einer weiter unten angebrachten Belastung unbetheiligt sind. Man kann sich daher dieses Kuppelgeschoss auch ganz entfernt denken und nun den nächst unteren Ring als Nabelring ansehen. Für ihn würden sich genau die gleichen Schlüsse wiederholen lassen, wenn nicht der Angriffspunkt der gegebenen Last zu ihm gehörte. In der Abbildung ist jener Punkt, an dem die Belastung angebracht sein soll, durch einen kleinen schwarzen Kreis hervorgehoben. Zugleich sei noch bemerkt, dass alle spannungslosen Stäbe durch feine Linien, die in Spannung versetzten durch starke Striche gekennzeichnet sind.

Immerhin lassen sich die früheren Schlüsse wenigstens für alle nicht belasteten Knotenpunkte, also z. B. für den Knotenpunkt C wiederholen. Da das obere Kuppelgeschoss nicht mehr in Betracht kommt, greifen an C nur noch vier Stabspannungen an, von denen drei in einer Ebene liegen, so dass die vierte gleich Null sein muss. Auch von diesem Ringe sind daher alle Stäbe mit einziger Ausnahme des durch einen starken Strich angegebenen ohne Spannung. Für diesen lässt sich nämlich derselbe Schluss nicht wiederholen, da zwar die übrigen Stäbe an dem belasteten Knotenpunkte ebenfalls in einer Ebene liegen, dafür aber die gegebene Last noch hinzukommt, von der vorausgesetzt wird, dass sie nicht ebenfalls in dieselbe Ebene fällt.

Kehren wir nun wieder zum Knotenpunkte C zurück, so greifen daran jetzt nur noch zwei Stabspannungen an, die nicht in dieselbe Grade fallen und die daher beide gleich Null sein müssen. Wiederholt man diese Schlüsse nicht nur für die Knotenpunkte desselben Rings, sondern auch für die tiefer liegenden, so findet man nach und nach alle spannungslosen Stäbe heraus, wobei nur noch die stark ausgezogenen übrig bleiben.

Nachdem man soweit ist, kann man alle Stabspannungen durch einfache Kräftezerlegungen finden. Man beginnt mit dem Knotenpunkte, der die gegebene Last aufnimmt und an dem jetzt nur noch drei, nicht in derselben Ebene liegende Stabspannungen vorkommen. Diese erhält man mit Hülfe eines windschiefen Kräftevierecks nach einer der im ersten Abschnitte dargelegten Methoden. Von da aus kann man dann, wie bei einem einfachen ebenen Fachwerke, der Reihe nach zu den übrigen Knotenpunkten übergehen, an denen immer nur noch entweder drei nicht in derselben Ebene liegende oder auch nur zwei unbekannte Stabspannungen vorkommen. Der einzige Unterschied gegenüber dem ebenen Fachwerke besteht darin, dass der Kräfteplan ein räumlicher ist und daher in zwei Projektionen gezeichnet werden muss. Dies macht zwar mehr Mühe, bereitet aber keinerlei Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art. Die Aufgabe kann daher als gelöst betrachtet werden. — Die Anordnung reciproker Kräftepläne, oder genauer gesagt solcher Kräftepläne, in denen jede Stabspannung nur einmal vorkommt, scheint übrigens im Raume nur in wenigen Fällen möglich zu sein, wenigstens kann man sicher nicht mit Hülfe des Nullsystems dazu gelangen; für die Ausführung des Verfahrens bleibt dies aber gleichgültig.

Hat die Kuppel in Wirklichkeit Gegendiagonalen, so ist sie symmetrisch und wenn die Last selbst in der durch den belasteten Knotenpunkt gehenden Symmetrieebene enthalten ist, kann man nur ein symmetrisches Spannungsbild erwarten, während das in Abb. 111 vorkommende sicher unsymmetrisch ist. Symmetrisch wird es erst nach den früher beschriebenen Umrechnungen innerhalb jener Fächer, in denen gedrückte Diagonalen vorkommen.

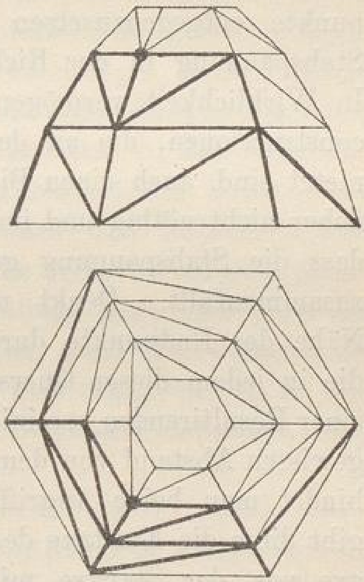

Abb. 112.

Um diese nachträglichen Umrechnungen zu vermeiden, kann man auch von vornherein die Wahl der beizubehaltenden Diagonalen so treffen, dass diese alle in Zugspannung versetzt werden. Welche dies sind, lässt sich allerdings von vornherein, d. h. ohne näheres Eingehen auf den Spannungszustand nicht wohl voraussehen. Da solche Betrachtungen schon öfters durchgeführt wurden, weiss man aber, welche beizubehalten sind. In Abb. 112, die sich im Uebrigen auf denselben Fall bezieht, wie Abb. 111, ist der Tausch in dieser Weise vollzogen. Auch hier sind die in Spannung versetzten Stäbe durch starke Striche angegeben. Man erzielt bei dieser Auswahl der Diagonalstäbe, auch abgesehen davon, dass die späteren Umrechnungen vermieden werden, auch noch den weiteren Vortheil, dass der Kräfteplan nur auf die eine Trägerhälfte (mit Einschluss der Mitte) ausgedehnt zu werden braucht und sich erheblich einfacher gestaltet.

Im Wesentlichen ist hiermit das Spannungsproblem, so weit es überhaupt in das Gebiet der Mechanik gehört, als gelöst zu betrachten. Es wird aber gut sein, wenn ich noch einige Bemerkungen über die praktische Brauchbarkeit dieser Lehren hinzufüge.

In der Theorie des Fachwerks — des ebenen, wie des räumlichen — zieht man nur den Widerstand in Rechnung, den die Stäbe einer Annäherung oder Entfernung ihrer Endpunkte entgegenzusetzen vermögen. Infolgedessen ist jede Stabspannung in der Richtungslinie des Stabes anzunehmen. In Wirklichkeit vermögen aber die Stäbe in den Fachwerkconstructionen, die an den Knotenpunkten mit einander vernietet sind, auch einen Biegungswiderstand zu leisten. Es ist daher nicht nöthig und im Allgemeinen auch nicht zu erwarten, dass die Stabspannung genau mit der Mittellinie des Stabes zusammenfällt. Denkt man sich zwei Querschnitte in der Nähe der Endpunkte durch den Stab gelegt, so mögen sich die in jedem dieser Querschnitte übertragenen Spannungen zu einer Resultirenden vereinigen lassen, deren Angriffspunkt einen gewissen Abstand von dem Querschnittsschwerpunkte hat. Verbindet man beide Angriffspunkte durch eine grade Linie, so gibt diese die Kraftaxe des Stabes an. Der Abstand der Kraftaxe von der Stabaxe mit der Stabspannung multiplicirt ist gleich dem Biegungsmomente, das von dem Stabe in dem zugehörigen Querschnitte aufgenommen wird.

Wenn die Stäbe, wie es gewöhnlich der Fall ist, ziemlich lang im Verhältnisse zu ihren Querschnittsabmessungen sind, können sie freilich nur geringe Biegungsmomente aufnehmen und die Unterschiede zwischen den Richtungen der Kraftaxen und der Stabaxen können, wie es hier immer geschah, vernachlässigt werden. Freilich kommt auch dann die Zusatzspannung, die durch die Biegung hervorgerufen wird, neben der Längsspannung in Frage, wenn es sich um die grösste Beanspruchung des Materials handelt. Auf die Berechnung dieser „Sekundärspannungen“, wie man sie zu nennen pflegt, gehe ich indessen hier nicht ein, da diese Betrachtungen besser der Constructionslehre vorbehalten bleiben.

Abgesehen davon, dass noch Sekundärspannungen hinzutreten, die eine Erhöhung der Beanspruchung des Materials an gewissen Stellen zur Folge haben, wird aber unter gewöhnlichen Umständen an den Hauptspannungen, d. h. an den Längsspannungen der Stäbe, die ohne Rücksicht auf die Stabbiegungen berechnet sind, nicht viel geändert. In einem Falle aber, der namentlich bei den Schwedler'schen Kuppeln häufig vorkommt, bringen die Richtungsunterschiede zwischen Kraftaxen und Stabaxen auch grosse Abweichungen in den Längsspannungen der Stäbe hervor. Und zwar fallen die Abweichungen, um die es sich hier handelt, im Gegensatze zu den Sekundärspannungen, zu Gunsten der Tragfähigkeit der Construction aus. Manche Flechtwerkconstructionen und besonders viele Schwedler'sche Kuppeln verdanken die verhältnissmässig grosse Steifigkeit, die sie der Erfahrung zufolge gegenüber einer Belastung durch eine Einzellast besitzen, ganz überwiegend den Abweichungen zwischen Kraftaxen und Stabaxen, d. h. dem an sich freilich gar nicht grossen Biegungswiderstande ihrer Stäbe.

Der Fall, von dem ich sprach, tritt immer dann ein, wenn die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe nahezu in einer Ebene liegen. Lägen sie genau in derselben Ebene, so würden die Stabspannungen, wenn man den Biegungswiderstand ausser Ansatz lässt, bei einer Belastung dieses Knotenpunktes unendlich gross. Auch dann, wenn sie nur nahezu in einer Ebene liegen, erhält man schon sehr grosse Stabspannungen. Wenn es aber, wie man sieht, in solchen Fällen sehr wesentlich auf die geringen Abweichungen der Stabrichtungen von der im Knotenpunkte an den Flechtwerkmantel gelegten Berührungsebene ankommt, spielen ihnen gegenüber auch die an sich freilich ebenfalls nur geringen Abweichungen zwischen den Richtungen der Kraftaxen und Stabaxen eine wichtige Rolle.

Durch die von einem Knotenpunkte eines Flechtwerkmantels ausgehenden Stäbe wird ein Vielkant bestimmt, dessen körperlicher Winkel durch den Ausschnitt auf einer von dem Knotenpunkte als Mittelpunkt gezogenen Kugelfläche gemessen werden kann. Liegen die Stäbe in einer Ebene, so wird der in das Flechtwerkinnere fallende Kugelausschnitt zu einer Halbkugel. Liegen sie nur nahezu in einer Ebene, so unterscheidet sich der Kugelausschnitt nicht viel von einer Halbkugel. Für die Kräftezerlegung an dem Knotenpunkte kommt aber nicht das Vielkant aus den Stabaxen, sondern das aus den Kraftaxen gebildete in Betracht. Der zu diesem Vielkante gehörige Kugelausschnitt kann sich schon erheblich mehr von einer Halbkugel unterscheiden, wenn der andere Kugelausschnitt sich der Halbkugel nähert.

Bei einer flachen Schwedler'schen Kuppel, die über einem Grundrisse von grosser Seitenzahl errichtet ist und deren aufeinanderfolgende Sparrenstäbe sich in der Richtung nicht viel von einander unterscheiden, liegt der besprochene Fall vor. Wenn man hier keine Rücksicht auf die Abweichungen zwischen den Kraftaxen und den Stabaxen nimmt, rechnet man viel zu ungünstig. Schon für eine verhältnissmässig geringe Einzellast an einem Knotenpunkte findet man unter dieser Annahme sehr grosse Stabspannungen. Es darf als ein Glück bezeichnet werden, dass Schwedler von diesen Folgerungen nichts wusste, da er sonst wahrscheinlich Bedenken getragen hätte, seine Kuppelconstructionen auszuführen. Die Erfahrung lehrt aber, dass diese Kuppeln solche Lasten ganz gut aufzunehmen vermögen, die ohne die geringe Biegungssteifigkeit der Stäbe und die dadurch bewirkten Abweichungen zwischen Kraftaxen und Stabaxen einen Zusammenbruch herbeiführen müssten.

Ueber diese Fragen ist zwar in den letzten Jahren öfters verhandelt worden. Zu einer praktisch brauchbaren und hinreichend genauen Lösung des Spannungsproblems für Kuppeln der bezeichneten Art haben diese Erörterungen aber bisher, meiner Ansicht nach, noch nicht geführt.

§ 43. Die Netzwerkkuppel.

Ein sehr lehrreiches Beispiel für die Berechnung der Stabspannungen in räumlichen Fachwerken liefert die Netzwerkkuppel, die sich von der Schwedler'schen Kuppel in der Anordnung nur wenig unterscheidet. Sie geht aus dieser dadurch hervor, dass man jeden Ring gegen den vorhergehenden etwas dreht, so dass jedem Stabe des einen Rings ein Knotenpunkt des anderen gegenübersteht. Hierdurch fällt zugleich der Unterschied zwischen Sparrenstäben und Diagonalen fort; die an ihre Stelle tretenden sollen als „Netzwerkstäbe" bezeichnet werden.

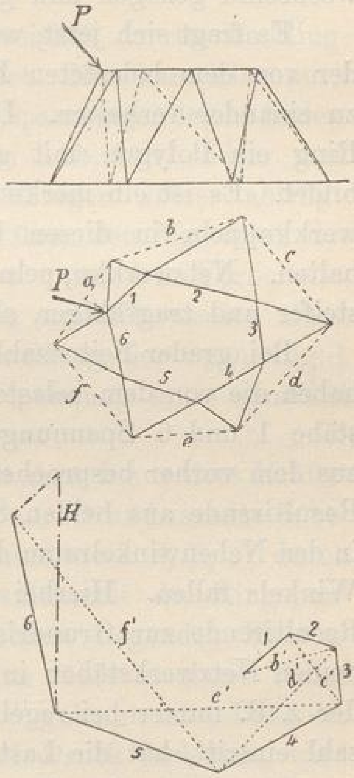

Abb. 113.

In Abb. 113 ist ein einzelnes Stockwerk einer Netzwerkkuppel über einem unregelmässig sechsseitigen Grundrisse dargestellt. Es möge zunächst besprochen werden, wie man die zu einer Last P, die an einem Knotenpunkte des inneren Ringes angreift, gehörigen Stabspannungen findet.

Man betrachte den Knotenpunkt des inneren Ringes, von dem die Stäbe 1 und 2 ausgehen. Im Gegensatze zur Schwedler'schen Kuppel liegen von den vier Stäben dieses Knotenpunktes keine drei in einer Ebene; daher kommen auch keine spannungslosen Stäbe vor. Dagegen weiss man, dass die Resultirende der Stabspannungen 1 und 2 mit der Resultirenden aus den Spannungen der beiden Netzwerkstäbe im Gleichgewichte stehen und daher in die Schnittlinie der durch beide Stabpaare gelegten Ebenen fallen muss. Diese Schnittlinie geht parallel zur Grundrissseite b. Wenn aber die Resultirende aus zwei Stabspannungen nicht in dem von den Stäben eingeschlossenen Winkelraume (oder im Scheitelwinkelraume), sondern im Nebenwinkelraume liegt, müssen beide Stabspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen sein.

Von den beiden Ringstäben 1 und 2 ist also einer gezogen und der andere gedrückt. Derselbe Schluss lässt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des inneren Ringes wiederholen und man erkennt daraus, dass die Ringstäbe abwechselnd gezogen und gedrückt sind.

Es fragt sich jetzt, wie sich die Vorzeichen der Spannungen der von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe zu einander verhalten. Dies hängt offenbar davon ab, ob der Ring ein Polygon mit grader oder mit ungrader Seitenzahl bildet. Es ist ein merkwürdiger Umstand, dass sich die Netzwerkkuppeln in diesen beiden Fällen ganz verschieden verhalten. Netzwerkkuppeln mit ungrader Seitenzahl sind weit steifer und tragfähiger, als die mit graden Seitenzahlen.

Bei grader Seitenzahl, wie in dem Beispiele der Abb. 113, haben die von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe 1 und 6 Spannungen von ungleichem Vorzeichen, wie aus dem vorher besprochenen regelmässigen Wechsel folgt. Die Resultirende aus beiden Stabspannungen muss daher ebenfalls in den Nebenwinkelraum des von beiden Stäben eingeschlossenen Winkels fallen. Hierbei kann es auch vorkommen, dass die Resultirende zur Grundrissseite a parallel geht, also mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene liegt. In diesem Falle, der z. B. immer bei regelmässigen Kuppeln von grader Seitenzahl eintritt, hat die Last P unendlich grosse Stabspannungen zur Folge, d. h. der Ausnahmefall liegt vor. Regelmässige Netzwerkkuppeln mit grader Seitenzahl sind also nicht steif und dürfen daher nicht ausgeführt werden. Uebrigens wird auch schon dann, wenn die Kuppel nicht regelmässig ist, die Resultirende aus den beiden Ringspannungen 1 und 6 leicht wenigstens nahezu in derselben Ebene mit den beiden Netzwerkstäben liegen und auch dann treten schon verhältnissmässig sehr grosse Stabspannungen auf.

Ganz anders ist es bei einer Netzwerkkuppel über einem

Grundrisse von ungrader Seitenzahl. Die beiden vom belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe haben bei ihr Spannungen gleichen Vorzeichens und die Resultirende fällt in den von den Stabrichtungen gebildeten Winkelraum. Sie liegt dann weit ab von der durch die Netzwerkstäbe gelegten Ebene und die Stabspannungen fallen klein aus. So sind besonders Netzwerkkuppeln über regelmässigen Grundrissen von ungrader Seitenzahl durchaus stabil.

Bisher habe ich nur auf die Vorzeichen der in den Ringstäben auftretenden Spannungen geachtet. Man kann aber auch die verhältnissmässigen Grössen dieser Spannungen leicht finden. Dazu zeichnet man den Kräfteplan in Abb. 113, indem man zunächst die Stabspannung 1 in beliebiger Grösse abträgt. Das kommt darauf hinaus, dass man über den Maassstab des Kräfteplans keine Angabe macht, denn unter dem Vorbehalte, dass der Maassstab nachträglich richtig ermittelt werden muss, kann jede beliebige Strecke zur Darstellung der Spannung 1 dienen. Auch das Vorzeichen dieser Spannung muss zunächst unentschieden bleiben.

Nachdem 1 aufgetragen ist, erhält man 2 aus dem Kräftedreiecke 1, 2, b', wo b' eine Parallele zur Grundrissseite b bedeutet. Hieran schliesst sich das Kräftedreieck 2, 3, c', durch das ausgesprochen wird, dass die Resultirende der Ringspannungen 2 und 3 an dem zwischen ihnen liegenden Knotenpunkte parallel zu c gehen muss. Man fährt in dieser Weise fort, bis man zum letzten Ringstabe 6 gelangt ist. Dass die Stabspannungen abwechselnd Zug und Druck bedeuten, wird durch den Kräfteplan ebenfalls schon mit ausgesprochen, wenn man vorläufig auch noch nicht weiss, welche dieser Stäbe gezogen und welche gedrückt sind.

Jedenfalls haben aber wegen der graden Seitenzahl des Grundrisses die erste und die letzte Ringspannung 1 und 6 entgegengesetzte Vorzeichen und wenn man beide an dem belasteten Knotenpunkte zu einer Resultirenden H vereinigen will, muss man die Strecke 1 an den Endpunkt von 6 so antragen, wie es in der Abbildung geschehen ist. Bei ungrader

Seitenzahl des Grundrisses hätte die Strecke 1 an den Endpunkt der letzten Ringspannung in entgegengesetzter Richtung angetragen werden müssen, um die Resultirende H zu erhalten.

Dieser Kunstgriff, den Kräfteplan zunächst einmal im unbestimmt gelassenen Maassstabe aufzutragen, kann auch in anderen Fällen, bei denen die übrigen Knotenpunkte bis auf einen unbelastet sind, manchmal mit Vortheil gebraucht werden und zwar nicht nur beim räumlichen, sondern auch schon beim ebenen Fachwerke. Hier erfahren wir dadurch, wie die Resultirende aus den Stabspannungen 1 und 6 am belasteten Knotenpunkte gerichtet ist. Am belasteten Knotenpunkte haben wir es daher nur noch mit vier Kräften zu thun, die sich Gleichgewicht halten und von denen P vollständig gegeben ist, während man von den drei übrigen die Richtungslinien kennt. Wir brauchen daher nur P nach den drei Richtungslinien mit Hülfe eines windschiefen Kräftevierecks zu zerlegen und finden damit die Spannungen der beiden Netzwerkstäbe, sowie die absolute Grösse und den Pfeil der Resultirenden H. Damit ist auch der Maassstab des vorher gezeichneten ebenen Kräfteplans bekannt und man kann daraus alle Ringspannungen entnehmen. Indem man schliesslich noch die Resultirenden b', c' u. s. f. nach den Richtungslinien der zugehörigen Netzwerkstäbe zerlegt, findet man alle Stabspannungen.

Wenn der Grundriss regelmässig ist, gestaltet sich der Kräfteplan ebenfalls regelmässig. Der Endpunkt von 6 fällt dann mit dem Anfangspunkte von 1 zusammen, d. h. der Kräfteplan bildet ebenfalls ein geschlossenes, regelmässiges Sechseck. Daraus folgt auch, dass die Richtungslinie von H in der That parallel zur Grundrissseite a werden muss. H liegt daher mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene und die Last P kann durch diese drei Kräfte nicht im Gleichgewichte gehalten werden. Damit ist die vorher schon aufgestellte Behauptung bewiesen, dass eine regelmässige Kuppel bei gerader Seitenzahl einen Ausnahmefall bildet.

Interessant ist hier übrigens, dass eine solche Kuppel nicht nur unendlich kleine, sondern sogar endliche Bewegungen ausführen kann, ohne dass sich die Stablängen zu ändern brauchten, obschon deren Zahl bei Vermeidung des Ausnahmefalles ausreicht, um die Unverschieblichkeit aufrecht zu halten. Der ganze Stabverband bildet hier einen zwangläufigen, „übergeschlossenen“ Mechanismus.

Aus Abb. 114, die eine Netzwerkkuppel über quadratischem Grundrisse darstellt, ist dies leicht ersichtlich. Man betrachte vorerst das durch eine Schraffirung hervorgehobene Dreieck mit der Spitze A. Denkt man sich alle anderen Stäbe weggeschnitten, so kann sich das Dreieck um seine Grundlinie drehen und die Spitze bewegt sich dabei auf einem Kreisbogen. Nun nehme man das Dreieck B und den Ringstab zwischen A und B hinzu. Es ist klar, dass die vorige Bewegung von A immer noch möglich ist; nur muss sich das Dreieck B heben, wenn sich A senkt, damit die Entfernung der Dreiecksspitzen nicht geändert wird. Durch punktirte Linien sind in der Abbildung die neuen Lagen der Stäbe nach einer kleinen Bewegung dieser Art angegeben.

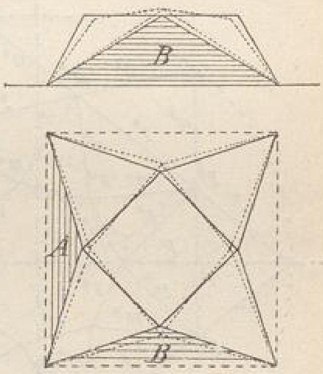

Abb. 114.

Mit dem Anschliessen der übrigen Dreiecke kann man in der gleichen Weise fortfahren. Man behält dabei immer einen zwangläufigen Mechanismus, bei dessen Bewegung sich die Dreiecksspitzen abwechselnd heben und senken. Nun fehlt noch der letzte Ringstab, der das letzte Dreieck in der Kuppel mit dem ersten verbindet. Ist der Kuppelgrundriss von ungerader Seitenzahl, so müssen sich die Spitzen von A und vom letzten Dreiecke in dem zuvor besprochenen Mechanismus gleichzeitig heben oder gleichzeitig senken. Dabei vergrössert oder verkleinert sich ihr Abstand. Sobald man also den letzten Ringstab einfügt, der beide Spitzen in unveränderlichem Abstande hält, wird damit die zuvor noch bestehende Bewegungsfreiheit aufgehoben und man erhält eine steife Kuppelconstruction.

Bei gerader Seitenzahl des Grundrisses senkt sich dagegen die letzte Dreieckspitze, wenn sich die erste hebt und umgekehrt. Dabei kann es vorkommen, dass sich der Abstand beider Spitzen ohnehin nicht ändert, wenn auch der letzte Ringstab gar nicht eingeschaltet ist. Wenn die Kuppel regelmässig ist, wie in Abb. 114, folgt schon aus Symmetriegründen, dass sich der Abstand beider Spitzen nicht ändern kann. Die Einschaltung des letzten Ringstabes ändert daher überhaupt nichts an der vorher bestehenden Bewegungsmöglichkeit und die Kuppel bleibt ein Mechanismus von endlicher Beweglichkeit. Eine Anordnung wie in Abb. 114 ist daher unbedingt zu vermeiden.

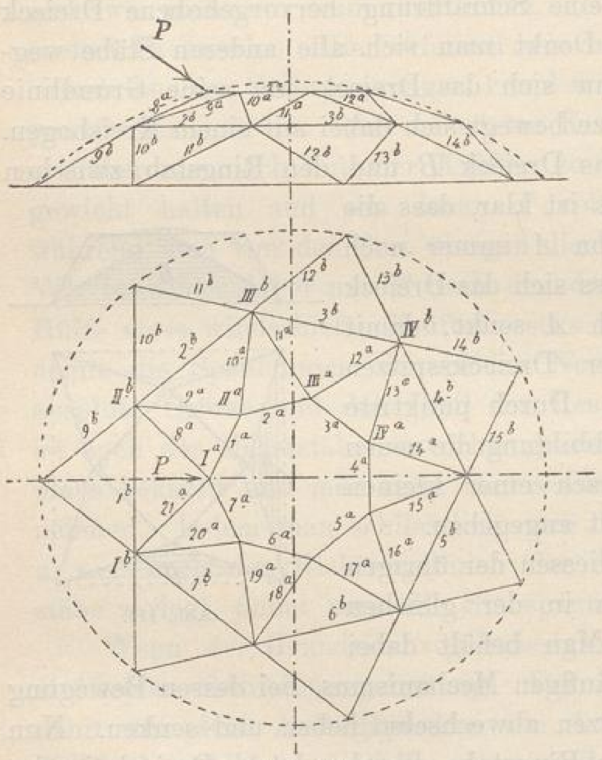

Abb. 115.

Regelmässige Netzwerkkuppeln mit ungerader Seitenzahl sind dagegen vollkommen stabil. Das Verfahren für die Berechnung der Stabspannungen sei an dem Beispiele der Abb. 115, die eine siebenseitige Kuppel darstellt, erläutert.

Zunächst weiss man, dass die Stäbe des Nabelrings abwechselnd gezogen und gedrückt sind und zwar sind diese Spannungen des regelmässigen Grundrisses wegen alle von gleicher Grösse. Die Resultirende der Stabspannungen 1^a und 7^a an dem belasteten Knotenpunkte I^a fällt also in die durch diesen Punkt gelegte Symmetrieebene der Kuppel. Die Kräftezerlegung an diesem Punkte kann daher ohne Weiteres vorgenommen werden. Abb. 116 zeigt den Kräfteplan in Aufriss und Grundriss. Man beginnt im Aufrisse mit dem Dreiecke aus P, der horizontalen Resultirenden von 1^a und 7^a und einer zu 8^a und 21^a, die sich im Aufrisse decken, parallelen Seite. Das Dreieck ist zugleich als Aufriss eines räumlichen Kräftefünfecks aufzufassen, dessen Grundriss gefunden wird, indem man die aus dem Aufrisse herabgetragene Resultirende von 1^a und 7^a nach den Richtungen dieser beiden Stäbe zerlegt und aus den Endpunkten von P und 7^a Parallelen zu 8^a und 21^a im Grundrisse zieht. Projicirt man die Ecken, in denen 1^a und 7^a sowie 8^a und 21^a aneinander stossen, nach oben, so geht auch das Dreieck im Aufrisse in ein Fünfeck über, von dem nur zweimal zwei Seiten in eine Grade fallen.

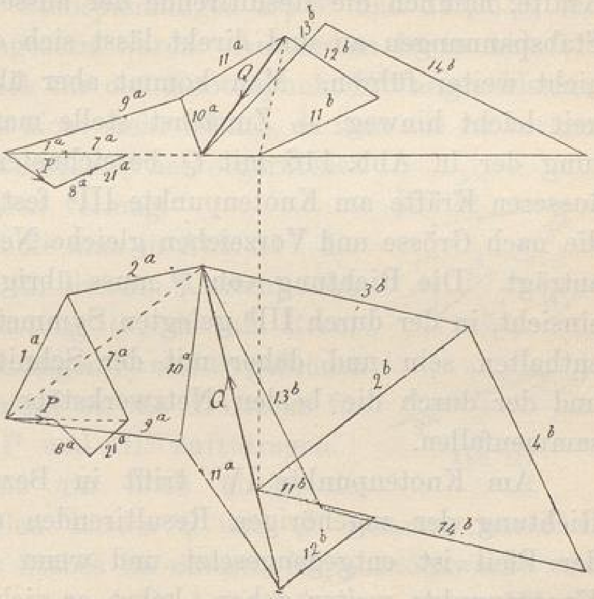

Abb. 116.

Hierauf geht man zum Knotenpunkte II^a über, indem man im Grundrisse 2^a an 1^a in gleicher Grösse anreiht und dann die Parallelen zu 9^a und 10^a zieht. Die gestrichelt gezogene Resultirende aus 1^a und 2^a geht parallel zum Stabe 2^b des unteren Ringes. Auch in den Aufriss kann das Kräfteviereck $1^a\,2^a\,9^a\,10^a$ sofort übertragen werden und für die Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung dient dabei die Bemerkung, dass die Eckpunkte, in denen 9^a und 10^a aneinanderstossen, in Aufriss und Grundriss senkrecht über einander liegen müssen.

Es ist nicht nöthig, noch weitere Knotenpunkte des Nabelrings ins Auge zu fassen, da an allen anderen dieselben Stabspannungen wie an II^a auftreten, nur mit dem Unterschiede, dass vom einen zum anderen jedesmal die Vorzeichen der Stabspannungen wechseln.

Wenn wir jetzt zum unteren Stockwerke übergehen, können wir uns das obere Stockwerk ganz beseitigt und die Spannungen der Netzwerkstäbe des oberen Geschosses an dem dazwischen liegenden Ringe als äussere Kräfte angebracht denken. Freilich greifen dann an allen Knotenpunkten dieses Ringes fünf Kräfte, nämlich die Resultirende der äusseren Kräfte und vier Stabspannungen an und direkt lässt sich daher die Zerlegung nicht weiter führen. Man kommt aber über diese Schwierigkeit leicht hinweg. — Zunächst stelle man Grösse und Richtung der in Abb. 116 mit Q bezeichneten Resultirenden der äusseren Kräfte am Knotenpunkte III^b fest, indem man an 10^a die nach Grösse und Vorzeichen gleiche Netzwerkspannung 11^a anträgt. Die Richtung von Q muss übrigens, wie man leicht einsieht, in der durch III^b gelegten Symmetrieebene der Kuppel enthalten sein und daher mit der Schnittlinie dieser Ebene und der durch die beiden Netzwerkstäbe gelegten Ebene zusammenfallen.

Am Knotenpunkte IV^b trifft in Bezug auf Grösse und Richtung der zugehörigen Resultirenden Q dasselbe zu; nur der Pfeil ist entgegengesetzt und wenn wir zum folgenden Knotenpunkte weiter gehen, kehrt er sich immer wieder um. Nur die Knotenpunkte I^b und II^b machen eine Ausnahme. An ihnen stösst jedesmal ein gezogener und ein gedrückter Netzwerkstab zusammen und die Resultirende Q' an II^b aus 8^a und 9^a konnte in dem besonderen Kräfteplane Abb. 117 aus den bekannten Strecken sofort gefunden werden.

Man untersucht nun, welche Spannungen in den Stäben des unteren Stockwerks durch eine einzige Last Q, die am Knotenpunkte III^b angreift, hervorgerufen werden. Dies geschieht genau so wie vorher die Ermittelung der Stabspannungen im oberen Geschosse unter der Last P. Man zieht in Abb. 115 einen Durchmesser durch III^b, projicirt den Schnitt mit dem

Auflagerkreise in den Aufriss und verbindet diesen Punkt mit III^b im Aufrisse. In diese Linie fällt die Resultirende aus den Stabspannungen 11^b und 12^b unter der Last Q; die Resultirende aus den Ringspannungen 2^b und 3^b ist horizontal und fällt ebenfalls in die Durchmesserebene. Hiernach konnte das Dreieck aus Q, der horizontalen Richtung und der vorher construirten Richtung der Resultirenden von 11^b und 12^b im Aufrisse gezeichnet werden. Im Grundrisse projicirt sich das Dreieck als Gerade. Dann zerlegt man die Resultirenden nach den Richtungen der Stabspannungen 2^b, 3^b und 11^b, 12^b, aus denen sie zusammengesetzt waren. Ausserdem ist in Abb. 116 noch ein Kräfteviereck für den Knotenpunkt IV^b angeschlossen. Weiter zu gehen, ist nicht mehr nöthig, da man wie im vorigen Falle nun schon alle durch Q hervorgerufenen Spannungen anzugeben vermag.

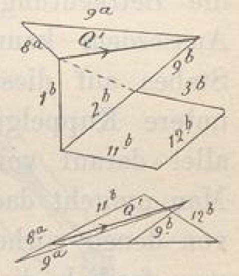

Abb. 117.

Hierauf wiederhole man in Abb. 117 dieselbe Untersuchung für die am Knotenpunkte II^b angreifende Belastung Q', die als Resultirende der Stabspannungen 8^a und 9^a gefunden war. Auch hier genügt es, die Kraftecke für die Knotenpunkte II^b und III^b aufzutragen.

Nun bleibt uns nur noch übrig, die Spannungen aus allen Lasten Q und Q' zusammenzuzählen. Die Spannung jedes Stabes im unteren Kuppelstockwerke wird als eine Summe von sieben Gliedern gefunden, deren Werthe sich aus den gezeichneten Kräfteplänen sämmtlich entnehmen lassen. Man betrachte z. B. den Stab 3^b. Die Last Q am Knotenpunkte III^b versetzt ihn, wie aus dem Kräfteplane Abb. 116 hervorgeht, in eine Zugspannung, deren Betrag mit s bezeichnet sein möge. Am Knotenpunkt IV^b greift eine Last $-Q$ an, deren Pfeil nach oben hin gekehrt ist und die, da sich sonst Alles gleich bleibt, die Spannung $-s$ in Stab III^b hervorbringt. Am folgenden Knotenpunkte V^b geht der Pfeil von Q wieder nach abwärts und der Ringstab 4^b erfährt daher eine Zugspannung vom Betrage s. Der Stab 3^b, den wir jetzt ins Auge gefasst haben, wird daher gedrückt und der vom Knotenpunkte

V^b herrührende Beitrag zur Spannung in 3^b ist gleich $-s$. Dieselben Ueberlegungen lehren, dass auch von VI^b und VII^b her die Spannungen $-s$ in 3^b erzeugt werden.

Die Last Q' am Knotenpunkte II^b bringt in 3^b, wie aus dem Kräfteplane folgt, eine Zugspannung hervor. Die entsprechende und symmetrisch zur vorigen liegende Last Q' am Knotenpunkte I^b versetzt den Stab 1^b in Druckspannung, daher 2^b in Zug- und 3^b wieder in Druckspannung und zwar vom gleichen Betrage wie vorher die Zugspannung.

Zählen wir alle sieben Posten zusammen, so finden wir die Spannung des Stabes 3^b gleich $-3s$, d. h. der Stab 3^b wird im Ganzen mit einer dreifach so grossen Kraft gedrückt, als sie aus Abb. 116 zu entnehmen ist. — Aehnlich lässt sich die Betrachtung auch für alle übrigen Stäbe durchführen. Ausserdem kann man auch, nachdem die Spannung eines Stabes auf diese Art ermittelt ist, den Kräfteplan für das untere Kuppelgeschoss unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller darauf von oben her übertragenen Lasten construiren. Man umgeht dadurch die Zusammenziehung der sieben Posten, von denen vorher die Rede war, für alle übrigen Stäbe, wofür man freilich die Construction eines neuen Kräfteplans mit in den Kauf nehmen muss.

§ 44. Das Tonnenflechtwerk-Dach.

Abb. 118 zeigt einen Theil eines Tonnenflechtwerk-Daches in axonometrischer Zeichnung. Nach vorn hin muss man sich den Stabverband in derselben Weise bis zu einer zweiten Stirnmauer hin, an der er ebenso wie an der hinteren aufgelagert wird, fortgesetzt denken.

Die Construction entsteht aus dem geschlossenen Tonnenflechtwerke auf die schon in § 41 näher beschriebene Weise. Die statische Bestimmtheit kann durch nachträgliche Fortlassung der Diagonalstäbe in den beiden untersten Seitenflächen der Tonnen und durch längsverschiebliche Auflagerung der Knotenpunkte auf einer der beiden Stirnmauern herbeigeführt werden. Diagonalen, die etwa in den Fächern der unteren

Tonnenseiten beibehalten werden, machen den Träger zwar statisch unbestimmt; die Unbestimmtheit erstreckt sich aber dann nur auf die zu diesen unteren Tonnenseiten gehörigen Stäbe, da eine Spannung in einer solchen überzähligen Diagonale, wenn sie als Last an dem statisch bestimmten Träger aufgefasst wird, nur in diesen Stäben Spannungen hervorrufen kann. Daher ist es für den Gang der Berechnung ziemlich gleichgültig, ob der Träger auf diese Art wirklich statisch bestimmt gemacht wurde, oder ob man die überzähligen Diagonalen auch in den untersten Fächern beibehält.

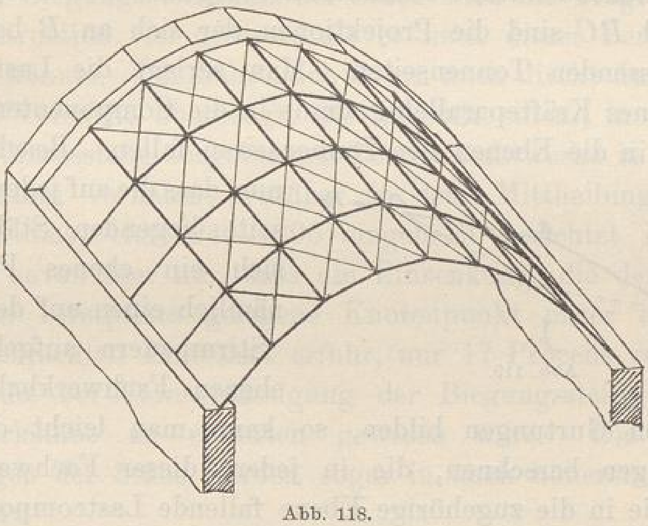

Abb. 118.

In der Abbildung sind in allen Fächern Gegendiagonalen angenommen und auch hierdurch wird nach den Ausführungen in § 42 über die Gegendiagonalen nichts Wesentliches geändert.

Wenn nur eine der Längsrichtung nach gleichförmige Belastung, also z. B. die Eigenlast des Daches in Frage käme, könnte man etwa das Sparrenpolygon (also den Querschnitt des Daches) nach einem Seilpolygone für die an den Knotenpunkten angreifenden Lasten gestalten. Dann genügten schon die in den Sparrenstäben auftretenden, aus dem Kräfteplane des Seilecks zu entnehmenden Druckspannungen, um an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herzustellen und die in horizontaler

Richtung verlaufenden „Pfettenstäbe" blieben ebenso wie die Diagonalen spannungslos. Wie bei allen Flechtwerken, bei denen die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe nicht allzuviel von einer durch den Knotenpunkt gelegten Ebene abweichen, werden aber auch hier durch Einzellasten verhältnissmässig grosse Spannungen hervorgerufen und auf die Berechnung für einen solchen Belastungsfall kommt es daher vor allen Dingen an.

Der Knotenpunkt, an dem die Einzellast P angreifen soll, ist in Abb. 119 in einem rechtwinklig zur Längsrichtung des Daches stehenden Risse besonders herausgezeichnet. Die Strecken BA und BC sind die Projektionen der sich an B beiderseits anschliessenden Tonnenseiten. Man zerlege die Last P mit Hülfe eines Kräfteparallelogramms in die Componenten P_1 und P_2, die in die Ebenen der Tonnenseiten fallen. Beachtet man nun, dass die auf jeder Tonnenseite liegenden Stäbe unter sich ein ebenes Fachwerk, nämlich einen auf den beiden Stirnmauern aufgelagerten ebenen Fachwerkbalken mit parallelen Gurtungen bilden, so kann man leicht die Stabspannungen berechnen, die in jedem dieser Fachwerkbalken durch die in die zugehörige Ebene fallende Lastcomponente P_1 oder P_2 hervorgerufen werden. Die sich im Punkte B projicirende Reihe der Pfettenstäbe bildet eine gemeinsame Gurtung für die beiden sich in ihr aneinander schliessenden ebenen Fachwerkbalken. Man muss daher, um die in diesen Pfettenstäben auftretenden Spannungen zu erhalten, die Gurtspannungen in beiden Fachwerkbalken zu einander addiren.

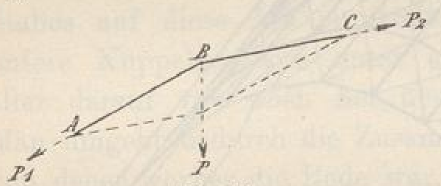

Abb. 119.

Durch diese Kräftezerlegung lässt sich an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen und da der Träger im Wesentlichen statisch bestimmt ist, erhält man hiermit auch das richtige Spannungsbild. Alle nicht zu den beiden an den belasteten Knotenpunkt sich anschliessenden Tonnenseiten gehörigen Stäbe bleiben demnach unter dem Einflusse der Einzellast spannungslos.

Bei einer praktischen Ausführung lässt sich nicht vermeiden, dass die Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Sparrenstäben nur wenig von gestreckten abweichen. Die beiden Lastcomponenten P_1 und P_2 werden dann, wie man aus Abb. 119 erkennt, verhältnissmässig gross und mit ihnen auch die Stabspannungen, namentlich jene der Pfettenstäbe, wenn überdies die Länge des Daches, die zugleich die Spannweite der einzelnen ebenen Fachwerkbalken darstellt, ziemlich gross ist. Aber auch hier gelten die gegen den Schluss von § 42 gemachten Bemerkungen. Infolge der, wenn auch nur verhältnissmässig geringen, Biegungssteifigkeit der Stäbe wird die Tragfähigkeit der Construction viel grösser, als es nach dieser Berechnung scheinen könnte. Ich habe mich davon auch direkt durch ausführliche Versuche überzeugt, die ich mit einem, in ziemlich grossem Maassstabe ausgeführten Tonnenflechtwerke in meinem Laboratorium vornahm, worüber in den „Mittheilungen“ des Laboratoriums, Heft 24, 1896 eingehend berichtet ist. Ich erwähne davon hier nur, dass die Einsenkung, die der in der Mitte der Firstpfette gelegene Knotenpunkt unter einer an ihm angebrachten Einzellast erfuhr, nur 17 Procent von jener betrug, die bei Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit der Flechtwerkstäbe zu erwarten gewesen wäre. Die Längsspannungen der Stäbe werden sogar in noch höherem Maasse vermindert.

Für den Fall einer der Längsrichtung des Daches nach gleichförmigen Lastvertheilung, die aber von einem Knotenpunkte desselben Querschnitts zum anderen beliebig wechseln kann, lassen sich die Stabspannungen ebenfalls sehr leicht berechnen, ohne dass man nöthig hätte, die von den einzelnen Lasten für sich hervorgebrachten Spannungen getrennt zu berechnen und sie dann zu summiren. In Abb. 120^a seien die Lasten P_1, P_2 u. s. f. beliebig gegeben. Man entwerfe den Kräfteplan Abb. 120^b, indem man zuerst P_1 nach 1 und 2 zerlegt, hierauf P_2 nach 2 und 3 u. s. f. Durch die Strecken *ab*, *bc*, *cd* werden dann jene Lasten angegeben, die man an den ebenen Fachwerkbalken auf den Tonnenseiten 1, 2, 3 anzubringen hat und durch die diese Fachwerkbalken auf Biegung in ihrer Ebene beansprucht werden. Hierbei hat man zuletzt

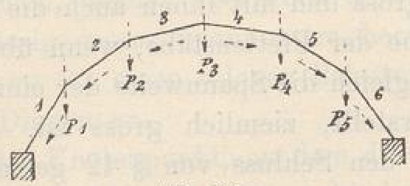

Abb. 120a.

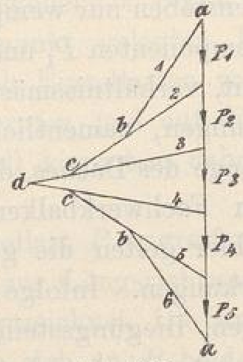

Abb. 120b.

wieder darauf zu achten, dass jede Pfettenreihe (abgesehen von der im Firste) gleichzeitig als Obergurt des einen und als Untergurt des anderen Fachwerkbalkens auftritt. Die zugehörigen Zug- und Druckspannungen gleichen sich dann zum grossen Theile gegen einander aus.

In Abb. 121[a] und 121[b] ist dasselbe für den Fall einer Belastung durch Winddruck ausgeführt. Dabei ist voraus-

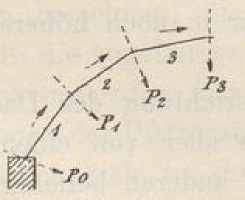

Abb. 121a.

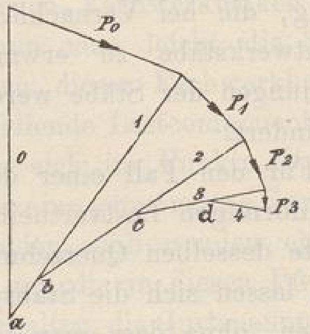

Abb. 121b.

gesetzt, dass die Widerlagsmauer nicht hinreichend widerstandsfähig gegen horizontale Kräfte ist, so dass auch in den Auflagerpunkten noch ein Winddruck P_0 von dem Träger aufzunehmen ist. Natürlich dürfen in diesem Falle die Diagonalen in den Fächern der untersten Tonnenseite nicht fehlen. — Auch hier werden die von den ebenen Fachwerkbalken aufzunehmen-den Lasten durch die Strecken ab, bc, cd des Kräfteplans angegeben und die Pfeile, nach denen sie an diesen Balken biegend angreifen, sind in Abb. 121ª eingetragen. Die weitere Berechnung der Stabspannungen, die zu diesen Lasten gehören, erfolgt wie im vorigen Falle.

§ 45. Flechtwerkträger eines Krahngerüstes.

In Abb. 24ª, S. 60 war ein ebenes Traggerüst für einen Krahn dargestellt und im zugehörigen Kräfteplane Abb. 24ᵇ waren die Stabspannungen ermittelt worden, die darin durch eine am Ausleger angreifende Last $\mathfrak{A}$ hervorgerufen werden.

Dabei musste aber vorausgesetzt werden, dass die Richtungslinie der Last $\mathfrak{A}$ in der Ebene des Binders liege, denn gegen Kräfte, die senkrecht zur Binder-Ebene gerichtet sind, ist ein ebener Stabverband, wenigstens in seiner Eigenschaft als Fachwerk, nicht widerstandsfähig.

Nun ist freilich bei einem Krahne der bei jener Gelegenheit vorausgesetzte Belastungsfall der wichtigste. Es kann aber immerhin auch vorkommen, dass die am Ausleger angreifende Kraft entweder selbst eine zur Binder-Ebene senkrechte Componente hat oder dass daneben andere Lasten (Winddruck u. dgl.) vorkommen, die zu dieser Ebene senkrecht stehen. Man muss daher auch für eine gewisse Steifigkeit der Construction senkrecht zur Binder-Ebene sorgen. Dies kann nun zwar auf verschiedene Art geschehen; am wirksamsten geschieht es aber durch den Uebergang vom ebenen zum räumlichen Fachwerke.

Man kann sich hier die Aufgabe stellen, aus der ebenen Binderfigur heraus einen räumlichen, statisch bestimmten Fachwerkträger zu entwickeln, der gegenüber Lasten, die in der Symmetrie-Ebene liegen, im Wesentlichen ebenso wirkt, wie vorher der ebene Binder, dabei aber zugleich noch im Stande ist, gegenüber Lasten, die senkrecht zu jener Ebene gerichtet sind, als Fachwerkträger, d. h. unter ausschliesslicher Beanspruchung der Stäbe auf Zug oder Druck zu widerstehen.

Auch diese Aufgabe lässt noch verschiedene Lösungen zu. Die einfachste wird durch Abb. 122 in axonometrischer Zeichnung angegeben. Dabei sei bemerkt, dass auch die gestrichelten Linien Stäbe vorstellen, die nur bei dem betreffenden Belastungsfalle spannungslos sind.

Dass der Träger statisch bestimmt ist, erkennt man am einfachsten daraus, dass sich die zu dem oberen Theile gehörigen Stäbe zu Dreiecken zusammenschliessen, die einen inneren Raum vollständig umgrenzen. Der obere Theil bildet daher ein vollständiges Flechtwerk, das durch die sechs unteren Stäbe starr mit der festen Erde verbunden ist. Mit Ausnahme der gestrichelt ausgezogenen Diagonale in dem nach unten gekehrten trapezförmigen Fache des Flechtwerkmantels ist die ganze Anordnung symmetrisch. Man kann aber die Symmetrie auch vollständig machen, indem man in dieses Fach eine zweite Diagonale einschiebt. Wir wissen schon, dass die statische Unbestimmtheit, die hierdurch eingeführt wird, unerheblich ist, da sie sich nur auf die zu demselben Fache gehörenden Stäbe erstreckt und dass auch selbst für diese Stäbe sofort klare Verhältnisse geschaffen werden, sobald man annimmt, dass beide Diagonalen als Gegendiagonalen ausgebildet, d. h. nur gegen Zug widerstandsfähig construirt werden.

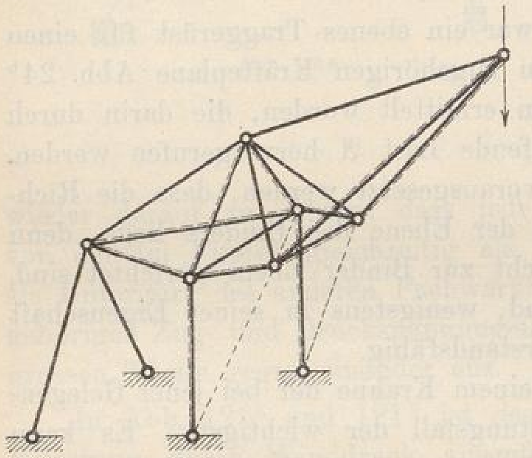

Abb. 122.

Der Aufriss des räumlichen Trägers stimmt genau mit der früheren Binderfigur überein. Daher kann auch die Berechnung der Stabspannungen für solche Lasten, die in der Mittel-Ebene liegen, aus der früher für den Binder durchgeführten Berechnung ohne Weiteres abgeleitet werden. Wenn sich nämlich Kräfte an einem Punkte im Raume im Gleichgewichte halten und man projicirt sie alle auf eine Ebene, so ist auch die geometrische Summe ihrer Projektionen gleich Null. Auf die Linien der Binderfigur projiciren sich aber die Stabspannungen des räumlichen Trägers und die im Kräfteplane der Abb. 24^b erhaltenen Strecken geben daher ohne Weiteres die Summe der Aufriss-Projektionen der Spannungen jener Stäbe an, die sich in der Binderfigur, als Aufriss des räumlichen Trägers betrachtet, übereinander decken.

Der symmetrischen Anordnung und Belastung wegen, lässt sich ferner an jedem Knotenpunkte dadurch Gleichgewicht herstellen, dass man die Spannungen der spiegelbildlich zu einander liegenden Stäbe gleichgross und von gleichem Vorzeichen annimmt, die einzelne, unsymmetrisch vorkommende Diagonale dagegen spannungslos lässt. Da der Träger statisch bestimmt und daher nur ein einziges Gleichgewichtssystem von Spannungen möglich ist, muss die genannte Diagonale hiernach auch wirklich spannungslos sein und die aus dem Kräfteplane der Abb. 24^b entnommenen Strecken geben sofort die in der Mittel-Ebene liegenden Resultirenden der Stabspannungen an, die sich in den entsprechenden Seiten der Binderfigur übereinander decken. Man braucht daher nur nachträglich noch eine Zerlegung der durch den Kräfteplan gelieferten Resultirenden nach den Richtungen der betreffenden Stäbe vorzunehmen, was etwa im Grundrisse geschehen kann.

Von jenen Stäben, die selbst in der Mittel-Ebene liegen und die sich daher im Aufrisse nicht mit anderen überdecken, liefert der ebene Kräfteplan schon unmittelbar die Spannung, ohne dass eine weitere Zerlegung nöthig wäre. Für jene Stäbe endlich, die senkrecht zur Mittelebene stehen und sich daher im Aufrisse als Punkte projiciren, findet man die Spannungen nachträglich durch Zeichnen von Kraftecken für einen ihrer Endpunkte im Grundrisse. Da die übrigen Stabspannungen schon sämmtlich bekannt sind, können diese Kraftecke ohne Weiteres aufgetragen werden.

Da alle diese Zerlegungen sehr einfach sind, habe ich die

Beigabe einer besonderen Zeichnung des Kräfteplans für entbehrlich gehalten. Dagegen sind in Abb. 122 jene Stäbe, die für den Fall einer senkrechten Last am Ausleger gedrückt sind, durch Schattenstriche hervorgehoben und die spannungslosen durch gestrichelte Linien angegeben.

Wenn die Last am Ausleger eine beliebige Richtung im Raume hat, hört die symmetrische Spannungsvertheilung auf und das bisher besprochene Verfahren ist daher nicht mehr anwendbar. Man zerlegt die Last in diesem Falle am besten in zwei Componenten, von denen eine in der Mittel-Ebene liegt und die andere senkrecht zu ihr steht, und berechnet die von jeder dieser Componenten für sich hervorgerufenen Spannungen, die man dann nachträglich summiren kann. Für den ersten Belastungsfall ist die Lösung schon bekannt; es bleibt also nur noch die zweite zu untersuchen.

In Abb. 123 ist zunächst wieder eine axonometrische Zeichnung des Krahngerüstes gegeben, in der genau wie vorher die bei dem jetzt vorliegenden Belastungsfalle spannungslos bleibenden Stäbe durch gestrichelte Linien angegeben sind. Wir wollen uns zunächst überzeugen, dass diese in der That spannungslos bleiben müssen.

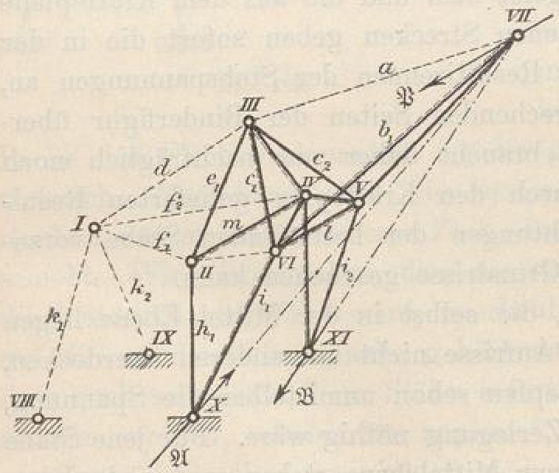

Abb. 123.

Denkt man sich die sechs Stäbe, die den oberen Flechtwerkkörper mit der festen Erde verbinden, durchschnitten, so müssen die an den Schnittstellen als äussere Kräfte anzubringenden Stabspannungen mit der Last 𝔓 am Ausleger ein Gleichgewichtssystem bilden. Für eine Momenten-Axe, die durch die Auflagerpunkte X und XI gelegt ist, verschwinden die Momente von 𝔓 (da es zur Axe parallel ist) und von den vier von diesen Punkten ausgehenden Stabspannungen. Die Summe der Momente der beiden am Knotenpunkte *I* angreifenden Stabspannungen *VIII, I* und *IX, I* muss daher ebenfalls gleich Null sein. Nun kann man sich diese beiden Spannungen zu einer am Knotenpunkte *I* an greifenden Resultirenden vereinigt denken. Die Resultirende muss in der Ebene *I, VIII, IX* enthalten sein, die zur Momentenaxe parallel ist, und damit ihr Moment zu Null wird, muss sie selbst zur Momentenaxe parallel sein.

Nachdem man dies erkannt hat, wende man den Momentensatz nochmals für eine durch den Knotenpunkt *VII* in lothrechter Richtung gelegte Momentenaxe an. Auch für diese Axe verschwinden die Momente von 𝔓 und von den zu den Auflagerpunkten *X* und *XI* gehörigen Stabspannungen. Dies erkennt man aus dem in Abb. 124^{b} gezeichneten Grundrisse, aus dem hervorgeht, dass sich die Ebenen *X, II, VI* und *XI, IV, V* in der jetzt als Momentenaxe gewählten Geraden schneiden. Demnach muss auch für diese Momentenaxe das Moment der am Knotenpunkte *I* gebildeten Resultirenden aus den Stabspannungen *VIII, I* und *IX, I* gleich Null sein. Wir erkannten aber schon vorher, dass diese Resultirende, falls sie überhaupt besteht, nur parallel zur vorigen Momentenaxe gehen kann. Wäre sie von Null verschieden, so könnte ihr Moment für die jetzt gewählte Momentenaxe nicht verschwinden, da die beiden Linien windschief zu einander liegen. Die Resultirende muss also Null sein und daher müssen auch die Stäbe, aus deren Spannungen die Resultirende gebildet war, beide spannungslos sein.

Die drei übrigen Stäbe, die noch vom Knotenpunkte *I* ausgehen, müssen nun auch spannungslos sein, da zwischen drei Kräften, die nicht in derselben Ebene liegen, nur dadurch Gleichgewicht hergestellt werden kann, dass man sie alle drei gleich Null setzt. Wir kommen ferner zum Stabe *III, VII*. Dass dieser spannungslos ist, folgt daraus, dass die Kraft 𝔓 am Knotenpunkte *VII* mit den beiden anderen von diesem Knotenpunkte ausgehenden Stäben in einer Ebene liegt. Die

Abb. 124a . . .

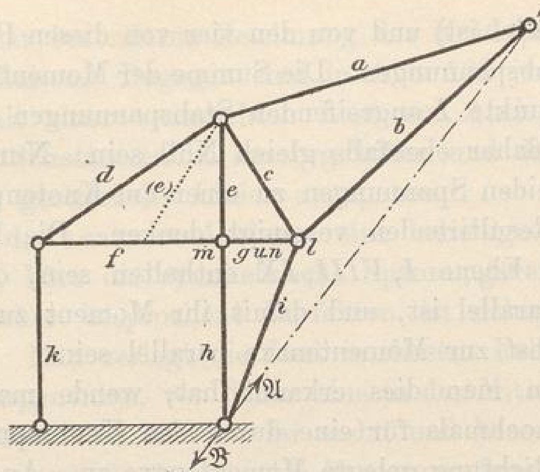

Abb. 124b . . .

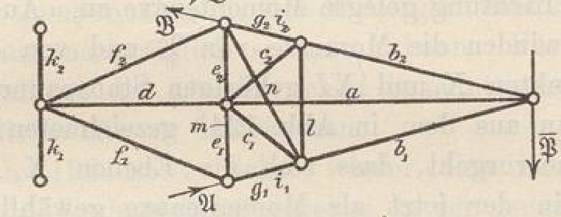

Abb. 124c . .

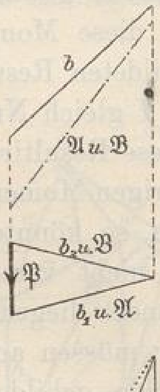

Abb. 124d.

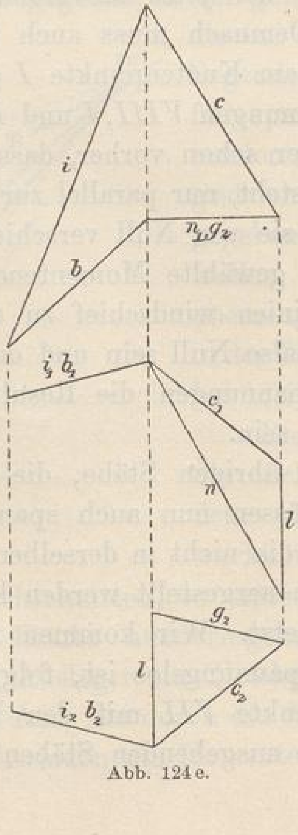

Abb. 124e.

vierte, mit den drei anderen nicht in derselben Ebene liegende Kraft muss daher gleich Null sein. Schliesslich bleibt noch der Stab *II*, *VI*. Auch bei ihm folgt der Schluss, dass er spannungslos sein muss, daraus, dass die drei anderen vom Knotenpunkte *II* ausgehenden Stabspannungen in einer Ebene liegen. Dabei ist zu beachten, dass man vorher schon erkannte, dass Stab *II*, *I* spannungslos ist.

Um ferner die Spannungen der bei dem betrachteten Belastungsfalle in Thätigkeit kommenden Stäbe zu ermitteln, erwäge man vorerst, dass der Träger nur in den Punkten *X* und *XI* Auflagerkräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ überträgt, die mit der Last $\mathfrak{P}$ ein Gleichgewichtssystem bilden. Zugleich muss $\mathfrak{A}$ in der Ebene der beiden sich in *X* anschliessenden Stäbe enthalten sein, da $\mathfrak{A}$ auch mit den Spannungen dieser Stäbe im Gleichgewichte sein muss. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{B}$. Daraus folgt, dass die Richtungslinien von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich mit $\mathfrak{P}$ im Knotenpunkte *VII* schneiden müssen.

Nach diesen Vorbemerkungen kann man zu der in Abb. 124[c] in Grundriss und Aufriss ausgeführten Kräftezerlegung schreiten. Die Kraft $\mathfrak{P}$ zerlegt man zuerst im Grundrisse nach den Richtungen von b_1 und b_2 oder auch von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, denn diese Richtungen decken sich hier. Im Aufrisse decken sich sowohl b_1 und b_2, wofür kurz b geschrieben ist, als auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Dann folgt Abb. 124[d]. Man zerlegt hier $\mathfrak{A}$, das von der vorigen Zeichnung übernommen wird, in die Stabspannungen h und i. Der Grundriss des Kräftedreiecks bildet eine Gerade. Auch die von $\mathfrak{B}$ am anderen Auflagerpunkte hervorgerufenen Stabspannungen sind hiermit bekannt; sie sind ebensogross, als die ihnen auf der Vorderseite entsprechenden, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Dies folgt schon aus der bereits beim vorigen Belastungsfalle angestellten Ueberlegung über die Stabspannungen in der Binderfigur, die den Aufriss des räumlichen Trägers bildet. Die Projektion von $\mathfrak{P}$ im Aufrisse ist nämlich im vorliegenden Falle gleich Null; daher sind auch die Stabspannungen im Binder gleich Null, d. h. die sich im Aufrisse auf denselben Linien überdeckenden Projektionen der

Stabspannungen des räumlichen Trägers sind von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen. Auch schon auf Grund dieser Ueberlegung hätte man den Nachweis erbringen können, dass die in der Mittel-Ebene selbst liegenden Stäbe a und d spannungslos sein müssen. Im Uebrigen ist darauf auch bei den weiter folgenden Zerlegungen Rücksicht zu nehmen.

Wir kommen nun zu Abb. 124^e, die zwei verschiedene Grundrisse und einen zu beiden gehörigen, gemeinsamen Aufriss umfasst. Der obere Grundriss sammt dem Aufrisse bildet das Krafteck für den Knotenpunkt VI (siehe wegen der Nummerirung der Knotenpunkte die zugehörige axonometrische Zeichnung in Abb. 123); der untere Grundriss gehört zu dem hinter VI, symmetrisch dazu liegenden Knotenpunkte V. Vom Kraftecke für den Knotenpunkt VI kennt man bereits die Stabspannungen i_1 und b_1. Diese sind im Aufrisse im Sinne ihrer Pfeile aneinandergereiht; im Grundrisse überdecken sie sich. Dann zieht man im Aufrisse die Parallelen zu c und n. Im Grundrisse tritt dazu noch die Stabspannung l, die sich im Aufrisse als Punkt projicirt. Damit sind die Projektionen des windschiefen Kräftefünfecks für den Knotenpunkt VI bereits gefunden.

Für den Knotenpunkt V gilt derselbe Aufriss; nur hat jetzt die vorher mit n bezeichnete horizontale Seite bei ihm die Bedeutung von g_2. Auch hier ergibt sich die Stabspannung l von Neuem und sie muss natürlich ebensogross ausfallen, als im vorigen Kraftecke.

Nun fehlt nur noch die Spannung der mit e bezeichneten Stäbe. Sie folgt aus dem Kräftedreiecke für den Knotenpunkt II. Dieses ist in Abb. 124^d in umgeklappter Lage, also in wahrer Gestalt und zwar mit punktirten Linien eingetragen. Dazu wurde schon im Aufrisse e in die Mittel-Ebene umgeklappt und zu der hierdurch gefundenen, punktirt ausgezogenen Richtung (e) die Parallele (e) in Abb. 124^d gezogen.

Nachträglich hat man noch die wahren Längen der im Aufrisse und Grundrisse gegebenen Stabspannungen zu ermitteln und sie nach dem gewählten Kräftemaassstabe auszumessen. Davon ist in der Zeichnung Abstand genommen.

Am einfachsten wählt man bei der Zeichnung $\mathfrak{P}$ gleich der Lasteinheit. Kommt dann irgend eine Last von beliebiger Richtung am Ausleger vor, so kann man sofort auf Grund der soeben ausgeführten Kräftezerlegung jenen Antheil der Stabspannungen, der durch die senkrecht zur Mittel-Ebene stehende Last-Componente hervorgebracht wird, angeben. Hat man ähnliche Kräftepläne auch noch für die beiden einfacheren Belastungsfälle, dass $\mathfrak{P}$ entweder lothrecht oder horizontal in der Mittel-Ebene gerichtet ist, entworfen, so wird man aus einem Vergleiche der Ergebnisse leicht auch entnehmen können, bei welcher Richtung einer Last von gegebener Grösse die grösste Zug- oder die grösste Druckspannung in irgend einem Stabe zu Stande kommt.

Aufgaben.

31. Aufgabe. Der in Abb. 125 dargestellte, (nach einer Ausführung in der Markthalle zu Leipzig als „Leipziger Kuppel" bezeichnete) räumliche Fachwerkträger wird an dem durch einen kleinen schwarzen Kreis im Grundrisse hervorgehobenen Knotenpunkte durch die beliebig gerichtete Last P belastet; man soll die Stabspannungen ermitteln.

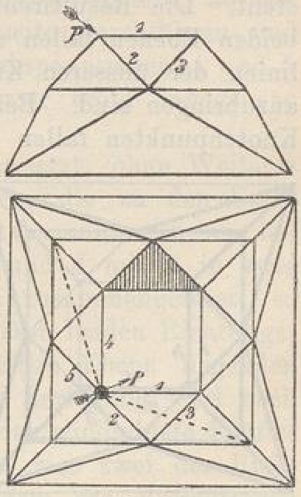

Abb. 125.

Lösung. Zunächst sei darauf hingewiesen, dass diese Kuppel aus der Schwedler'schen dadurch hervorgeht, dass die Stäbe des zweiten Ringes durch einen in ihrer Mitte liegenden Knotenpunkt unterbrochen sind, nach dem die Diagonalen hingeführt werden. Man gewinnt durch diese Zwischenschaltung noch einen weiteren Punkt auf jeder Kuppelseite, der unverschieblich fest gehalten ist und der als Stützpunkt für die Auflagerung der Dachhaut verwendet werden kann. Eine solche Einschaltung neuer Knotenpunkte ist für den Constructeur oft sehr werthvoll.

Ferner überzeugen wir uns durch Abzählen der Knotenpunkte und Stäbe, dass der Träger statisch bestimmt ist. Auf jedem

Sparrenzuge kommen 2 freie Knotenpunkte vor und mit den im zweiten Ringe eingeschalteten haben wir daher im Ganzen 12 Knotenpunkte, zu deren Verbindung mit der festen Erde 36 Stäbe erforderlich sind. So viele sind aber auch vorhanden, nämlich 4 im inneren Ringe, 8 im zweiten Ringe, 8 Sparrenstäbe und 16 Diagonalstäbe, im Ganzen 36.

Hierauf suchen wir die bei dem gegebenen Belastungsfalle spannungslos bleibenden Stäbe auf. Dazu bedarf es hier einer etwas anderen Ueberlegung als in früheren Fällen und gerade, um diese ebenfalls noch vorzuführen, habe ich das Beispiel aufgenommen.

Man betrachte das im Grundrisse der Abb. 125 durch eine Schraffirung hervorgehobene Stabdreieck. Wir wollen uns dieses Dreieck aus dem ganzen Verbande losgelöst denken, indem wir alle nicht dazu gehörigen, von den drei Ecken ausgehenden Stäbe wegschneiden und dafür deren Stabspannungen als äussere Kräfte an diesen Ecken anbringen. Diese äusseren Kräfte müssen dann ein Gleichgewichtssystem mit einander bilden. Nun liegen aber die an jeder Ecke weggeschnittenen Stäbe unter sich in einer Ebene. Denken wir uns also deren Spannungen zu einer Resultirenden vereinigt, so muss diese auch in derselben Ebene enthalten sein. Andererseits muss aber die Resultirende auch in der Dreiecksebene liegen, da sie an dem betreffenden Knotenpunkte mit den Spannungen der beiden Dreiecksstäbe im Gleichgewichte steht. Die Resultirende kann also nur in die Schnittlinie der beiden Ebenen fallen und damit kennen wir sofort die Richtungslinien der äusseren Kräfte, die an den drei Ecken des Dreiecks anzubringen sind. Bei den zum inneren Ringe gehörigen beiden Knotenpunkten fallen diese Richtungslinien mit den Sparrenstäben zusammen und an dem zum zweiten Ringe gehörigen Knotenpunkte fällt die Richtungslinie der Resultirenden auf die Ringstäbe.

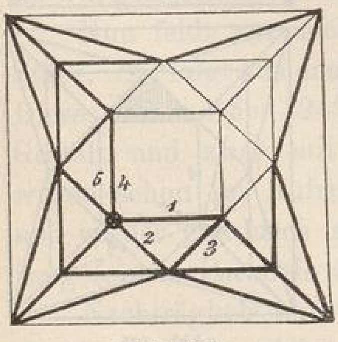

Abb. 126.

Diese drei Richtungslinien liegen in einer Ebene; sie schneiden sich aber nicht in einem Punkte. Damit Gleichgewicht zwischen den drei Resultirenden möglich sei, müssen sie daher alle drei gleich Null sein. Demnach sind auch die zu dem Dreiecke selbst gehörigen Stäbe spannungslos.

Dieselbe Betrachtung kann auch noch für das auf der nach rechts hin anstossenden Kuppelseite, sonst ebenso liegende Dreieck durchgeführt werden und auch für die zwischen beiden Kuppelseiten liegenden Stäbe findet man hierauf leicht, dass sie spannungslos sind. Das Ergebniss dieser Betrachtungen ist in Abb. 126 zusammengestellt, in der die spannungslosen Stäbe durch feine, die in Spannung versetzten durch starke Striche kenntlich gemacht sind.

Wir betrachten ferner das an den belasteten Knotenpunkt anstossende und dem schraffirten gegenüberliegende Dreieck 1,2,3 in Abb 125 und stellen dafür die gleiche Betrachtung an. Diese führt nur an dem belasteten Knotenpunkte zu einem anderen Ergebnisse. Denn da hier zu den Spannungen der weggeschnittenen Stäbe noch die Last P als äussere Kraft hinzutritt, kann die Resultirende aus den äusseren Kräften vorerst jede beliebige Richtung haben. Dagegen muss die Resultirende der Spannungen der weggeschnittenen Stäbe an dem Knotenpunkte, in dem 1 und 3 aneinander stossen, immer noch in die Richtung des Sparrenstabes und die Resultirende an dem Knotenpunkte, in dem 2 und 3 zusammenstossen, in die Richtung des Ringes fallen. Suchen wir den Schnittpunkt dieser beiden Richtungslinien auf und verbinden ihn mit dem belasteten Knotenpunkte durch die punktirt angegebene Linie, so finden wir damit auch die vorher unbestimmt gelassene Richtungslinie der Resultirenden der äusseren Kräfte an der dritten Ecke des Dreiecks. Mit dieser Richtungslinie muss auch die Resultirende der Stabspannungen 1 und 2 an dem belasteten Knotenpunkte zusammenfallen.

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch für die andere, an den belasteten Knotenpunkt anstossende Kuppelseite durchführen und man findet so, dass die Resultirende der Stabspannungen 4 und 5 am belasteten Knotenpunkte in die auf dieser Seite angegebene punktirte Linie fallen muss.

Hiermit sind wir aber in den Stand gesetzt, ohne Weiteres die Kräftezerlegungen vornehmen zu können, die zu den Stabspannungen führen. Denn von den fünf Stabspannungen am belasteten Knotenpunkte haben wir 1 mit 2 und 4 mit 5 in zwei Resultirende von bekannten Richtungslinien zusammengefasst, so dass wir nur noch nöthig haben, P nach diesen beiden Richtungslinien und nach der damit nicht in derselben Ebene liegenden Richtung des Sparrenstabes zu zerlegen. Die Zerlegung wird noch durch die Bemerkung vereinfacht, dass sich das windschiefe Kräfteviereck im Aufrisse als Dreieck projicirt, da sich zwei der Richtungslinien im Aufrisse überdecken. Nachdem die Projektionen des Vierecks gezeichnet sind, findet man auch die Stabspannungen 1 und 2, sowie 4 und 5, indem man ihre Resultirenden nach den Stabrichtungen zerlegt.

Vom belasteten Knotenpunkte kann man dann zu den übrigen fortschreiten und findet auch bei diesen die Stabspannungen durch einfache Zerlegungen nach drei Richtungen im Raume oder nach zwei Richtungen in der Ebene. Da alle diese Zerlegungen keinerlei Schwierigkeiten machen, sehe ich davon ab, die Kräftepläne hier mit aufzunehmen.