



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

Erster Abschnitt. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte am materiellen Punkte und in der Ebene

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84532)

Erster Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte am materiellen Punkte und in der Ebene.

§ 1. Zeichnung und Rechnung in der Mechanik.

Die Kräfte sind gerichtete Grössen, die sich in einer Zeichnung durch Strecken darstellen lassen. Es liegt daher nahe, die zwischen verschiedenen Kräften bestehenden Beziehungen mit Hülfe einer Zeichnung oder überhaupt auf geometrischem Wege zu verfolgen. In der That ist auch schon bei der Entwicklung der heutigen Mechanik mit Vorliebe Gebrauch von geometrischen Betrachtungen gemacht worden. In dem berühmten Galilei'schen Werke, von dem unsere Mechanik ihren Ursprung ableitet und das durch die in der Ostwald'schen Klassiker-Ausgabe erschienene Uebersetzung Jedermann leicht zugänglich gemacht wurde, steht die geometrische Behandlung überall im Vordergrund, wenn auch von einer graphischen Darstellung der Kräfte im heutigen Sinne damals noch nicht die Rede war. Von Newton und Varignon wurde dann später das Kräfteparallelogramm eingeführt, jenes einfache und sinnfällige Hilfsmittel zur Ermittlung der Resultirenden von zwei an demselben Punkte angreifenden Kräften.

Inzwischen war jedoch von Descartes die Coordinatenmethode in die Geometrie eingeführt worden. Die Lösung geometrischer Probleme wurde hierdurch der Rechnung in weit höherem Maasse zugänglich gemacht, als dies früher möglich war. Die grossen Erfolge, die auf diesem Wege in

der Geometrie gewonnen wurden, konnten ihre Rückwirkung auf die Mechanik nicht verfehlen. So kam es, dass man nun mit Vorliebe alle in der Mechanik vorkommenden Vektoren in ihre Componenten nach den Axenrichtungen eines Coordinatensystems zerlegte und mit diesen rechnete. Wie alle grossen Bewegungen in der Wissenschaft schoss auch diese schliesslich für längere Zeit über ein verständig gestecktes Ziel hinaus. Man verschmähte sowohl die im Maassstabe ausgeführte Zeichnung als auch die sich an das geometrische Bild auf Grund geometrischer Sätze anschliessende Untersuchungsmethode. Unmittelbar nach Newton und von da ab während eines mehr als ein Jahrhundert umfassenden Zeitraumes wurde die Mechanik vorwiegend und zuletzt fast ausschliesslich nach der analytischen Methode, also auf Grund der Rechnung mit Coordinaten und Componenten betrieben. Auch daran, mit den gerichteten Grössen selbst, anstatt mit ihren Componenten zu rechnen, wie man es heute in vielen Fällen mit so grossem Vortheile thut, dachte zu jener Zeit Niemand.

Zwar vermochte sich selbst in jener Zeit wenigstens die Construction des Kräfteparallelogramms zu behaupten. Selten genug mag es freilich wirklich im Maassstabe gezeichnet und zur unmittelbaren Ableitung eines fertigen Resultats gebraucht worden sein. Es diente mehr zur Veranschaulichung und als Grundlage für eine sich daran schliessende Rechnung, wie als Werkzeug für die endgültige Durchführung einer Untersuchung. Bis weit über den Anfang des jetzt abgelaufenen Jahrhunderts hinaus behielt diese rein arithmetische Richtung in der Mechanik die Oberhand und in Lagrange, dem Meister der analytischen Mechanik, erreichte sie ihren Höhepunkt.

Erst die Techniker, die mit dem neunzehnten Jahrhundert als ein wesentlich mitbestimmendes Element in den Kreis der wissenschaftlich Thätigen einzutreten begannen, haben hierin — wie in so vielen anderen Dingen — Wandel geschaffen und sowohl die zeichnerische wie die geometrische Behandlung der Mechanik wieder zu Ehren gebracht. Beides ist nämlich desshalb nicht genau dasselbe, weil man die Geometrie und

hiermit auch die Mechanik rein synthetisch betreiben kann, ohne darum die im Geiste entworfenen und durchgeführten Constructionen auf dem Papiere im Maassstabe verwirklichen zu müssen. Von den grossen Meistern hat wohl Poncelet, der berühmte Militär-Ingenieur, der auch die synthetische Geometrie zu neuem Leben erweckte, der Befestiger von Metz, diesen Weg zuerst wieder eingeschlagen. Andere folgten ihm. Vor allen war es aber Culmann, der durch sein 1864 erschienenes bahnbrechendes Werk „Die graphische Statik“ die graphische Methode namentlich für die Theorie der Bauconstructionen zur allgemeinen Anerkennung und Einführung brachte.

Als Hilfsmittel für die Durchführung allgemeiner Betrachtungen benutzte Culmann in erster Linie die synthetische Geometrie. In diesem Punkte freilich folgte man ihm anderwärts, wenigstens nachdem sich der erste Eifer etwas gelegt hatte, minder bereitwillig, so rasch und freudig man auch im Uebrigen die zeichnerische Behandlung der Mechanik der Bauconstructionen allenthalben aufnahm. Man fand bald heraus, dass der grosse praktische Werth der graphischen Methode von einer ausgedehnten Anwendung der projektivischen Geometrie ziemlich unabhängig ist. Der richtige Weg liegt indessen hier wohl in der Mitte. Uebrigens hat Culmann selbst in der zweiten Auflage seines Werkes, von der der erste Band im Jahre 1875 erschien — der in Aussicht gestellte zweite Band blieb leider aus — neben der Geometrie auch von der Rechnung sehr ausgiebigen Gebrauch gemacht.

Heute pflegt man — verständiger Weise — ohne besondere Bevorzugung des einen oder des anderen Verfahrens, bald die Zeichnung, bald die Rechnung anzuwenden, jenachdem sich diese oder jene im Einzelfalle besser eignet. Hierdurch ist die Bezeichnung „graphische Statik“ ihres ursprünglichen Sinnes mehr oder weniger entkleidet worden. Die Techniker verstehen darunter gewöhnlich die Statik der Tragconstructionen überhaupt, ohne jene Theile, die besser auf dem Wege der Rechnung behandelt werden, davon auszuschliessen. Abgesehen von manchen allgemeiner gehaltenen Untersuchungen, die in

der graphischen Statik am besten ihren Platz finden, habe ich mich auch selbst in meinen Vorlesungen diesem Gebrauche angeschlossen. Freilich darf man dabei nicht erwarten, die gesammte specielle Theorie der Tragconstructionen in diesem Werke auseinandergesetzt zu finden. Nur die Erörterung der grundlegenden Untersuchungen und Methoden gehört in eine Vorlesung über technische Mechanik, während die weitere Ausführung und die Anwendung dieser Lehren beim Construiren von Bauwerken oder Maschinen den betreffenden Fachvorlesungen zu überlassen ist. — Die ihrem ursprünglichen Sinne nach nicht völlig zutreffende, mit dem heutigen Sprachgebrauche jedoch ganz gut in Uebereinstimmung stehende Bezeichnung dieses Bandes erklärt sich hiernach aus dem historisch Gewordenen.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass sich die zeichnerische Behandlung vorwiegend für die Untersuchung eines bestimmt gegebenen Einzelfalles eignet. Für die Ableitung allgemein gültiger Sätze ist dagegen die Rechnung gewöhnlich im Vortheile, — obschon es in beiden Fällen nicht an Ausnahmen fehlt. Bei den Anwendungen der Statik auf die in der Praxis des Ingenieurs oder Architekten vorkommenden Aufgaben hat man es aber meistens mit genau umschriebenen Specialfällen zu thun und hieraus erklärt sich der grosse praktische Nutzen des graphischen Verfahrens.

Zuweilen könnte wohl als ein Vorzug des rechnerischen Verfahrens der Umstand in Betracht kommen, dass die Rechnung eine beliebig genaue Annäherung gestattet, während diese bei der Zeichnung durch die unvermeidlichen Zeichenfehler von vornherein beschränkt ist. Thatsächlich reicht indessen die in der Zeichnung bei gewöhnlicher Sorgfalt zu erreichende Genauigkeit so ziemlich bei allen in der technischen Praxis vorkommenden Aufgaben vollständig aus, so dass sich der genannte Unterschied kaum jemals ein wirklicher Nachtheil des graphischen Verfahrens bemerkbar machen kann. Vielmehr kann umgekehrt die Leichtigkeit, mit der man gröbere Versehen in der Zeichnung herauszufinden vermag, während ein

größerer Fehler in der Zahlenrechnung weit eher unbemerkt bleibt, als ein Vorzug des graphischen Verfahrens bezeichnet werden, der ganz anders ins Gewicht fällt, als jener geringe oder auch nur vermeintliche Nachtheil.

Von den Lehren des ersten Bandes, die ich als bekannt voraussetze, kommen hier namentlich zwei einfache Sätze in Betracht. Zunächst der Satz, dass die Resultirende von Kräften, die an demselben Punkte angreifen, durch geometrische Summirung der Kräfte gefunden wird, oder dass sich im Falle des Gleichgewichts die zur Darstellung der Kräfte benutzten Strecken zu einem geschlossenen Vielecke aneinander reihen lassen müssen. Und dann der Satz, dass sich der Angriffspunkt einer an einem starren Körper angreifenden Kraft, so lange es auf die Vertheilung der inneren Kräfte in dem Körper nicht ankommt, längs der Richtungslinie verlegen lässt, so dass in solchen Fällen die Angabe eines Angriffspunktes auf der Richtungslinie auch ganz entbehrt werden kann. Hieran schliesst sich die Bemerkung, dass Gleichgewicht jedenfalls immer dann besteht, wenn die äusseren Kräfte entweder so an dem Körper vertheilt sind, dass sie sich an jedem Angriffspunkte einzeln im Gleichgewichte halten oder auch dann, wenn sich das gegebene Kräftesystem (durch Anwendung des Satzes von der Verschiebung des Angriffspunktes, nöthigenfalls unter Zufügung von neuen Kräften, die unter sich selbst im Gleichgewichte stehen) auf ein solches zurückführen lässt, das dieser Bedingung genügt.

Wenn die Richtungslinien der Kräfte, deren Resultirende gesucht wird, nicht alle in einer einzigen Ebene enthalten sind, wird der Linienzug, mit dessen Hülfe man ihre geometrische Summe bildet, windschief. Solche Fälle kommen nicht selten vor. Ihre Erledigung macht aber keine Schwierigkeiten: man braucht dazu nur die Projektionen des Linienzuges in mehreren Rissen zu zeichnen. Von den Methoden der darstellenden Geometrie muss man ohnehin schon Gebrauch machen, um die Richtungslinien der Kräfte in die Zeichnung des Körpers, an dem sie angreifen, einzutragen und es macht dann gar keine

weiteren Umstände, im Anschlusse hieran auch das Kräftepolygon oder das Kräfteck, wie es neuerdings von Vielen lieber genannt wird, durch seine Risse darzustellen.

In Abb. 1 ist dies ausgeführt. An dem mit A in Abb. 1^a bezeichneten Angriffspunkte, der durch Aufriss und Grundriss gegeben ist, greifen die mit 1, 2, 3 bezeichneten Kräfte an, die ebenfalls durch ihre Projektionen dargestellt sind. Man wähle nebenan in Abb. 1^b einen Punkt O bzw. seine Projektionen in beiden Tafeln beliebig aus und setze von ihm aus die

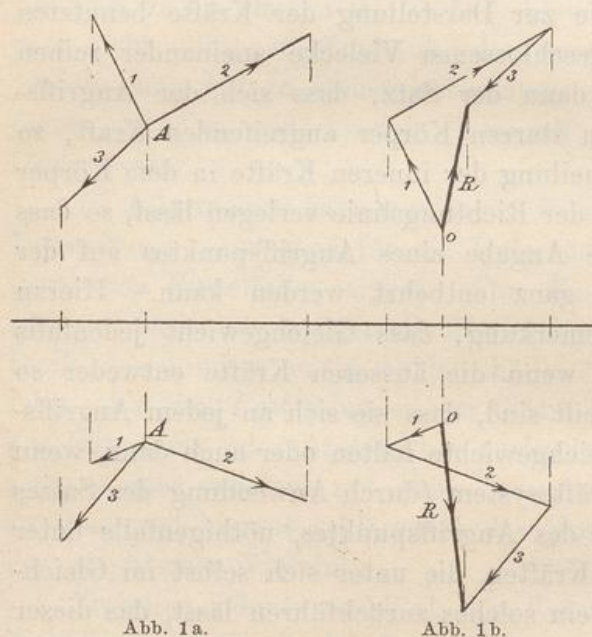


Abb. 1a.

Abb. 1b.

Strecken 1, 2, 3 im Sinne ihrer Pfeile aneinander. Dies geschieht indem man die Projektionen der Kräfte in beiden Rissen aneinander reiht. Die von O aus nach dem Endpunkte des Linienzuges gehende Schlusslinie R des Kräftecks gibt die Resultierende an. Die Reihenfolge der Zusammen-

setzung ist, wie von früher her bekannt ist, ohne Einfluss auf das Resultat. Jedenfalls muss man aber darauf achten, dass die Pfeile der Kräfte 1, 2, 3 u. s. f. im gleichen Umlaufsinne aufeinanderfolgen, während der Pfeil von R diesem Umlaufsinne entgegengesetzt ist. Die absolute Grösse der Resultierenden findet man durch Ermittlung der wahren Länge der durch die Projektionen dargestellten Strecke R , die nach demselben Maassstabe auszumessen ist, der schon beim Auftragen der gegebenen Kräfte 1, 2, 3 zu Grunde gelegt wurde.

Dieses Verfahren bleibt für eine beliebige Anzahl gegebener

Kräfte anwendbar. Hat man, wie in dem gewählten Beispiele, nur drei Kräfte zusammzusetzen, so kann dies auch durch Construction eines Parallelepipedes geschehen, wovon A eine Ecke ist, von der die drei Strecken 1, 2, 3 als Kanten ausgehen. Die von A aus gezogene Hauptdiagonale des Parallelepipedes gibt die Resultirende der drei Kräfte an. Dies folgt leicht daraus, dass die Hauptdiagonale eines Parallelepipedes als geometrische Summe der drei Kanten angesehen werden kann. Man stellt diesen Satz vom Kräfteparallelepipedem gern dem Satze vom Kräfteparallelogramme gegenüber. Für die wirkliche Ermittlung von R ist aber die in Abb. 1 benutzte Construction gewöhnlich weit einfacher und bequemer als die Construction des Parallelepipedes.

Um die gleiche Aufgabe analytisch zu lösen, ermittelt man zunächst die Projektionen der Kräfte 1, 2, 3 auf drei zu einander rechtwinkligen Axen. Die Componenten von R in den Richtungen dieser Axen sind dann gleich den algebraischen Summen der Componenten der gegebenen Kräfte in denselben Axenrichtungen. Hiermit ist auch die Grösse von R als Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Componenten bekannt und die Richtung von R lässt sich durch die Cosinus der Winkel zwischen R und den Axenrichtungen hinreichend beschreiben. Aus den Lehren von Band I geht dies bereits hinreichend hervor.

§ 2. Zerlegung einer Kraft nach gegebenen Richtungslinien.

Eine gegebene Kraft \mathfrak{P} , die am Punkte A angreift (Abb. 2^a), soll nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien 1 und 2 zerlegt werden. Diese Ebene möge als Zeichenebene gewählt sein. Unter der Zerlegung ist ein Ersatz von \mathfrak{P} durch zwei in den bezeichneten Richtungslinien wirkende Kräfte zu verstehen. Die Zerlegung erfolgt mit Hülfe des in Abb. 2^b

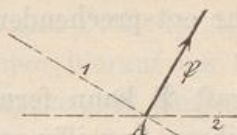


Abb. 2a.

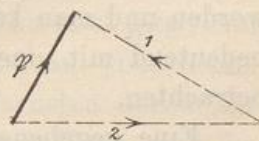


Abb. 2b.

gezeichneten Kräfte-dreiecks \mathfrak{P} , 1, 2, von dem die eine Seite \mathfrak{P} vollständig gegeben ist, während von den beiden anderen Seiten die Richtungen bekannt sind. Bei der Festsetzung der den Seiten des Kräfte-dreiecks zugehörigen Pfeile hat man darauf zu achten, dass \mathfrak{P} die Resultirende von 1 und 2 sein soll. — Auch mit Hülfe eines Kräfteparallelogramms, das unmittelbar vom Punkte A aus in den gegebenen Richtungen, mit \mathfrak{P} als Diagonale, gezeichnet wird, lässt sich die verlangte Zerlegung ausführen. In der Regel ist aber die Benutzung eines nebenan besonders herausgezeichneten Kräfte-dreiecks für die Lösung der Aufgabe mehr zu empfehlen. Man sieht dies vielleicht zuerst nicht recht ein, wenn man nur einer so einfachen Zeichnung wie in Abb. 2 gegenübersteht; sobald dieselbe Construction aber sehr oft wiederholt auf kleinem Raume in derselben Zeichnung durchgeführt werden muss, ist der Vortheil, den man durch Trennen des Kräfte-cks von der Zeichnung, in der die Kräfte gegeben sind, erlangt, sehr erheblich.

Die Zerlegungsaufgabe steht im engsten Zusammenhange mit einer Gleichgewichtsaufgabe. Weiss man nämlich, dass die vollständig gegebene Kraft \mathfrak{P} mit zwei anderen Kräften, deren Richtungslinien 1, 2 bekannt sind, im Gleichgewichte stehen muss, so findet man aus der Construction des Kräfte-dreiecks \mathfrak{P} , 1, 2 auch die Grössen von 1 und 2. Der einzige Unterschied gegenüber dem vorigen Falle besteht darin, dass jetzt die Pfeile der Kräfte 1 und 2 umzukehren sind, weil die geometrische Summe aller drei Kräfte zu Null werden muss. Dasselbe trifft auch bei den anderen Zerlegungsaufgaben zu, mit denen wir uns in der Folge noch zu beschäftigen haben werden und man kann daher jede Zerlegungsaufgabe als gleichbedeutend mit einer ihr entsprechenden Gleichgewichtsaufgabe betrachten.

Eine gegebene Kraft \mathfrak{P} kann ferner auch in eindeutiger Weise nach drei durch ihren Angriffspunkt gehenden Richtungslinien zerlegt werden, wenn diese nicht in derselben Ebene liegen. Am einfachsten gestaltet sich hier die Lösung, oder wenigstens die zu einer Lösung führende Ueberlegung auf

Grund des Satzes vom Kräfteparallelepiped. Von diesem ist die Hauptdiagonale \mathfrak{P} vollständig gegeben, während man zugleich die Richtungen der drei vom Angriffspunkte ausgehenden Kanten kennt. Man lege drei Ebenen durch diese drei Kanten und ziehe zu jeder durch den Endpunkt von \mathfrak{P} eine parallele Ebene. Damit hat man die 6 Seitenflächen des Parallelepipedes, dessen Kanten und Eckpunkte nun leicht aufgesucht werden können.

In Abb. 3 ist dies für den Fall ausgeführt, dass zwei der gegebenen Richtungslinien, nämlich 1 und 2, in einer horizontalen Ebene liegen. Vereinfachungen dieser Art kommen nämlich bei der wirklichen Ausführung der Construction bei der praktischen Anwendung sehr häufig vor und es schien nützlich, um bei dem ersten Beispiele zu einer möglichst einfachen Figur zu gelangen, den einfacheren Fall von vornherein voranzusetzen. Das Verfahren selbst bleibt sich ohnehin in allen Fällen gleich. Die

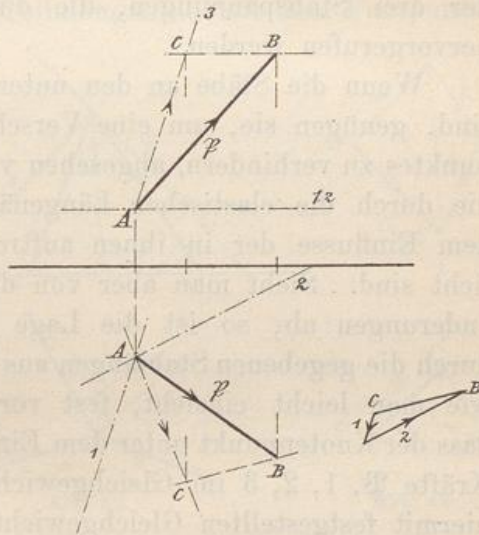


Abb. 3.

Kraft \mathfrak{P} ist durch die Strecken AB in Aufriss und Grundriss dargestellt. Man lege durch den Endpunkt B eine horizontale (d. h. zu 1, 2 parallele) Ebene und suche deren Schnittpunkt C mit der Richtungslinie 3 auf. Die Strecke AC gibt dann schon Grösse, Richtung und Pfeil der Kraft 3 an. Die beiden anderen Kräfte findet man hierauf am einfachsten durch Zerlegung der durch die Strecke CB dargestellten Kraft nach den Richtungen von 1 und 2, also durch Construction eines Kräfte-dreiecks, von dem CB die vollständig gegebene Seite bildet. Im Grundrisse ist dies nebenan ausgeführt.

Gewöhnlich bedient man sich aber anderer Verfahren zur

Ausführung der Kräftezerlegung oder zur Lösung der ihr entsprechenden Gleichgewichtsaufgabe. Sehr häufig wird namentlich ein von Culmann angegebenes Verfahren benutzt, das in Anlehnung an eine öfters vorkommende Aufgabe näher erläutert werden mag. In Abb. 4^a seien 1, 2, 3 die im Aufrisse und Grundrisse gezeichneten Stäbe eines sogenannten Bockgerüstes, die man sich oben gelenkförmig mit einander verbunden denken mag, während die unteren Endpunkte festgehalten sind. \mathfrak{P} sei eine äussere Kraft, die an dem oberen Knotenpunkte angreift; es handele sich um die Bestimmung der drei Stabspannungen, die durch \mathfrak{P} in den drei Stäben hervorgerufen werden.

Wenn die Stäbe an den unteren Endpunkten festgehalten sind, genügen sie, um eine Verschiebung des oberen Knotenpunktes zu verhindern, abgesehen von den kleinen Bewegungen, die durch die elastischen Längenänderungen der Stäbe unter dem Einflusse der in ihnen auftretenden Spannungen ermöglicht sind. Sieht man aber von diesen geringfügigen Längenänderungen ab, so ist die Lage des oberen Knotenpunktes durch die gegebenen Stablängen aus rein geometrischen Gründen, wie man leicht einsieht, fest vorgeschrieben. Daraus folgt, dass der Knotenpunkt unter dem Einflusse der auf ihn wirkenden Kräfte \mathfrak{P} , 1, 2, 3 im Gleichgewichte bleiben muss. Aus der hiermit festgestellten Gleichgewichtsbedingung lassen sich die drei Stabspannungen ableiten.

Hierzu denke man sich die 4 Kräfte in zwei Gruppen eingetheilt, von denen die eine aus den Stabspannungen 1 und 2, die andere aus \mathfrak{P} und 3 gebildet wird. Jede dieser beiden Gruppen kann man sich durch eine Resultirende ersetzt denken. Die Resultirende aus 1 und 2 muss jedenfalls in der durch die Richtungslinien beider Stäbe bestimmten Ebene enthalten sein und ebenso die andere Resultirende in der durch \mathfrak{P} und 3 gelegten Ebene. Da die 4 Kräfte im Gleichgewichte standen, müssen auch die beiden Resultirenden Gleichgewicht mit einander halten. Dazu gehört aber, dass sie in die gleiche Richtungslinie fallen. Hiernach muss die gemeinsame Richtungs-

linie von beiden mit der Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und \mathfrak{P} , 3 zusammenfallen. Sobald man aber die Richtungslinie der Resultirenden aus \mathfrak{P} und 3 kennt, steht nichts mehr im Wege, ein Kräfte-dreieck aus diesen 3 Kräften zu zeichnen, das zunächst die Spannung im Stabe 3 und zugleich die Resultirende aus den beiden anderen Stabspannungen kennen lehrt. Diese selbst ergeben sich schliesslich durch Zeichnen eines zweiten Kräfte-dreiecks.

In Abb. 4 sind alle diese Constructionen ausgeführt. Zuerst wurde in Abb. 4^a die horizontale Spur der Richtungslinie von \mathfrak{P} aufgesucht. Die Verbindungslinie mit dem Fusspunkte des Stabes 3 liefert

die horizontale Spur der Ebene \mathfrak{P} , 3. Die Spur der Ebene 1, 2 wird durch Verbinden der Fusspunkte beider Stäbe erhalten. Der Schnittpunkt der Spuren beider Ebenen liefert einen Punkt der

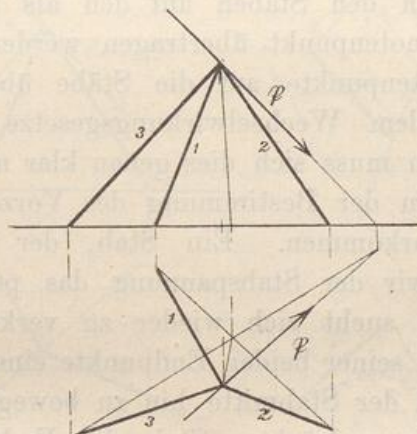


Abb. 4 a.

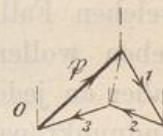
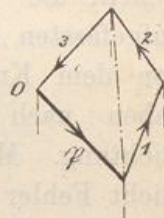


Abb. 4 b.

gesuchten Schnittlinie und die Schnittlinie selbst wird durch Ziehen der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem oberen Knotenpunkte erhalten. Sie kann dann auch noch in den Aufriss eingetragen werden. Nach diesen Vorbereitungen kann man zur Construction des in Abb. 4^b gezeichneten Kräfte-cks übergehen. Man trägt zunächst, von einem beliebigen Punkte O beginnend, die gegebene Last \mathfrak{P} in Aufriss und Grundriss auf. Parallelen von den Endpunkten zu 3 und der Schnittlinie beider Ebenen in beiden Projektionstafeln liefern die Risse des ersten Kräfte-dreiecks. Zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung dient die Bemerkung, dass die Projektionen des dritten Dreieckspunktes in beiden Tafeln senkrecht über-

einander liegen müssen. Dann reiht man Parallelen zu 1 und 2 an, deren Schnittpunkte in beiden Projektionsebenen wiederum von selbst senkrecht übereinander liegen müssen. Man hat nun den ganzen windschiefen Kräftezug \mathfrak{P} , 1, 2, 3 vor sich und trägt nachträglich die Pfeile so ein, dass sie alle stetig aufeinander folgen.

Die Grösse der Stabspannungen erhält man hierauf durch Ermittlung der wahren Längen der Krafteckseiten. In der Abbildung ist dies nicht weiter ausgeführt. Ferner ergibt sich aus den Pfeilen, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt sind. Hierzu beachte man, dass sich die Pfeile auf jene Kräfte beziehen, die von den Stäben auf den als materiellen Punkt aufgefassten Knotenpunkt übertragen werden. Die rückwärts von dem Knotenpunkte auf die Stäbe übertragenen Kräfte haben nach dem Wechselwirkungsgesetze entgegengesetzte Richtung. Man muss sich dies genau klar machen, weil sonst leicht Fehler in der Bestimmung des Vorzeichens der Stabspannungen vorkommen. Ein Stab, der gezogen ist (für welchen Fall wir der Stabspannung das positive Vorzeichen geben wollen), sucht sich wieder zu verkürzen; er äussert daher an jedem seiner beiden Endpunkte eine Kraft, die diesen Endpunkt nach der Stabmitte hin zu bewegen sucht. Umgekehrt sucht ein gedrückter Stab die Endpunkte (oder die Körper, die ihn an diesen Endpunkten fassen) auseinander zu schieben. Ein Pfeil im Kraftecke der Abb. 4, der an den Knotenpunkt übertragen von der Stabmitte abgewendet ist, zeigt daher eine Druckspannung im Stabe an. Auf Grund dieser Ueberlegung findet man aus der Zeichnung, dass die Stäbe 1 und 2 bei der angenommenen Belastung des Bockgerüsts gedrückt sind, während 3 gezogen ist.

Eine andere Lösung derselben Aufgabe, die sich auf eine auch sonst in der graphischen Statik sehr häufig benutzte Ueberlegung stützt, rührt von Müller-Breslau her. Man beginnt bei ihr sofort mit der Construction des windschiefen Kräftevierecks der Kräfte \mathfrak{P} , 1, 2, 3. Die Seite \mathfrak{P} kann im Aufrisse und Grundrisse ohne Weiteres aufgetragen

werden. An beiden Enden dieser Seite zieht man Parallelen zu den Richtungen der Stabkräfte 1 und 3 (oder überhaupt zu irgend zwei der drei Stabrichtungen). Es handelt sich dann nur noch darum, zwischen diese beiden Linien die ihrer Richtung nach gegebene Seite 2 so einzuschieben, dass ihre Endpunkte auf die Linien 1 und 3 fallen.

Zu diesem Zwecke beginnt man damit (vgl. Abb. 5^b), irgendwo eine Strecke 2' im Grundrisse in der vorgeschriebenen Richtung zwischen die Linien 1 und 3 zu legen. Im Aufrisse

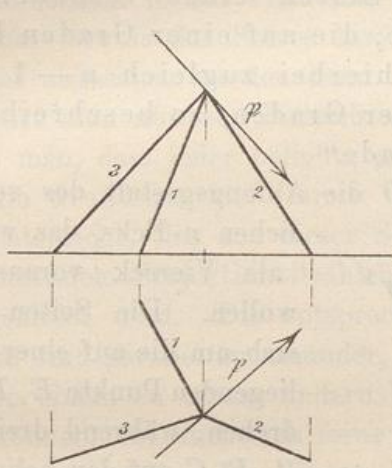


Abb. 5 a.

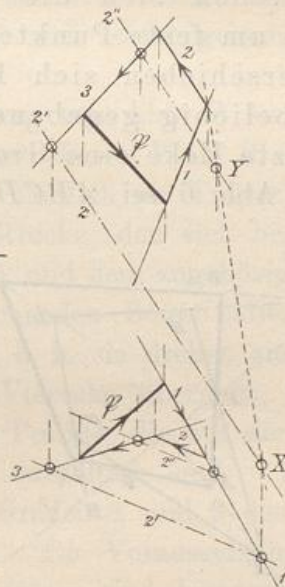


Abb. 5 b.

nehme man etwa den linken Eckpunkt auf der Projektion von 3 an und ziehe die Linie 2' dort ebenfalls in der ihr vorgeschriebenen Richtung. Der rechte Eckpunkt X ist damit bestimmt. Sollte nun die Strecke 2' zufällig richtig gewählt gewesen sein, so müsste der Punkt X auf der Vertikalprojektion von 1 enthalten sein. Im Allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen. Man verwirft daher die getroffene Wahl und wiederholt die Construction unter einer anderen beliebigen Annahme 2'' für 2, womit man auf einen Eckpunkt Y an Stelle von X gelangt, der aber im Allgemeinen wieder nicht auf der

Vertikalprojektion von 1 enthalten ist. Es könnte nun scheinen, als wenn man die gleiche Construction noch sehr oft wiederholen müsste, bis man die richtige Lage von 2 ausprobirt hätte. Hier kommt uns aber ein Satz der projektivischen Geometrie zur Hülfe, der nun schnell zu der gesuchten Lösung führt.

Dieser Satz, der auch bei vielen anderen Constructionen der graphischen Statik mit grossem Nutzen verwendet wird, lautet:

„Drehen sich die Seiten eines veränderlichen n -Ecks um feste Punkte, die auf einer Geraden liegen, und verschieben sich hierbei zugleich $n - 1$ Ecken längs beliebig gegebener Geraden, so beschreibt auch die letzte Ecke eine Gerade.“

In Abb. 6 sei $ABCD$ die Anfangsgestalt des veränderlichen n -Ecks, das wir etwa

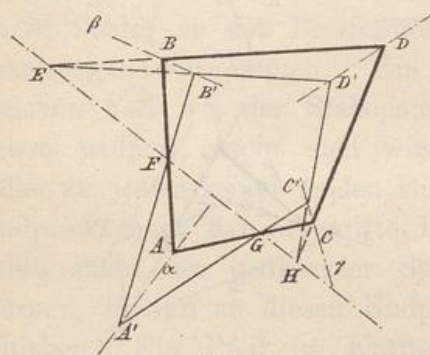


Abb. 6.

als Viereck voraussetzen wollen. Die Seiten mögen sich um die auf einer Geraden liegenden Punkte E, F, G, H drehen, während drei Ecken A, B, C auf den beliebig gewählten Geraden α, β, γ fortschreiten. Eine neue Lage erhält man, indem man B' auf β beliebig annimmt, hier-

auf die Seitenrichtungen $B'D'$ durch E und $B'A'$ durch F zieht, im Punkte A' die Seite $A'C'$ durch Punkt G anträgt und von C' aus die Richtung der Seite $C'D'$ durch Punkt H führt. Der vierte Eckpunkt D' ergibt sich dann als Schnittpunkt der Linien EB' und HC' . Um zu erkennen, dass auch D auf einer geraden Linie nach D' hin fortwandert, beachte man, dass die Seiten des veränderlichen Vielecks projektivische Strahlenbüschel um die Strahlencentren EF, FG, GH beschreiben, indem je zwei aufeinander folgende perspektivisch zueinander liegen. Jedenfalls ist also auch Strahlenbüschel E projektivisch

zum Büschel H . Der Schnitt von zwei projektivischen Strahlenbüscheln ist nun zwar im Allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung. Hier sind aber die Büschel E und H nicht nur projektivisch, sondern zugleich perspektivisch zu einander, da sie den die beiden Centren E und H verbindenden Strahl entsprechend gemeinsam haben. Eine specielle Lage des veränderlichen Vielecks ist nämlich auch jene, bei der alle Seiten und alle Eckpunkte auf die Gerade EH fallen. Der Punkt D beschreibt hiernach als Schnitt von zwei perspektivischen Strahlenbüscheln in der That eine Gerade. — Auch ein stereometrischer Beweis des Satzes lässt sich leicht geben, wovon aber hier abgesehen werden kann.

Kehrt man nun zur Betrachtung von Abb. 5^b zurück, so erkennt man, dass jeder beliebig getroffenen Wahl $2'$ oder $2''$ von 2 im Grundrisse ein Viereck (nämlich ein Trapez) in der Figur entspricht, das aus dieser Strecke, den sich beiderseits anschliessendem Projektionsstrahlen und dem zugehörigen Aufrisse gebildet wird. Die entsprechenden Seiten aller dieser Vierecke sind parallel zu einander, d. h. sie drehen sich, wenn man von einem zu einem andern Vierecke übergeht, wie wir sagen können, um unendlich ferne Punkte, die auf der unendlich fernen Graden der Ebene enthalten sind. Zugleich schreiten drei Eckpunkte auf den Graden 1 und 3 des Grundrisses und 3 des Aufrisses weiter. Die Voraussetzungen des zuvor bewiesenen geometrischen Satzes sind hiernach erfüllt und wir schliessen, dass auch die vierte Ecke auf einer Graden fortschreiten muss, von der zwei Punkte, nämlich X und Y , bereits bekannt sind. Verbinden wir daher X und Y durch eine Gerade, so muss auf dieser auch der vierte Eckpunkt des Vierecks enthalten sein, das wir suchen. Der Schnittpunkt der Graden XY mit 1 im Aufrisse liefert diesen Eckpunkt und von ihm aus können wir 2 im Aufrisse richtig eintragen, worauf auch der zugehörige Grundriss folgt. Man hat hierbei noch eine Controlle für die Genauigkeit der Zeichnung, indem der zu 2 im Aufrisse construirte Grundriss von selbst in die vorgeschriebene Richtung fallen muss. — Die Beschreibung

und Begründung des Verfahrens machte zwar eine längere Auseinandersetzung nöthig; die wirkliche Ausführung der Zeichnung erfordert aber nur das Ziehen weniger Linien und gestaltet sich ganz einfach.

Dieselbe Aufgabe kann schliesslich auch noch analytisch gelöst werden. Man zieht zu diesem Zwecke drei rechtwinklig aufeinander stehende Coordinatenaxen und ermittelt die Winkel zwischen den Stabrichtungen und den Coordinatenrichtungen sowie die Projektionen $P_1P_2P_3$ von \mathfrak{P} auf die Coordinatenaxen. Bezeichnet man dann die Spannung des Stabes 1 mit S_1 und die Richtungswinkel dieses Stabes mit $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und ähnlich bei den übrigen Stäben, so findet man die Unbekannten $S_1S_2S_3$ durch Auflösen der drei Componentengleichungen

$$\left. \begin{aligned} S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 &= P_1, \\ S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 + S_3 \cos \beta_3 &= P_2, \\ S_1 \cos \gamma_1 + S_2 \cos \gamma_2 + S_3 \cos \gamma_3 &= P_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

die alle vom ersten Grade sind. Die Ermittlung der Winkel und die Auflösung der Gleichungen verursacht aber in der Regel weit mehr Mühe, als irgend eine der vorher besprochenen graphischen Lösungen.

Schliesslich muss noch darauf hingewiesen werden, dass die Aufgabe keine Lösung mehr zulässt, sobald die drei Stäbe in derselben Ebene enthalten sind. Dieser Ausnahmefall, der in ähnlicher Weise auch noch bei manchen anderen Untersuchungen wiederkehren wird, erfordert noch eine aufmerksame Betrachtung. Er lässt sich in zwei Unterfälle spalten, die durch die Abb. 7 und 8 in axonometrischer Zeichnung wiedergegeben sind. Im Falle der Abb. 7 liegen zugleich die Fusspunkte A, B, C der drei Stäbe auf einer Geraden. Man

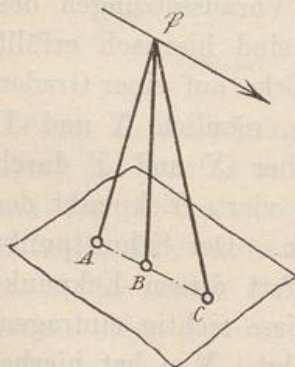


Abb. 7.

sieht hier sofort ein, dass der obere Knotenpunkt durch die drei Stäbe nicht mehr in seiner Lage festgehalten werden kann:

er vermag sich vielmehr um die Gerade ABC ohne Widerstand zu drehen. Schon aus dieser geometrischen Betrachtung erkennt man, dass durch die Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am oberen Knotenpunkte hergestellt werden kann; es sei denn, dass die Kraft \mathfrak{P} zufällig auch in der Stabebene liegt. Auch mechanisch geht dies daraus hervor, dass die Resultirende der drei Stabspannungen nothwendig wieder in der Stabebene liegen muss und daher mit einer Kraft, die zu dieser Ebene unter irgend einem Winkel geneigt ist, nicht im Gleichgewichte stehen kann. Liegt aber \mathfrak{P} selbst in der Stabebene, so bleibt die Aufgabe statisch unbestimmt, da man einer Stabspannung einen beliebigen Werth beilegen und durch geeignete Wahl der beiden anderen Gleichgewicht herstellen könnte.

In dem durch Abb. 8 dargestellten Falle liegen die Fusspunkte A, B, C der drei Stäbe nicht mehr in einer Geraden die Stäbe selbst aber immer noch in einer Ebene. Man nehme etwa an, dass zwei der Stäbe unmittelbar am Fussboden befestigt sind, während der Fusspunkt B des dritten Stabes auf irgend einer Erhöhung liegt, die um BB' über den Fussboden emporragt. In diesem Falle ist zwar eine endliche Verschiebung des oberen Knotenpunktes ohne Aenderung der Stablängen nicht mehr möglich, wohl aber, wie man zu sagen pflegt, eine unendlich kleine. Der obere Knotenpunkt vermag sich nämlich um eine unendlich kleine Strecke senkrecht zur Stabebene zu verschieben, ohne dass sich die Stablängen um mehr als um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung zu ändern brauchten, d. h. der Knotenpunktsweg ist ungemein gross gegenüber den sehr kleinen Aenderungen der Stablängen, die wegen der Elasticität der Stäbe zu erwarten sind. Man erkennt dies leicht daraus, dass sich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von

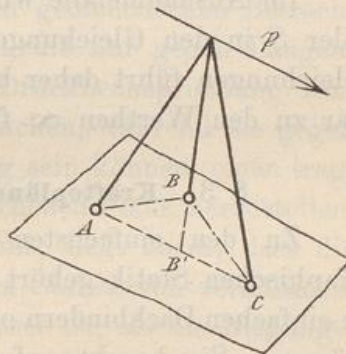


Abb. 8.

dem eine Kathete unendlich klein ist, nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von der anderen Kathete unterscheidet. — Sobald eine solche Verschiebung des Knotenpunktes eingetreten ist, liegen die drei Stäbe nachher nicht mehr genau in derselben Ebene, so dass schliesslich doch wieder Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und der Belastung \mathfrak{P} zu Stande kommen kann.

Hierbei ist aber noch zu beachten, dass die Stabspannungen sehr gross im Verhältnisse zur Last \mathfrak{P} gefunden werden, wenn die Stäbe zwar nicht genau, aber nahezu in einer Ebene liegen. Man pflegt daher auch zu sagen, dass die Stabspannungen im Ausnahmefalle unendlich gross werden müssten, womit nur ausgedrückt werden soll, dass selbst durch noch so grosse Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am Knotenpunkte — im Falle der Abb. 8 wenigstens nicht ohne eine vorausgehende Verschiebung des Knotenpunktes — hergestellt werden könnte.

Im Ausnahmefalle wird die Determinante der Coefficienten aller S in den Gleichungen (1) zu Null; die Auflösung dieser Gleichungen führt daher beim analytischen Verfahren unmittelbar zu den Werthen ∞ für die Stabspannungen.

§ 3. Kräftepläne für einfache Dachbinder.

Zu den einfachsten und häufigsten Anwendungen der graphischen Statik gehört die Ermittlung der Stabspannungen in einfachen Dachbindern oder ihnen ähnlich gestalteten Brückenträgern. Sie beruht auf einer mehrfachen Wiederholung der im Anschlusse an Abb. 2 besprochenen Lösung der Aufgabe, eine gegebene Kraft nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien zu zerlegen. Freilich knüpfen sich daran alsbald noch weitergehende Ueberlegungen, die eine eingehende Besprechung erfordern.

Zur Erläuterung bemerke ich zunächst, dass man zur Errichtung von Brücken oder ähnlichen Tragconstructions vor Allem zwei, oder bei freitragenden Dächern eine grössere Zahl von „Hauptträgern“ oder „Bindern“ in parallelen, lothrechten Ebenen aufzustellen pflegt, die die ganze Spannweite über-

decken. Auf diese Binder stützen sich bei den Dächern die „Pfetten“ die „Sparren“ und die „Haut“ des Daches, bei den Brücken die Constructionen der „Fahrbahn“. Die Last aller dieser „Sekundärconstructionen“ wird auf die Binder an den „Knotenpunkten“ übertragen. Die Binder bestehen — wenigstens in dem gewöhnlich vorliegenden Falle, der uns hier beschäftigen soll — aus ebenen Stabverbänden, deren geometrische Figur eine Aneinanderreihung von Dreiecken bildet, so dass sich vom einen Ende anfangend, jedes folgende Dreieck mit einer Seite und zwei Eckpunkten an das vorausgehende anschliesst. Diese Eckpunkte werden die Knotenpunkte des Binders genannt. Da die Gestalt eines Dreiecks unveränderlich ist, so lange die Seiten ihre Längen behalten, ist unter der gleichen Voraussetzung auch die aus allen diesen Dreiecken zusammengesetzte Binderfigur von unveränderlicher Gestalt. Das ist es aber, was man von einer Tragconstruction verlangen muss.

Man erkennt aus dieser einfachen geometrischen Betrachtung, dass es möglich ist, aus Stäben, die nur gegen Längenänderungen, also gegen Zug- oder Druckbeanspruchung hinreichend widerstandsfähig zu sein brauchen, während sie gegen Biegungen nur wenig widerstandsfähig sein können, einen tragfähigen Stabverband nach dem besprochenen Plane herzustellen. Der Vortheil, den man hiermit erreicht, liegt darin, dass die Zug- oder Druckfestigkeit eines langen Stabes von verhältnissmässig kleinem Querschnitte weit grösser ist, als die Biegefestigkeit gegenüber gleichen Lasten. — Wegen des geringen Biegezugwiderstandes der Stäbe sieht man von diesem bei der Berechnung der Stabspannungen gewöhnlich ganz ab, achtet also nur auf die Kräfte, die in der Richtung der Stabmittellinien von einem Endpunkte zum andern übertragen werden. Es genügt dann, jeden Stab durch eine Strecke zu veranschaulichen, die man sich längs der Mittellinie des Stabes gezogen zu denken hat. Die von der Sekundärconstruction auf die Knotenpunkte des Binders übertragenen Lasten sind als gegeben anzusehen; es handelt sich dann um die Berechnung der von ihnen hervorgerufenen Stabspannungen.

Dies sei zunächst an dem Beispiele des viel angewendeten einfachen Polonçeau- oder Wiegmannbinders in Abb. 9^a erläutert. Die Binderfigur entsteht durch Aneinanderreihung von 5 Dreiecken und hat eine lothrechte Symmetrieaxe. Der Stab 6 liegt gewöhnlich etwas höher als die Verbindungslinie beider Auflagerknotenpunkte; doch ist dies nicht wesentlich, die Stäbe

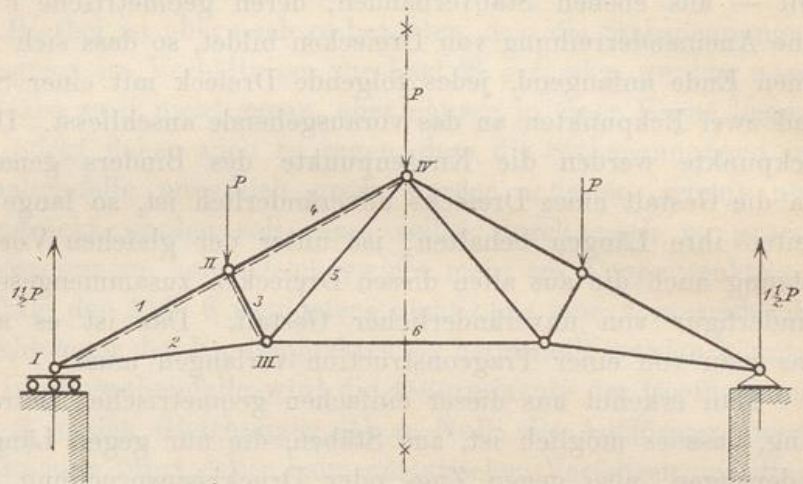


Abb. 9a.

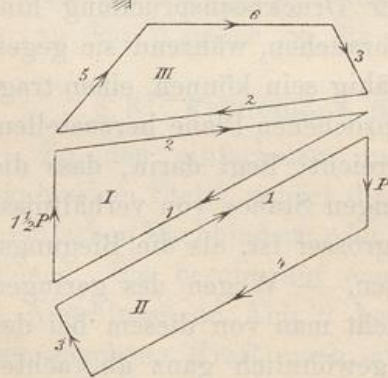


Abb. 9b.

2 und 6 können vielmehr auch in dieselbe (horizontale) Grade fallen. Das eine Ende des Binders wird mit der Mauer, auf die es sich stützt, fest verbunden, das andere mit Hilfe eines Gleit- oder Rollenlagers in horizontaler Richtung verschieblich aufgelagert. Dies geschieht einerseits, um dem Träger eine freie Aus-

dehnung oder Zusammenziehung bei Temperaturänderungen zu gestatten, andererseits um einen Seitenschub auf die Mauern, so lange nur senkrecht gerichtete Lasten vorkommen, zu vermeiden. Das Rollenlager ist in der Zeichnung am linken Ende angenommen und durch einige kleine Kreise angedeutet. Da die rollende Reibung nur sehr gering ist, kann der Auflager-

druck auf dieser Seite unter allen Umständen als lothrecht gerichtet angesehen werden. Falls nur lothrechte Lasten auf den Binder wirken, muss aber auch der Auflagerdruck am festen Auflager lothrecht gerichtet sein, weil die geometrische Summe aller äusseren Kräfte, also der Lasten und der beiden Auflagerdrücke, zu Null werden muss. In der Abbildung ist ferner angenommen, dass auf die drei mittleren Knotenpunkte der oberen „Gurtung“ (so nennt man den Zug der aufeinanderfolgenden Stäbe 1, 4 u. s. f., die die Binderfigur nach oben hin begrenzen) gleich grosse Lasten P einwirken. Der Symmetrie wegen ist dann der Auflagerdruck auf jeder Seite gleich der Hälfte dieser Lasten, also gleich $1\frac{1}{2}P$. Eine Last, die etwa ausserdem noch auf einen Auflagerknotenpunkt wirkt, kommt für den Binder nicht in Betracht, da sie unmittelbar auf die Mauer übertragen wird, ohne Stabspannungen hervorzurufen.

Aus der Symmetrie der Gestalt und der Belastung folgt auch, dass die spiegelbildlich zu einander liegenden Stäbe gleiche Spannungen erfahren. Es genügt daher, die zur linken Hälfte der Figur gehörigen Stabspannungen zu berechnen. Diese sind daher auch allein mit arabischen Ordnungsnummern bezeichnet, während den Knotenpunkten römische Ziffern beige geschrieben sind.

Man beginnt mit der Betrachtung des Gleichgewichtes der Kräfte am Knotenpunkte I. Hier müssen die von den Stäben 1 und 2 übertragenen Spannungen, die nach den vorausgehenden Bemerkungen in die Richtungen der Stäbe fallen, mit dem Auflagerdrucke $1\frac{1}{2}P$ im Gleichgewichte stehen. Man kann also sofort das ebenfalls mit I bezeichnete Kräftedreieck in Abb. 9^b zeichnen. Der Pfeil des Auflagerdrucks geht nach oben und damit folgen auch die beiden anderen in die Abbildung eingetragenen Pfeile, da alle drei im selben Umlaufsinne aufeinander folgen müssen. Denkt man sich den Pfeil von 1 in die Binderfigur nach dem Knotenpunkte I übertragen, so erkennt man, dass die Stabspannung 1 den Knotenpunkt I vom Stabe fort zu bewegen sucht. Der Stab 1 ist daher gedrückt.

Ebenso erkennt man, dass Stab 2 gezogen ist. Es ist üblich, die gedrückten Stäbe in der Binderfigur durch Beisetzen von Schattenstrichen zu kennzeichnen. Dies ist in der Abbildung durch gestrichelte Linien geschehen, die neben den Stäben her laufen.

Hierauf geht man zu einem anderen Knotenpunkte weiter, an dem nur noch zwei der Grösse nach unbekannte Kräfte angreifen. Dies ist in unserem Falle Knotenpunkt II. Die Stabspannung 1 ist nämlich aus der vorhergehenden Untersuchung bereits bekannt; wir müssen nur beachten, dass sie am Knotenpunkte II mit dem entgegengesetzten Pfeile angreift, als am Knotenpunkte I. Wir zeichnen hiernach das ebenfalls mit II bezeichnete Kräfteviereck, indem wir zuerst 1 und die Last P mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander reihen und dann durch die Endpunkte Parallelen zu den Richtungen der Stäbe 3 und 4 ziehen. Die Pfeile sind wieder einzutragen und nach ihnen festzustellen, dass die Stäbe 3 und 4 beide gedrückt sind, genau wie dies vorher geschehen war. Da die gleiche Seite 1 im Kraftecke II wie in I vorkommt, wurden, um dies hervorzuheben, beide Kraftecke unmittelbar untereinander gezeichnet.

Dann geht man zu Knotenpunkt III über und verfährt ebenso. Die Stabspannungen 2 und 3 kennt man schon aus den vorausgehenden Kraftecken und man hat nur zu beachten, dass beide entgegengesetzte Pfeile erhalten müssen, als in den früheren Fällen. Man reiht also im Kraftecke III die nach Grösse und Pfeil bekannten Strecken 3 und 2 mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander und zieht die Parallelen zu 5 und 6. Dann kennt man bereits alle Stabspannungen; die Stäbe 5 und 6 sind beide gezogen.

Die Aufgabe ist hiermit gelöst; aber noch nicht auf dem einfachsten Wege. Zunächst erkennt man sofort, dass die Zeichnung vereinfacht wird, wenn man die übereinander liegenden Kraftecke mit den gleich bezeichneten Seiten 1 und 2 zu einer einzigen Figur zusammenrückt. Man spart dadurch nicht nur einige Linien und etwas Platz, sondern die Zeichnung kann

auch genauer ausgeführt werden, je weniger Linien sie im Ganzen enthält. Bei den Anwendungen in der Praxis zieht man daher alle Kraftecke stets zu einer einzigen Figur zusammen, die man den Kräfteplan nennt. In Abb. 10, die sich von Abb. 9^b im Uebrigen gar nicht unterscheidet, ist dies ausgeführt. Nur die eine kleine Unbequemlichkeit muss man dabei mit in den Kauf nehmen, dass man die Pfeile auf die gemeinsamen Seiten von zwei aneinander grenzenden Kraftecken nicht mehr unmittelbar eintragen kann, da im einen Kraftecke der eine, im anderen der entgegengesetzte Pfeil gilt. Hat man, wie in Abb. 10, die einzelnen Kraftecke so eingerichtet, dass sie alle einfache Polygone bilden, die sich nicht überschlagen und die nebeneinander liegen, ohne sich zu überdecken, so kann man sich allerdings, wie es auch in der Figur geschehen ist, leicht dadurch helfen, dass man nicht mehr auf den Linien 1 und 2 selbst, aber zu beiden Seiten davon zwei Pfeile angibt, von denen jeder zu jenem Polygone gehört, in dessen Fläche er hinein fällt.

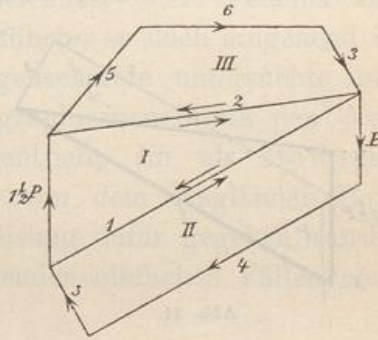


Abb. 10.

Aber auch hiermit sind wir noch nicht zu dem einfachsten, d. h. aus der Mindestzahl von Linien gebildeten Kräfteplane gelangt. In den Kraftecken II und III kommt noch dieselbe Stabspannung 3 vor und man muss diese Strecke aus dem einen entnehmen und sie in das andere eintragen, was nicht nur unbequem, sondern auch mit unvermeidlichen kleinen Zeichenfehlern verbunden ist. Bei einem so einfachen Beispiele, wie wir es im Augenblicke behandeln, macht dies freilich nicht viel aus; wir wollen aber das Verfahren schon hier so ausbilden, wie es in verwickelteren Fällen am besten verwendet wird. Dass man den Kräfteplan auch so einrichten kann, dass jede Stabspannung nur einmal in ihm als Seite vorkommt, erkennt man sofort aus Abb. 11, die in allen Strecken vollkommen mit

Abb. 10 übereinstimmt und sich nur durch die verschiedene Anordnung der Kraftecke von ihr unterscheidet. Um die Entstehungsart dieser Figur deutlich hervorzuheben — und nur aus diesem Grunde, der späterhin, wenn man sich mit diesen Dingen erst vertraut gemacht hat, wegfällt — ist das Krafteck I, das mit dem in Abb. 10 übereinstimmt, durch starke Striche hervorgehoben. Das Krafteck II (diese Bezeichnungen sind in der Figur weggelassen), oder wenigstens die Seiten, die hinzutreten müssen, um dieses Krafteck zu bilden, sind mit schwächeren Strichen ausgezogen, während die beim Kraftecke III neu hinzukommenden Seiten durch gestrichelte Linien angegeben sind. Das Krafteck II ist mit dem ihm in Abb. 10

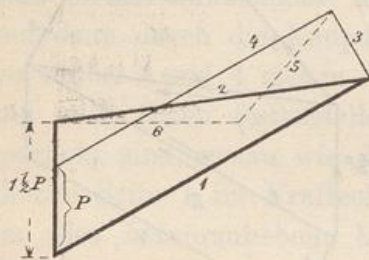


Abb. 11.

dagegen gedreht und überdeckt sich mit dem Kraftecke I. Auf ein Beisetzen von Pfeilen muss man hier freilich verzichten, da z. B. bei der Seite 1 nicht ersichtlich gemacht werden könnte, welcher von beiden Pfeilen zum Kraftecke I oder zu II gehören soll. Auf diesen kleinen Nachtheil legt man aber nicht viel

Gewicht, da man sich bei einiger Uebung sehr leicht daran gewöhnt, die Pfeile jedesmal in Gedanken richtig beizufügen, sobald man auf irgend eines der in dem Kräfteplane enthaltenen Kraftecke sein Augenmerk richtet.

Das Krafteck III ist in Abb. 11 überschlagen. Man hätte es auch so wie in Abb. 10 zeichnen können, da man das Aneinanderschliessen der Seiten 3 und 2, wodurch ein wiederholtes Auftragen von 3 entbehrlich gemacht werden sollte, schon durch die passende Uebereinanderlagerung der Kraftecke I und II erreicht hat. Dass es so wie geschehen gezeichnet wurde, hat nur den Zweck, einer Fortsetzung des Kräfteplanes auf die übrigen Knotenpunkte den Weg vorzubereiten. Hier kommt eine solche Fortsetzung freilich nicht in Betracht; falls aber die Lasten nicht symmetrisch vertheilt sind, wie sie hier

angenommen wurden, muss man den Kräfteplan auch für die rechte Hälfte des Binders weiter zeichnen. Man kommt dann zum Kraftecke IV und findet hierfür die Zeichnung in Abb. 11 schon vorbereitet, da sich die am Knotenpunkte IV angreifenden bekannten Stabspannungen 4 und 5 schon in richtiger Aufeinanderfolge in der Figur vorfinden. Hätte man das Krafteck III so wie in Abb. 10 gewählt, so würde dies nicht zutreffen.

Neuerdings verwendet man überall, wo es angeht, fast nur noch die nach dem Muster der Abb. 11 angeordneten Kräftepläne. Sie werden aus einem Grunde, der bald hervortreten wird, als reciproke Kräftepläne oder auch als Cremona'sche Kräftepläne bezeichnet, weil Cremona sie, wenn auch nicht selbst zuerst einführte, so doch eingehend in Bezug auf ihre geometrischen Eigenschaften untersuchte und dadurch ihrer Anwendung in der graphischen Statik den Weg ebnete. Gerechter wäre es eigentlich, sie als Bow'sche Kräftepläne zu bezeichnen, da von dem Engländer Bow zuerst eine leicht befolgbare Anweisung dafür gegeben wurde, wie sie in den gewöhnlich vorliegenden einfachen Fällen construirt werden können.

§ 4. Die reciproken Kräftepläne.

Wir wollen uns jetzt genauer überlegen, wie man den Kräfteplan einrichten muss, um zu erreichen, dass jede Stabspannung in ihm nur einmal als Seite vorkommt, oder so, mit anderen Worten, dass man beim Uebergange zum folgenden Kraftecke die dazu gehörigen bekannten Stabspannungen schon in richtiger Lage zu einander vorfindet. Dabei sollen sich aber unsere Betrachtungen, wie es an dieser Stelle auch nicht anders sein kann, immer noch in erster Linie auf einfache Binderfiguren beziehen, d. h. auf solche, die in der vorher beschriebenen Weise durch Nebeneinanderlegen von Dreiecken, von denen sich jedes folgende mit einer Seite an das vorhergehende anschliesst, erhalten werden können. Im Uebrigen können indessen Zahl und Gestalt dieser Dreiecke beliebig sein.

Zu diesem Zwecke müssen wir uns zunächst die geometrischen Beziehungen zwischen der Binderfigur und dem Kräfteplane klar machen. Zur Binderfigur wollen wir hierbei auch die Richtungslinien der äusseren Kräfte (der Lasten und der Auflagerkräfte) rechnen. Dann ist zunächst klar, dass jeder Linie in der einen Figur eine zu ihr parallele Linie in der anderen Figur entsprechen muss, wenn der Kräfteplan so gezeichnet ist, wie wir ihn wünschen. Ferner entspricht auch jedem Punkte in der Binderfigur ein Polygon im Kräfteplane, nämlich das diesem Knotenpunkte zugehörige Krafteck.

Man kann aber leicht zeigen, dass auch umgekehrt jedem Punkte im Kräfteplane, an dem mehrere Stabspannungen aneinander stossen, ein Polygon in der Binderfigur entsprechen muss. Dies soll zunächst an dem bereits in Abb. 11 vorliegenden Kräfteplane nachgewiesen werden. Man betrachte etwa den Punkt, in dem die Seiten 1, 2, 3 zusammen stossen. Dieser Punkt wird (ebenso wie jeder andere, von dem keine der äusseren Kräfte ausgeht) während der Construction des Kräfteplanes zuerst durch Schnitt von zwei Linien (hier der Linien 1 und 2) gefunden. Diese beiden Linien gehören zu einem Kraftecke, das sich auf einen der Knotenpunkte (hier I) des Binders bezieht. Hiernach gehen die Seiten 1 und 2 im Binder jedenfalls von einem Punkte (nämlich hier von I) aus und sie schliessen sich daher schon so aneinander, wie zwei aufeinander folgende Seiten in einem Polygone. Man wird zugleich bemerken, dass dieser Schluss ganz allgemein und nicht nur für das hier zur Erleichterung der Vorstellung gewählte Beispiel zutrifft; wenn man dieses entbehren zu können glaubt, möge man den Betrachtungen nur ohne Beachtung des Beispiels folgen und man wird sie dann unter allen Umständen zutreffend finden.

Nun bedenke man, dass jeder Stab zwei Knotenpunkte verbindet und dass daher in dem für die ganze Binderfigur bis zu Ende durchgeführten Kräfteplane auch jede Seite, die eine Stabspannung angibt, zu zwei Kraftecken gehört. Bisher haben wir nur eines der Kraftecke ins Auge gefasst, die im

Punkte 1, 2, 3 zusammenstossen. Die Seite 1 gehört aber jedenfalls noch zu einem zweiten Kraftecke (hier II) und im Punkte 1, 2, 3 muss sich daher an 1 noch eine andere Stabspannung anreihen, da wir angenommen haben, dass im Punkte 1, 2, 3 keine äusseren Kräfte anstossen sollen. Diese andere Stabspannung (hier 3) greift aber in der Binderfigur mit 1 an demselben Knotenpunkte an und demnach schliessen sich im Binder auch 1 und 3 aneinander an wie zwei aufeinander folgende Seiten in einem Polygone.

Aber auch die Stabspannung 3 kommt jedenfalls noch in einem anderen Kraftecke vor. Am Punkte 1, 2, 3 muss sich daher ausser 1 auch noch eine andere Stabspannung (hier 2) an sie anschliessen und wir schliessen wieder wie vorher, dass sich beide (nämlich 3 und 2) in der Binderfigur an dem betreffenden Knotenpunkte (III) aufeinander folgen müssen. Im vorliegenden Falle sind wir damit schon zur ersten Stabspannung zurückgelangt, von der wir bei dieser Betrachtung ausgingen. In der Binderfigur schliessen sich alle, wie bewiesen, aneinander an und wenn wir zur ersten zurückkehren, so bilden sie dort ein geschlossenes Polygon. Zugleich erkennt man aber, dass dieselbe Schlussweise, wenn mehr als drei Stabspannungen an einem Punkte des Kräftepolygons zusammen stossen sollten, in der gleichen Art fortgesetzt werden könnte, bis man schliesslich wieder, nachdem alle anderen Seiten erschöpft sind, zur ersten zurückkommen müsste. Hiernach ist ganz allgemein bewiesen, dass jedem Eckpunkte eines reciproken Kräfteplanes, von dem keine äusseren Kräfte ausgehen, ein geschlossenes Polygon in der Binderfigur entsprechen muss, dessen Ecken durch Knotenpunkte gebildet werden. So gehört auch zur Ecke 3, 4, 5 in Abb. 11 das Dreieck 3, 4, 5 in der Binderfigur, Abb. 9.

Es bleibt uns noch übrig, jene Ecken im Kräfteplane zu betrachten, von denen auch äussere Kräfte ausgehen. Eine äussere Kraft kommt im Gegensatze zu den Stabspannungen immer nur in einem Kraftecke vor, nämlich in jenem, das zu dem Knotenpunkte gehört, an dem sie angreift. Daraus folgt,

dass im vollständigen reciproken Kräfteplane von einer Ecke niemals bloß eine einzige äusseré Kraft ausgehen kann, sondern entweder gar keine oder zwei oder auch vier oder überhaupt eine gerade Anzahl. Um dies zu beweisen nehme man an, es gehe nur eine einzige äussere Kraft von der Ecke aus. Diese gehört zu einem Kraftecke, in dem ausser ihr noch eine Stabspannung vorkommt, die wir (ohne Bezugnahme auf das vorige Beispiel) mit 1 bezeichnen wollen. Die Spannung 1 kommt dann noch in einem zweiten Kraftecke vor, in dem sich eine andere Spannung 2 an sie in der betrachteten Ecke anschliesst. Auch 2 gehört noch zu einem zweiten Kraftecke, von dem wieder eine neue Stabspannung 3 an der Ecke vertreten ist und so fort. Haben wir in dieser Weise alle Stabspannungen erschöpft, so bleibt schliesslich eine übrig, die nur noch in einem Kraftecke vorkäme. Bei einem Kräfteplane, wie wir ihn voraussetzen, ist dies aber nicht möglich, da in ihm jede Seite zu zwei Kraftecken gehören soll. In der That kann also nicht eine einzige äussere Kraft von der Ecke ausgehen, sondern es muss noch eine zweite hinzukommen, die sich mit der vorher übrig gebliebenen Stabspannung zum letzten Kraftecke zusammenschliesst. Ebenso kann man beweisen, dass die Zahl der äusseren Kräfte an der Ecke jedenfalls grad sein muss, wenn mehr als zwei vorkommen sollten. Im Uebrigen kommt dieser Fall bei den einfacheren Aufgaben, die wir jetzt im Auge haben, überhaupt nicht vor.

Gehen von jeder Ecke des Kräfteplanes entweder gar keine oder zwei, aber nicht mehr als zwei Strecken aus, die äussere Kräfte darstellen, so folgt, dass alle Ecken, an denen sie vertreten sind, durch diese Strecken zu einem geschlossenen Polygone verbunden werden. Unter Umständen kann dieses Polygon auch in eine Gerade übergehen, nämlich immer dann, wenn die äusseren Kräfte alle parallel zu einander sind. Damit überhaupt Gleichgewicht möglich sei, muss selbstverständlich die geometrische Summe der äusseren Kräfte gleich Null sein. Wir sehen nun, dass das geschlossene Polygon der äusseren Kräfte, das die Erfüllung dieser Bedingung vor Augen führt,

ebenfalls in dem Kräfteplane mit enthalten sein muss. Dies gibt uns einen weiteren Fingerzeig dafür ab, wie man den Kräfteplan einrichten muss, damit er unseren Wünschen entspricht: jede äussere Kraft, die neu hinzukommt, muss an einem Endpunkte der vorigen angesetzt werden. Darin unterschied sich auch in der That die Anordnung der Abb. 10 von der in Abb. 11. Während bei der früheren Figur die äussere Kraft P im Kraftecke II so angetragen wurde, dass beide Kraftecke auseinander fielen, liess man diese in Abb. 11 sich überdecken und reihte P an den Endpunkt des Auflagerdrucks $1\frac{1}{2}P$ an, der im vorigen Kraftecke I vorkam und zwar so, dass sich die Pfeile beider äusseren Kräfte an dem gemeinsamen Punkte aufeinander folgen.

Kämen schliesslich an einer Ecke des Kräfteplanes vier äussere Kräfte vor, so fielen an dieser Stelle zwei Ecken des Kraftecks der äusseren Kräfte zusammen, oder mit anderen Worten, das Krafteck zerfiel in zwei geschlossene Polygone mit einer gemeinsamen Ecke und ähnlich wäre es in noch verwickelteren Fällen, die hier keine weitere Besprechung erfordern. Dagegen sei noch darauf hingewiesen, dass an einer Ecke des Kräfteplanes auch nur zwei äussere Kräfte und gar keine Stabspannung vorkommen könnten. Dann würden aber in der Binderfigur beide äusseren Kräfte zu demselben Knotenpunkte gehören. Man kann diese Ecke aus dem Kräfteplane abschneiden, indem man die anderen Endpunkte beider Kräfte mit einander verbindet. Diese Verbindungslinie stellt dann die Resultirende der beiden äusseren Kräfte an dem Knotenpunkte dar.

Ferner folgt noch aus den vorhergehenden Betrachtungen, dass jedem Punkte des Kräfteplanes, von dem zwei äussere Kräfte und eine beliebige Zahl Stabspannungen ausgehen, in der Binderfigur ein Linienzug entspricht, der mit der Richtungslinie von einer der äusseren Kräfte beginnt, sich den Stäben entlang fortsetzt und mit der Richtungslinie der anderen äusseren Kraft aufhört. Dieser Linienzug stellt zwar nicht gerade ein Polygon im Sinne der Planimetrie dar; wir können aber diese

Bezeichnung im erweiterten Sinne darauf übertragen. Dann lässt sich aussagen, dass die Binderfigur in ebensoviele Polygone zerlegt werden kann, als Ecken im Kräfteplane vorkommen, und dass ferner auch jede Seite in der Binderfigur zweien dieser Polygone gemeinsam ist. Hiermit zeigt sich aber, dass zwischen der Binderfigur und dem Kräfteplane eine wechselseitige Beziehung besteht, die für beide in der gleichen Art gilt. Jeder Ecke in der einen Figur entspricht ein Polygon in der anderen und jeder Seite eine zu ihr parallele Seite. Rein geometrisch betrachtet, könnten daher beide Figuren auch die Rollen mit einander vertauschen, d. h. man kann ebensogut die Aufgabe stellen und lösen, zu dem gegebenen Kräfteplane eine zugehörige Binderfigur zu construiren, als umgekehrt. Zwei Figuren, die in dem näher bezeichneten Verhältnisse zu einander stehen, bezeichnet man als reciprok. Dabei ist noch darauf hinzuweisen, dass dasselbe Wort in der Geometrie freilich noch (und zwar gewöhnlich) zur Bezeichnung einer anderen Art der geometrischen Verwandtschaft verwendet wird; in der graphischen Statik wird es aber immer in dem zuvor durch gesperrten Druck näher angegebenen Sinne gebraucht.

§ 5. Construction des reciproken Kräfteplanes nach dem Verfahren von Bow.

Die vorausgehenden Betrachtungen sind, obschon darin auch auf ein einfaches Beispiel Bezug genommen wurde, doch immer noch ziemlich abstract gehalten. Es empfiehlt sich, zunächst im Allgemeinen Kenntniss von ihnen zu nehmen und dabei das, was dem Verständnisse Schwierigkeiten bereitet haben sollte, bis auf Weiteres zu übergehen, dafür aber später, wenn man zuvor eine Anzahl reciproker Kräftepläne selbst gezeichnet hat, wieder darauf zurückzukommen. Bei Betrachtungen solcher Art besteht nämlich die Hauptschwierigkeit darin, dass dem Neulinge zugemuthet wird, eine Anzahl Vorstellungen, mit denen er noch nicht vertraut ist, auf einmal zu erfassen. Dazu gehört eine grosse Anstrengung, die Jenem

vollständig oder doch zum grössten Theile erspart bleibt, der sich mit jeder dieser Vorstellungen zuvor im Einzelnen näher vertraut gemacht hat. Zu einer solchen Uebung wird sich im Folgenden und namentlich auch schon in diesem Paragraphen Gelegenheit bieten. Immerhin mussten die allgemeinen Betrachtungen (die ich übrigens in der Vorlesung etwas kürzer zu halten pflege) vorausgehen, damit der Studirende, wenn er später, nachdem ihm diese Dinge schon mehr geläufig geworden sind, darauf zurückkommt, ein in sich geschlossenes, lückenloses System vor sich hat, das jeden Zweifel auszuschliessen vermag.

Wir sind ursprünglich von der Absicht ausgegangen, einen Kräfteplan zu construiren, dem wir die Stabspannungen des Binders entnehmen können, und sind dann zu dem Schlusse gelangt, dass der möglichst einfache Kräfteplan in einer gewissen geometrischen Verwandtschaft zur Binderfigur stehen müsse. Dadurch sind wir jetzt in den Stand gesetzt, die Aufgabe von einer ganz anderen Seite her anzugreifen. Wir brauchen gar nicht mehr von dem Kräfteplane zu reden, sondern nur noch von der dem Binder reciproken Figur, die wir rein geometrisch, ohne auf ihre mechanische Bedeutung zu achten, construiren können. Nur beim Anfange der Zeichnung nehmen wir darauf Rücksicht, dass die Figur nachher als Kräfteplan angesehen werden soll, indem wir mit dem Kraftecke der äusseren Kräfte, die hierbei im Maassstabe aufgetragen werden müssen, beginnen. Nachher denken wir aber bei der Fortsetzung der Zeichnung nur noch an die reciproke Figur, die construirt werden soll. Dabei leistet die von Bow eingeführte Bezeichnung, bei der nicht die Stäbe und Knotenpunkte des Binders, sondern die Polygone der Binderfigur einzeln aufgeführt werden, sehr gute Dienste. Ein einfaches Beispiel wird dies am besten zeigen.

Abb. 12^a gibt einen Binder an, der etwa als Brückenträger angesehen werden kann, und an dem in einem Knotenpunkte der unteren Gurtung die einzige Belastung P angreift. Kommen mehr Lasten vor, so ändert sich zwar nicht viel; wir wollen

uns aber zunächst auf den einfachsten Fall beschränken. Der Untergurt ist gradlinig angenommen; der Obergurt bilde einen beliebigen Linienzug, der nicht symmetrisch zu sein braucht. Die Einzellast P bringt beiderseits Auflagerkräfte von den Grössen $\frac{4}{7}P$ und $\frac{3}{7}P$ hervor. Den Kräfteplan in Abb. 12^b beginnen wir mit dem Polygone für die drei äusseren Kräfte. Die Seiten und Ecken des Kräftecks fallen hier freilich auf eine Gerade, da die Kräfte alle gleich gerichtet sind. Wir

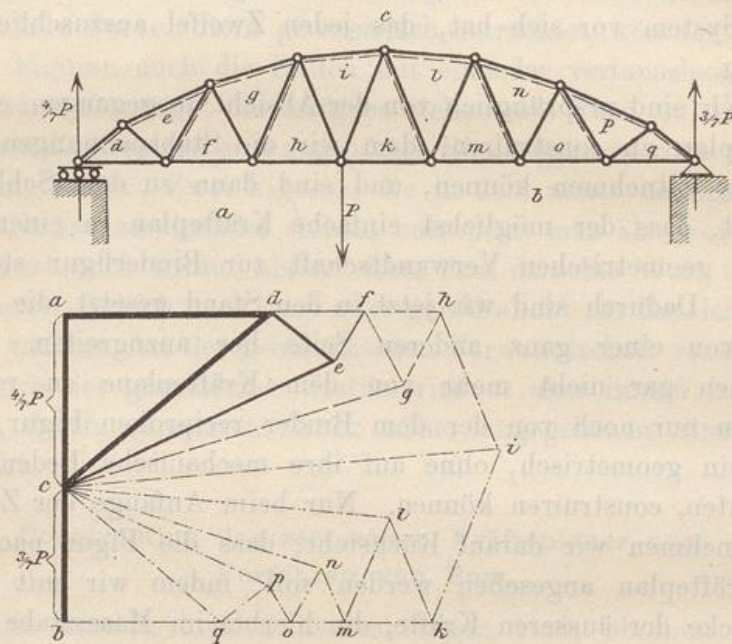


Abb. 12a und 12b.

wollen uns aber dadurch nicht stören lassen, in der durch die drei Ecken und ihre Verbindungsstrecken gebildeten gradlinigen Figur ein Dreieck zu erblicken. In der Abbildung ist dieses Dreieck abc durch einen starken, in lothrechter Richtung gehenden Strich angegeben. Die Seite ab stellt die Belastung P , ac den linken und cb den rechten Auflagerdruck dar. Die Pfeile sind in der Figur weggelassen, weil sich die Strecken überdecken; man hat sie sich aber entsprechend hinzu zu denken.

Nun suchen wir in der Binderfigur die Polygone auf, die den Ecken a, b, c des Polygons der äusseren Kräfte im Kräfteplane entsprechen. Im Punkte a stossen im Kräfteplane die Last P und der linke Auflagerdruck zusammen. Daher muss nach den Betrachtungen im vorigen Paragraphen dem Punkte a ein Linienzug im Binder entsprechen, der mit der Richtungslinie des linken Auflagerdrucks beginnt und mit der Richtungslinie von P schliesst, während die zwischenliegenden Seiten jedenfalls aus Stäben gebildet werden. Dieser Ueberlegung entsprechend sind die Buchstaben a, b, c in die Binderfigur eingeschrieben; sie bedeuten alle drei offene Polygone, d. h. solche, die mit der Richtungslinie einer äusseren Kraft anfangen und mit einer anderen endigen.

Allen anderen Punkten des Kräfteplans, die zu a, b, c noch hinzukommen, können in der Binderfigur nur geschlossene Polygone entsprechen, deren Seiten aus Stäben gebildet werden. Bei den einfachen Bindern sind diese Polygone stets die Dreiecke, durch deren Aufeinanderfolge die geometrische Figur des Bildes entstanden gedacht werden kann. Wir schreiben demnach die Zeichen d, e, f u. s. f. in die Stabdreiecke ein. Unsere Aufgabe besteht dann, geometrisch gesprochen, darin, die diesen Polygonen $d, e, f \dots$ im Kräfteplane entsprechenden Punkte aufzusuchen.

Punkt d kann leicht gefunden werden. Das Dreieck d in der Binderfigur grenzt nämlich zu beiden Seiten an die Polygone a und c an, die im Kräfteplane bereits durch Punkte vertreten sind. Unter ad sei der Stab verstanden, der den Polygonen a und d gemeinsam ist, also der erste Stab des Untergurts. In derselben Weise können auch alle anderen Stäbe durch Angabe der in ihnen aneinander grenzenden Polygone angegeben werden. Wir brauchen jetzt nur die Linien ad und cd im Kräfteplane von den bekannten Punkten a und c aus parallel zu den gleichbezeichneten Stäben der Binderfigur zu ziehen; der Schnittpunkt liefert den Punkt d .

Dann folgt Punkt e . Das Dreieck e in der Binderfigur grenzt an c und d an; wir ziehen also von den bereits be-

kannten Punkten c und d im Kräfteplane Parallelen zu den Richtungen der Stäbe ce und de . Der Schnitt gibt den Punkt e . Ebenso grenzt nachher f an a und e an und Punkt f wird daher von a und e aus mit Hilfe der Parallelen zu den Stäben af und ef gefunden. In dieser Weise fährt man fort bis zum rechten Ende des Binders hin, also bis zur Construction des Punktes q im Kräfteplane. Man muss nur nach Ueberschreitung des Knotenpunktes, an dem die Last P angebracht ist, beachten, dass die Dreiecke k, m u. s. f. nicht mehr an a , sondern an b angrenzen. Die Punkte k, m, o, q liegen daher auf der durch b gezogenen Horizontalen.

Eine besondere Bemerkung ist nur noch hinsichtlich des letzten Punktes q zu machen. Das Dreieck q in der Binderfigur grenzt nämlich an die Polygone b, c und p an, die alle drei schon durch Punkte im Kräfteplane vertreten sind. Hiernach müssen sich die drei durch diese Punkte zu den Stäben bq, cq und pq gezogenen Parallelen in demselben Punkte q schneiden. Zieht man also die Linie pq parallel zum Stabe pq , und sucht deren Schnitt q mit der durch b gelegten Horizontalen auf, so muss die Verbindungslinie cq von selbst parallel zum Stabe cq gehen. Hiermit erhält man eine sehr willkommene Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung. Hätte man z. B. die Auflagerkräfte nicht richtig gewählt, würde also Punkt c auf der Graden ab nicht an der richtigen Stelle sitzen, so könnte man die ganze Figur zunächst genau so wie vorher construiren; die Verbindungslinie cq würde aber dann nicht parallel zum Stabe cq laufen und wir würden dadurch auf den begangenen Fehler aufmerksam gemacht.

Auch in Abb. 12^b sind, wie schon in Abb. 11, die zuerst zu ziehenden Linien stark ausgezogen, die folgenden schwächer, dann gestrichelt, mit Strichpunkten u. s. f. Dem Anfänger soll hierdurch der Ueberblick über die Entstehungsart der Figur erleichtert werden.

Nachdem die reciproke Figur construirt ist, überzeuge man sich davon, dass sie in der That als der Kräfteplan des Binders aufgefasst werden kann. Zu diesem Zwecke greife

man irgend einen Knotenpunkt des Binders heraus und suche das ihm zugehörige Krafteck im Kräfteplane auf. In jenem Punkte z. B., an dem die Last P angreift, stossen die Polygone a, h, i, k, b in der Binderfigur zusammen; wir können ihn geradezu als den Knotenpunkt $ahikb$ bezeichnen. Ihm entspricht im Kräfteplane das gleich bezeichnete Krafteck $ahikb$ und in derselben Weise kann zu jedem Knotenpunkte das zugehörige Krafteck angegeben werden. — Wir haben ferner noch die Vorzeichen der Stabspannungen festzustellen. Am einfachsten geschieht dies für jene Stäbe, die von einem Knotenpunkte ausgehen, an dem zugleich eine äussere Kraft angreift, weil deren Pfeil von vornherein bekannt ist. Im Kraftecke $ahikb$ stellt die Seite ab die Last P mit dem Pfeile nach abwärts dar. Daraus folgt z. B. der Pfeil von bk , sofern er auf den Knotenpunkt $ahikb$ bezogen wird, nach rechts hin u. s. f. Trägt man diese Pfeile an dem Knotenpunkte in der Binderfigur ab, so überzeugt man sich, dass alle vier von diesem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe gezogen sind. Um die Pfeile der Stabspannungen für einen Knotenpunkt, an dem keine äussere Kraft angreift, ermitteln zu können, muss man von einem Stabe das Vorzeichen der Stabspannung bereits kennen. So wirken z. B. am Knotenpunkte $bklm$ vier Stabspannungen, die im Kräfteplane das Krafteck $bklm$ bilden. Aus der vorhergehenden Betrachtung wissen wir bereits, dass Stab bk gezogen ist. Für den jetzt betrachteten Knotenpunkt geht also der Pfeil von bk nach links; hieraus folgt der Pfeil von bm nach rechts, von ml nach rechts oben und von lk nach rechts unten. Die Stäbe bm und ml sind daher gezogen und lk ist gedrückt. Dass in dem Vierecke $bklm$ drei Punkte und zwei Seiten auf eine Gerade fallen, rührt nur von dem zufälligen Umstande her, dass der Untergurt des Binders gradlinig angenommen war. Darum hört aber dieses Krafteck (ebenso wie die übrigen, bei denen dasselbe zutrifft) nicht auf, als Viereck zu gelten.

Es kann dem Anfänger nicht eindringlich genug empfohlen werden, der Reihe nach sämtliche Kraftecke im Kräfteplane aufzusuchen und die Vorzeichen aller Stabspannungen festzu-

stellen. Die gedrückten Stäbe sind in der Binderfigur wieder durch beigesetzte Schattenstriche gekennzeichnet.

§ 6. Die Aufeinanderfolge der Pfeile an einer Ecke des reciproken Kräfteplans.

Die früheren Betrachtungen lehren wohl, dass ein Kräfteplan, in dem jede Stabspannung nur einmal als Seite auftritt, eine zur Binderfigur reciproke Figur bilden muss. Ob aber die reciproke Figur, die wir zur Binderfigur auf Grund rein geometrischer Ueberlegungen construiert haben, auch wirklich einen Kräfteplan bildet, geht daraus noch nicht deutlich genug hervor. Man könnte sich zwar, um diesen Zweifel zu heben, damit begnügen, nach Aufzeichnung der Figur nachträglich jedes Krafteck in ihr aufzusuchen und sich davon zu über-

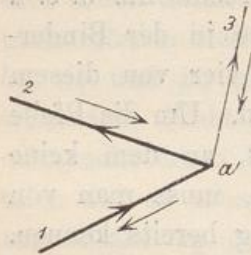


Abb. 13.

zeugen, dass in ihm nicht nur die richtigen Seiten vorkommen (woran auf Grund der früheren Ueberlegungen kein Zweifel möglich ist), sondern dass auch die Pfeile der Stabspannungen in ihm richtig aufeinanderfolgen. Für den Praktiker genügt dies in der That und für den Anfänger ist es auf alle Fälle entschieden zu empfehlen, dass er sich zunächst einmal auf diese empirische Weise Rechenschaft darüber gibt, ob die genannte Bedingung erfüllt ist. Darauf war auch schon hingewiesen. Wünschenswerth bleibt aber immerhin eine allgemein gültige Entscheidung der Frage, die uns der Sorge überhebt, in jedem Einzelfalle von Neuem zu prüfen, ob die richtige Aufeinanderfolge der Pfeile gewahrt ist.

Dies lehrt die folgende Ueberlegung. Man betrachte zunächst irgend eine Ecke a des Kräfteplans (Abb. 13) von der nur drei Stabspannungen ausgehen mögen. Während der Construction des Kräfteplans erhält man diesen Punkt zuerst als Schnitt von zwei Stabspannungen, die in Abb. 13 mit 1 und 2 bezeichnet seien. In dem zugehörigen Kraftecke müssen die Pfeile von 1 und 2 aufeinanderfolgen; der eine Pfeil muss

also auf die Ecke zu, der andere von ihr ab gerichtet sein. In der Abbildung sind diese Pfeile auf die Linien 1 und 2 selbst eingetragen und zwar ist jene Stabspannung, deren Pfeil auf die Ecke zu gerichtet ist, mit 1, die andere mit 2 bezeichnet. Offenbar steht es uns nämlich frei, diese Bezeichnungen so zu vertheilen, wie es uns beliebt, ohne dadurch die Allgemeingültigkeit der Betrachtung einzuschränken. Späterhin kommt dann die Stabspannung 3 hinzu. Während wir sie ziehen, sind wir im Begriffe, ein Krafteck zu zeichnen, in dem ausser 3 noch eine der beiden anderen Stabspannungen — sagen wir 2 — vorkommt. In diesem zweiten Kraftecke, das zu dem anderen der durch den Stab 2 in der Binderfigur verbundenen Knotenpunkte gehört, hat aber die Stabspannung 2 den entgegengesetzten Pfeil wie vorher; dieser zweite Pfeil ist neben der Linie 2 in die Abbildung eingetragen. Der Pfeil von 3 im zweiten Kraftecke folgt dann aus der Bedingung, dass er in diesem auf den Pfeil von 2 folgen muss. Er ist vom Knotenpunkte ab gerichtet und so auf die Linie 3 selbst eingetragen. Bei der weiteren Construction des Kräfteplans kommt man aber noch zu einem dritten Kraftecke, in dem die Spannungen 1 und 3 an der betrachteten Ecke aufeinanderfolgen. Die Frage, um deren Entscheidung es sich handelt, besteht nun darin, ob auch in diesem dritten Kraftecke die Pfeile von 1 und 3, die durch die vorhergehenden Ueberlegungen bereits festgelegt sind, unter allen Umständen richtig aufeinanderfolgen. Man sieht bereits, dass die Frage zu bejahen ist. Im dritten Kraftecke sind nämlich an Stelle der auf die Linien selbst eingetragenen die daneben angegebenen umgekehrten Pfeilrichtungen zu nehmen und diese folgen in der That richtig aufeinander.

Dies bleibt auch noch gültig, wenn beliebig viele Stabspannungen in derselben Ecke a des Kräfteplans zusammenreffen. Es wird genügen, wenn ich es für 4 Stabspannungen nachweise, da die Betrachtung in anderen Fällen ebenso durchgeführt werden kann. Die Spannungen, durch deren Schnitt die Ecke zuerst gefunden wird, seien wieder mit 1, 2, die bei

der weiteren Construction zunächst hinzutretende mit 3 und die letzte mit 4 bezeichnet. Dabei sollen die Bezeichnungen überdies noch so vertheilt sein, dass 2 mit 3 zum zweiten Kraftecke und — wie dies dann nicht anders sein kann — 3 mit 4 zum dritten und 1 mit 4 zum letzten Kraftecke gehören. Angenommen der Pfeil von 1 gehe im Kraftecke 1, 2 (wie es der Kürze halber genannt werden kann) auf die Ecke a zu; der von 2 ist dann von a ab gerichtet. Im Kraftecke 2, 3 hat dann 2 den entgegengesetzten Pfeil, der in Abb. 14 wieder neben die Linie eingetragen ist. Ueberhaupt sollen die auf die Linien selbst eingetragenen Pfeile immer jene sein, die beim ersten Auftreten dieser Linien gültig sind, während sie beim zweiten Auftreten entgegengesetzt sind und mit dieser

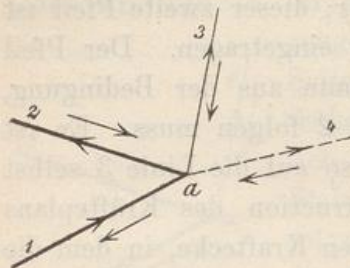


Abb. 14.

Richtung daneben eingetragen wurden. Man sieht jetzt, dass der auf Linie 3 einzutragende Pfeil von a ab gerichtet ist. Da sich der Pfeil von 3 beim zweiten Auftreten wieder umkehrt, ist auch der auf 4 selbst einzutragende Pfeil von a ab gerichtet. Beim letzten Kraftecke sind sowohl von 4 als von 1 die daneben gezeichneten Pfeile zu nehmen und diese folgen wieder richtig aufeinander, wie wir es verlangen müssen. Wären noch mehr Stabspannungen von a ausgegangen, so wären alle auf die Linien selbst einzutragenden Pfeile von a ab gerichtet anzunehmen gewesen, mit Ausnahme von 1. Dies hätte in jedem Falle zuletzt auch zur richtigen Aufeinanderfolge von 1 und der letzten Stabspannung führen müssen. — Wenn der erste Pfeil von 1 etwa entgegengesetzt dem hier angenommenen gewesen sein sollte, so hätte man nur auch alle übrigen umzukehren, ohne dass dadurch am Schlussresultate etwas geändert würde.

Auch auf den Fall, dass an der Ecke a ausser Stabspannungen noch zwei äussere Kräfte zusammenstossen, lässt sich die vorige Ueberlegung ohne Weiteres übertragen. Man muss

nur beachten, dass die Pfeile der beiden äusseren Kräfte ebenfalls aufeinander folgen müssen, da der Punkt a zugleich zum Kraftecke der äusseren Kräfte gehört. Eine der äusseren Kräfte ist daher auf den Punkt a zu, die andere von ihm ab gerichtet. Betrachtet man nun die Stabspannung 1, die zuerst von a aus während der Construction des Kräfteplans gezogen wird, so bestimmt sich deren Pfeil aus jenem der äusseren Kraft, die mit ihr zum selben Kraftecke gehört. Beim nächsten Kraftecke, in dem 1 vorkommt, ist deren Pfeil umzukehren u. s. f. Man findet dann auch im letzten Kraftecke die richtige Aufeinanderfolge der Pfeile an der Ecke a .

Aus dieser Untersuchung folgt, dass in der That in der zur Bindergestalt construirten reciproken Figur — falls nur die äusseren Kräfte vorher richtig aufgetragen waren — alle Pfeile vorschriftsmässig aufeinanderfolgen müssen. Die reciproke Figur ist daher der gesuchte Kräfteplan.

Anmerkung. Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass selbstverständlich nicht jedem Polygone, das man aus beliebig herausgegriffenen zusammenhängenden Stäben in der Binderfigur bilden kann, eine Ecke im reciproken Kräfteplane entspricht. Betrachtet man z. B. das aus den Dreiecken d und e in Abb. 12 zusammengesetzte Viereck, so entspricht diesem keine Ecke im Kräfteplane. Die Spannungen der vier Umfangsstäbe gehen im Kräfteplane weder von einem Punkte aus, noch schliessen sie sich überhaupt stetig aneinander. Die Aufgabe, den Kräfteplan als reciproke Figur zu construiren, setzt vielmehr im allgemeinsten Falle voraus, dass man bereits eine Zerlegung der Binderfigur in solche Polygone kennt, deren Seiten nur aus je einem Stabe oder der Richtungslinie einer äusseren Kraft gebildet werden und von denen je zwei in einer Seite aneinandergrenzen. Eine solche Zerlegung zu finden, kann unter Umständen recht schwierig sein. Bei den einfach gegliederten Bindern, um die es sich in diesem Abschnitte in erster Linie handelt, ist diese Zerlegung aber von selbst gegeben.

§ 7. Zusammensetzen der Kräfte in der Ebene.

Wenn hier und in der Folge von der Zusammensetzung von Kräften die Rede ist, die nicht alle an demselben Punkte angreifen, so ist in Gedanken überall die Voraussetzung hinzuzufügen, dass die Angriffspunkte alle auf demselben starren Körper oder auch auf einer Verbindung von Körpern enthalten sein sollen, die von unveränderlicher Gestalt ist und die daher als ein einziger starrer Körper aufgefasst werden kann. Sehr häufig werde ich von dem starren Körper, an dem die Kräfte angreifen, nicht einmal den Umriss hinzeichnen, da seine Gestalt für das, was gerade auseinandergesetzt werden soll, gleichgültig ist. Man darf aber darum niemals ausser Acht lassen,

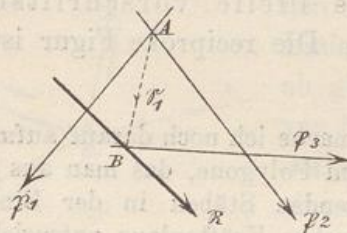


Abb. 15 a.

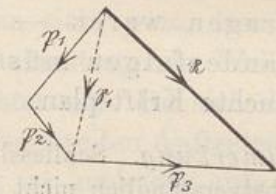


Abb. 15 b.

dass ein solcher Körper hinzugedacht werden muss, da Kräfte, die an verschiedenen starren Körpern angreifen, überhaupt nicht zusammengesetzt werden können.

Wenn die Richtungslinien gegebener Kräfte in einer Ebene liegen, aber nicht parallel zu einander sind, führt das durch Abb. 15^a und 15^b erläuterte Verfahren am schnellsten zu ihrer Vereinigung. Man suche zuerst den Schnittpunkt A der Richtungslinien von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 in Abb. 15^a auf, verlege diese beiden Kräfte nach A als Angriffspunkt und ersetze sie durch ihre geometrische Summe \mathfrak{S}_1 , die in Abb. 15^b mit Hilfe eines Kräfte-dreiecks konstruiert werden kann. Dann suche man den Schnittpunkt B von \mathfrak{S}_1 , mit \mathfrak{P}_3 auf und setze an diesem \mathfrak{S}_1 mit \mathfrak{P}_3 auf dieselbe Weise zur Resultirenden \mathfrak{R} zusammen. In der Abbildung waren nur 3 gegebene Kräfte angenommen;

man sieht aber sofort ein, dass bei einer grösseren Zahl dasselbe Verfahren fortgesetzt werden kann, bis schliesslich alle Kräfte durch eine einzige Resultirende \mathfrak{R} ersetzt sind.

Natürlich hätte man die Reihenfolge in der Zusammensetzung auch ändern, also z. B. mit der Zusammensetzung von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_3 beginnen können. Auf das Schlussresultat kann dies aber keinen Einfluss haben. Dies folgt daraus, dass eine auf diesem Wege gefundene Resultirende die gegebenen Kräfte (sofern von der Vertheilung der inneren Kräfte im starren Körper abgesehen wird), vollständig ersetzt. Eine einzelne Kraft \mathfrak{R} kann aber niemals durch eine von ihr verschiedene vollständig ersetzt werden. Gelangt man also auf zwei verschiedenen Wegen zu Resultirenden gegebener Kräfte, so müssen beide in jeder Hinsicht, d. h. nach Richtung, Grösse und Lage mit einander übereinstimmen.

Sind die Kräfte parallel zu einander, so fügt man zwei neue, \mathfrak{T} und $\mathfrak{T}' = -\mathfrak{T}$ hinzu, die sich gegenseitig aufheben, die sonst aber beliebig in passender Weise gewählt werden können, vereinigt \mathfrak{T} mit \mathfrak{P}_1 zu \mathfrak{S}_1 , dies mit \mathfrak{P}_2 zu \mathfrak{S}_2 u. s. f. und setzt das letzte \mathfrak{S} mit \mathfrak{T}' zur Resultirenden \mathfrak{R} zusammen. Im I. Bande war dies schon beschrieben und im nächsten Abschnitte werde ich darauf nochmals ausführlicher zurückkommen.

Im Allgemeinen kann man, wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, Kräfte in der Ebene stets durch eine einzige Kraft \mathfrak{R} ersetzen. Nur der eine Ausnahmefall kommt in Betracht, dass man zuletzt auf zwei Kräfte geführt wird, die gleich gross, parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Im ersten Bande setzte ich schon auseinander, dass man ein solches „Kräftepaar“ auch als gleichwerthig mit einer unendlich kleinen Kraft ansehen kann, deren Richtungslinie die unendlich ferne Gerade der Ebene ist. Macht man von dieser Ausdrucksweise Gebrauch, so kann man sagen, dass sich Kräfte in der Ebene immer durch eine einzige Resultirende ersetzen lassen.

Die Aufgabe der Kräftezusammensetzung in der Ebene lässt auch noch manche andere Lösungen zu. Man kann z. B.

eine beliebige Gerade ziehen, die die Richtungslinien aller Kräfte schneidet und einen beliebigen Punkt ausserhalb dieser Geraden annehmen. Dann verlege man die Angriffspunkte aller Kräfte auf die Gerade und verbinde sie mit dem beliebig gewählten Punkte. Jede Kraft kann dann in zwei andere zerlegt werden, von denen eine längs der gezogenen Verbindungslinie durch den gewählten Punkt geht, während die andere auf die gewählte Gerade fällt. Die Kräfte auf der Geraden lassen sich ohne Weiteres durch eine Resultirende ersetzen und ebenso die durch den gewählten Punkt gehenden, indem man ihre graphische Summe bildet. Hiermit ist das gegebene Kraftsystem zunächst auf zwei Kräfte zurückgeführt, von denen eine mit der Geraden zusammenfällt, während die andere durch den gewählten Punkt geht. Diese beiden Kräfte können nachträglich auf gewöhnliche Art zu einer einzigen Resultirenden vereinigt werden. — Im Allgemeinen ist dieses Verfahren umständlicher als die vorher beschriebenen und daher wenig im Gebrauche. Es ist aber nützlich, sich auch mit ihm vertraut zu machen, weil die Zusammensetzung von Kräften, die im Raume windschief zu einander liegen, diesem Verfahren nachgebildet ist. Hat man sich mit dem einfachen Falle schon vertraut gemacht, so werden die später vorzutragenden Lehren über die Kräftezusammensetzung im Raume dadurch leichter verständlich. — Ein Beispiel wird sich jeder Leser selbst leicht bilden können, um sich daran in der Durchführung des Verfahrens zu üben.

§ 8. Zerlegen von Kräften in der Ebene.

Hier handelt es sich namentlich um die Lösung der Aufgabe, eine nach Grösse, Richtung und Lage gegebene Kraft \mathfrak{P} in drei andere zu zerlegen, deren Richtungslinien gegeben sind, mit der Richtungslinie von \mathfrak{P} in einer Ebene liegen, dabei aber nicht durch denselben Punkt gehen. Diese Aufgabe lässt immer eine eindeutige Lösung zu. Dabei kann man, wie bei allen Zerlegungsaufgaben, auch verlangen, dass die drei gesuchten Kräfte mit \mathfrak{P} im

Gleichgewichte stehen, ohne dadurch in der Lösung eine weitere Aenderung als die Umkehrung der Pfeile der gesuchten Kräfte herbeizuführen.

Die Aufgabe ist ganz ähnlich der in § 2 behandelten, eine gegebene Kraft nach drei nicht in derselben Ebene liegenden, aber durch den gleichen Angriffspunkt gehenden Richtungslinien zu zerlegen. Auch hier kennt man verschiedene Wege, die zum Ziele führen und der eine, der von Culmann angegeben ist, stimmt im Wesentlichen mit dem schon damals beschriebenen Culmann'schen Verfahren überein. In Abb. 16^a seien 1, 2, 3 die Richtungslinien, nach denen die gegebene Kraft \mathfrak{P} zerlegt werden soll. Man theile die vier Kräfte in zwei Gruppen ein, so dass zur einen Gruppe etwa \mathfrak{P} und 1, zur andern die Kräfte 2 und 3 gehören.

Sollen die Kräfte 1, 2, 3 mit \mathfrak{P} im Gleichgewichte sein, so muss die Resultirende aus \mathfrak{P} und 1 mit der Resultirenden aus 2 und 3 in die-

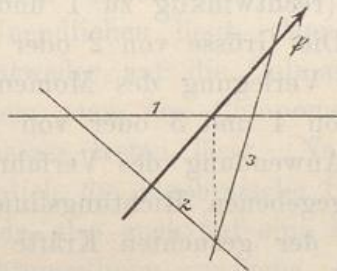


Abb. 16 a.

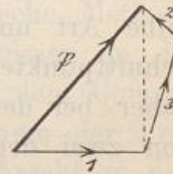


Abb. 16 b.

selbe Grade fallen. Diese Grade kann nur die Verbindungslinie der Schnittpunkte von \mathfrak{P} und 1 und von 2 und 3 sein. Sie ist in die Abbildung gestrichelt eingetragen. Nachdem man die Richtungslinie der Resultirenden aus \mathfrak{P} und 1 kennt, kann man für diese drei Kräfte in Abb. 16^b ein Kräfte-dreieck zeichnen. Daran lässt sich sofort ein zweites anreihen, das der Zusammensetzung von 2 und 3 zu ihrer Resultirenden entspricht, wie es in der Abbildung geschehen ist. Die Pfeile der Kräfte 1, 2, 3 trägt man nachträglich so ein, dass sie unter sich auf einander folgen, dem Pfeile von \mathfrak{P} aber entgegengesetzt sind, falls die 1, 2, 3 die Kraft \mathfrak{P} ersetzen sollen. Sollen sie mit \mathfrak{P} Gleichgewicht halten, so sind die drei Pfeile umzukehren. — Die beiden Zeichnungen in Abb. 16^a und 16^b können übrigens in dem früher besprochenen Sinne als reciproke Figuren aufgefasst werden.

Obschon das Verfahren einfach genug ist, zieht man ihm doch gewöhnlich ein anderes vor, das von Aug. Ritter herrührt und das als die Momenten-Methode oder als die Ritter'sche Methode bezeichnet zu werden pflegt. Man geht dabei von der Erwägung aus, dass die Summe der statischen Momente aller Kräfte, wenn diese Gleichgewicht mit einander halten sollen, für jeden Momentenpunkt zu Null werden muss. Um hiernach die Kraft 1 in der durch Abb. 16^a gestellten Aufgabe zu ermitteln, lege man den Momentenpunkt auf den Schnittpunkt der Richtungslinien von 2 und 3. In der Momentengleichung kommen dann nur die Momente von \mathfrak{P} und 1 vor. Man erkennt zunächst, dass der Pfeil von 1 nach links gehen muss und findet die Grösse von 1 durch Ziehen der Hebelarme (rechtwinklig zu 1 und \mathfrak{P}) und Gleichsetzen der Momente. Die Grösse von 2 oder 3 findet man auf dieselbe Art unter Verlegung des Momentenpunktes nach dem Schnittpunkte von 1 und 3 oder von 1 und 2. Man pflegt daher bei der Anwendung des Verfahrens den Schnittpunkt von zwei der gegebenen Richtungslinien auch geradezu als den zur dritten der gesuchten Kräfte gehörigen Momentenpunkt zu bezeichnen.

Sind mehrere Kräfte gegeben, die alle in derselben Ebene liegen und die mit drei den Richtungslinien nach bekannten Kräften im Gleichgewichte stehen sollen, so lässt sich das Culmann'sche Verfahren ebenso anwenden, wie im vorhergehenden Falle, nachdem man zuvor die gegebenen Kräfte nach den Lehren des vorigen Paragraphen durch eine Resultirende ersetzt hat. Bei dem Ritter'schen Verfahren ist es nicht nöthig, die Resultirende selbst aufzusuchen. Man hat nur ihr statisches Moment nöthig und dieses ist, wie man weiss, gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aller gegebenen Kräfte.

Dass die Richtungslinien 1, 2, 3 nicht durch einen Punkt gehen dürfen, wenn die Lösung der Aufgabe möglich sein soll, war schon vorher bemerkt. Gehen sie nicht genau, sondern nur nahezu durch einen Punkt, schneiden also die

drei Richtungslinien etwa ein unendlich kleines Dreieck in der Ebene ab, so werden die Kräfte 1, 2, 3 unendlich gross, denn der Hebelarm einer jeden wird für den zugehörigen Momentenpunkt unendlich klein, während das Moment von \mathfrak{P} endlich ist. Auch parallel zu einander dürfen die drei Richtungslinien nicht sein, weil sie sonst niemals eine Resultirende von beliebiger Richtung liefern könnten. Dieser Fall ist indessen im vorigen schon mit enthalten, da auch parallele Linien durch denselben Punkt, nämlich durch den ihnen gemeinsamen unendlich fernen Punkt gehen.

Zwei der Richtungslinien dürfen indessen parallel zu einander sein. Die Momentenmethode bleibt in diesem Falle allerdings zur Bestimmung der in der dritten Richtungslinie gehenden Kraft nicht mehr verwendbar, weil der ihr zugehörige Momentenpunkt im Unendlichen liegt. Man hilft sich aber leicht, indem man entweder auf die Culmann'sche Methode zurückgreift oder indem man den Componentensatz an die Stelle des Momentensatzes treten lässt. Nach dem Componentensatz muss nämlich die algebraische Summe der Projectionen auf jede Gerade, also auch auf eine senkrecht zu den beiden parallelen Richtungslinien gezogene, gleich Null sein. Da in der Componentengleichung im vorliegenden Falle nur zwei Glieder auftreten, erhält man daraus sofort die Grösse der gesuchten Kraft.

§ 9. Anwendung der Ritter'schen Methode auf die Berechnung von Fachwerkträgern.

Die Ritter'sche Methode wird sehr häufig zur Berechnung der Stabspannungen in Dachbindern oder Brückenträgern benutzt. Durch einen solchen Binder kann man nämlich gewöhnlich einen Schnitt in ungefähr senkrechter Richtung legen, der nur drei Stäbe trifft, deren Richtungslinien nicht durch einen Punkt gehen. Denkt man sich dann die rechte Hälfte des Binders entfernt, so muss die linke Hälfte immer noch im Gleichgewichte bleiben, wenn man an den Stümpfen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe Kräfte anbringt, die nach

Grösse und Richtungssinn mit den vorher in den Stäben übertragenen Stabspannungen übereinstimmen. Von diesen Kräften kennt man die Richtungslinien und die Lösung der vorher besprochenen Aufgabe führt daher zur Kenntniss der Stabspannungen.

Hiernach tritt die Ritter'sche Methode in Wettbewerb mit dem früher für die Ermittlung der Stabspannungen angegebenen Verfahren, einen Kräfteplan zu zeichnen. Dieses Verfahren bleibt freilich immer im Vortheile, sobald man, wie es gewöhnlich verlangt wird, alle Stabspannungen ermitteln soll, die zu einer gegebenen Belastung gehören. Wünscht man aber aus irgend einem Grunde nur eine einzige Stabspannung zu kennen, während die Spannungen der übrigen Stäbe gleichgültig sind, so kommt man mit der Ritter'schen Methode weit schneller zum Ziele.

Ausserdem hat die Ritter'sche Methode auch noch den Vorzug, dass sie in manchen Fällen ohne jede Schwierigkeit zum Ziele führt, bei denen der Kräfteplan nach den bisher dafür gegebenen Anleitungen nicht mehr construirt werden kann. Das bekannteste Beispiel dafür bildet der sog. zusammengesetzte Polonçeau- oder Wiegmann-Binder, der in Abb. 17^a dargestellt ist. Aus dem einfachen Binder in Abb. 9 (Seite 20) geht er dadurch hervor, dass jeder Stab des Obergurts, sowie die Stäbe 2, 5 und die ihnen auf der anderen Seite entsprechenden in Abb. 9 durch einen in der Mitte liegenden Knotenpunkt in zwei Hälften zerlegt werden, worauf die neu hinzugekommenen Knotenpunkte durch Einfügen von Stäben unter Einhaltung des Dreiecksverbandes gegen die übrigen abgestützt werden. Die Absicht bei der Construction des „zusammengesetzten“ Binders in Abb. 17^a geht darauf hinaus, eine grössere Zahl von Stützpunkten am Binder für die Auflagerung der Sekundärconstruction zu gewinnen. Bei grossen Spannweiten würden die Dachsparren bei der Anordnung in Abb. 9 auf eine zu grosse Länge frei zu tragen haben, während in Abbildung 17 diese Länge — nämlich der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden

Knotenpunkten des Obergurts — auf die Hälfte herabgesetzt ist.

Der Binder in Abb. 17^a bildet keinen einfachen Fachwerkträger mehr. Er kann nämlich nicht auf die früher an-

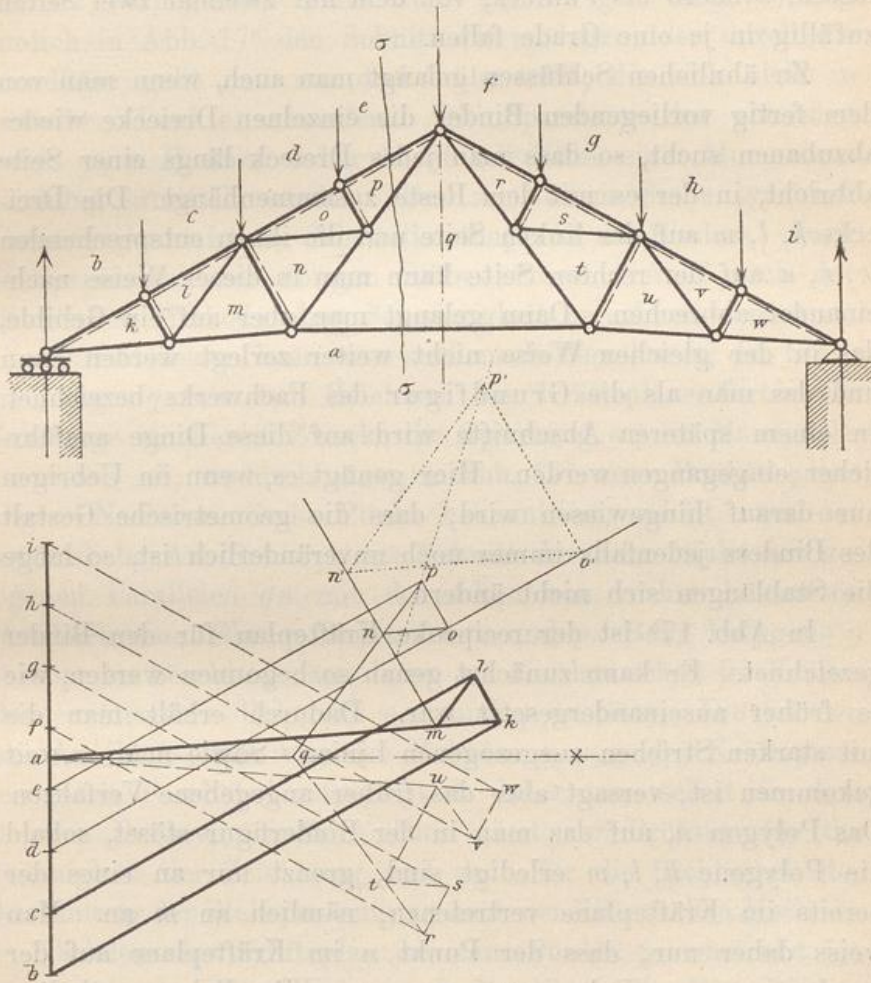


Abb. 17 a und 17 b.

gegebene Art durch Aneinanderfügen von Dreiecken erhalten werden, nämlich nicht so, dass jedes folgende Dreieck mit einer Seite an das vorhergehende angeschlossen wird. Auf den ersten Blick erkennt man den Unterschied vielleicht nicht; man bedenke aber, dass sich das mit *q* bezeichnete Polygon

gleichzeitig an die beiden vorhergehenden Dreiecke n und p mit einer Seite anschliesst, was der früher gegebenen Vorschrift widerspricht. In der That ist daher q auch gar nicht als Dreieck in dem hier in Frage kommenden Sinne aufzufassen, sondern als Fünfeck, von dem nur zweimal zwei Seiten zufällig in je eine Grade fallen.

Zu ähnlichen Schlüssen gelangt man auch, wenn man von dem fertig vorliegenden Binder die einzelnen Dreiecke wieder abzubauen sucht, so dass man jedes Dreieck längs einer Seite abbricht, in der es mit dem Reste zusammenhängt. Die Dreiecke k, l, m auf der linken Seite und die ihnen entsprechenden w, v, u auf der rechten Seite kann man in dieser Weise nacheinander abbrechen. Dann gelangt man aber auf ein Gebilde, das in der gleichen Weise nicht weiter zerlegt werden kann und das man als die Grundfigur des Fachwerks bezeichnet. In einem späteren Abschnitte wird auf diese Dinge ausführlicher eingegangen werden. Hier genügt es, wenn im Uebrigen nur darauf hingewiesen wird, dass die geometrische Gestalt des Binders jedenfalls immer noch unveränderlich ist, so lange die Stablängen sich nicht ändern.

In Abb. 17^b ist der reciproke Kräfteplan für den Binder gezeichnet. Er kann zunächst genau so begonnen werden, wie es früher auseinandergesetzt war. Dadurch erhält man die mit starken Strichen ausgezogenen Linien. Sowie man so weit gekommen ist, versagt aber das früher angegebene Verfahren. Das Polygon n , auf das man in der Binderfigur stösst, sobald die Polygone k, l, m erledigt sind, grenzt nur an eines der bereits im Kräfteplane vertretenen, nämlich an m an. Man weiss daher nur, dass der Punkt n im Kräfteplane auf der durch m zum Stabe mn gezogenen Parallelen enthalten sein muss.

Auch rein mechanisch betrachtet, ist die Schwierigkeit, auf die man hier stösst, leicht verständlich. Sobald man nämlich alle Stabspannungen bis auf jene, die zur Grundfigur des Binders gehören, ermittelt hat, vermag man keinen Knotenpunkt mehr anzugeben, an dem nur noch zwei der Grösse

nach unbekannte Kräfte angreifen. In der Grundfigur gehen nämlich, wie man leicht erkennt, von jedem Knotenpunkte mindestens drei zur Grundfigur gehörigen Stäbe aus.

Für die Ritter'sche Methode besteht eine solche Schwierigkeit im vorliegenden Falle aber keineswegs. Man vermag nämlich in Abb. 17^a den Schnitt $\sigma\sigma$ zu legen, der durch die Grundfigur geht und nur drei Stäbe trifft, die sich nicht in demselben Punkte schneiden. Die Spannung des untersten Stabes aq z. B. kann daher leicht mit Hülfe einer Momentengleichung ermittelt werden. Der zu diesem Stabe gehörige Momentenpunkt ist der Scheitelknotenpunkt des Binders. Auch die Spannungen der übrigen Stäbe können hierauf nach der Ritter'schen Methode ohne Schwierigkeit berechnet werden.

Anstatt dessen kann man auch nach Berechnung der Stabspannung aq mit dem Zeichnen des Kräfteplans fortfahren. Man trage zu diesem Zwecke die Spannung aq im Maassstabe von a aus ab, wodurch man in Abb. 17^b zum Punkte q gelangt. Nachdem dieser Punkt bekannt ist, erhält man auf gewöhnliche Art Punkt n als Schnitt der zum Stabe qn gezogenen Parallelen qn mit der schon von vorher bekannten Parallelen mn . Ebenso findet man o und p . Beim Polygone p ist aber zu beachten, dass dieses an die drei schon im Kräfteplane vertretenen Polygone o , e und q anstösst. Die zu den drei Anschlussseiten von den Punkten o , e , q des Kräfteplans gezogenen Parallelen müssen sich daher von selbst in dem gleichen Punkte p treffen. Dies dient zur Prüfung für die Genauigkeit der Zeichnung und auch für die Richtigkeit der Berechnung der Stabspannung aq nach der Ritter'schen Methode. — Nachdem der Kräfteplan bis zum Punkte p construiert ist, kann er in derselben Weise auch für die rechtsseitige Binderhälfte weiter gezeichnet werden. Die zugehörigen Linien sind in Abb. 17^b gestrichelt ausgezogen. Da der Binder symmetrisch gestaltet und symmetrisch belastet sein sollte, wird auch der Kräfteplan symmetrisch; die vom Punkte a aus gezogene Horizontale bildet die Symmetrieaxe.

Freilich kann man die Schwierigkeit, auf die man bei der

Construction des Kräfteplans stösst, sobald man an der Grundfigur angelangt ist, auch auf rein geometrischem Wege, ohne Zuhilfenahme der Momentenmethode, überwinden. Diesem Zwecke dienen die ebenfalls in Abb. 17^b eingetragenen punktiert ausgezogenen Linien. Man bedenke nämlich, dass in dem Kraftecke $nopq$, das zu dem gleichnamigen Knotenpunkte des Binders gehört, zwei Seiten, nämlich nq und pq , wie aus der Binderfigur hervorgeht, gleichgerichtet sein müssen. Da sie ferner auch von demselben Punkte q ausgehen, müssen sie demnach auf dieselbe Gerade fallen. Das gesuchte Krafteck besteht also aus einem Dreiecke nop und einem auf der Verlängerung der Dreieckseite np liegenden Punkte q . Das Dreieck nop muss aber sechs geometrischen Bedingungen entsprechen, auf Grund deren es gefunden werden kann. Die drei Ecken müssen nämlich auf den durch die bereits bekannten Punkte m, d, e zu den Stäben mn, do, ep gezogenen Parallelen liegen und die Seiten müssen zu den Stabrichtungen no, op und nq oder pq parallel laufen.

Der schon in § 2 angeführte und bewiesene und damals bereits in ähnlicher Weise benutzte geometrische Satz über Eigenschaften eines veränderlichen Vielecks verhilft uns zur Lösung dieser Aufgabe. Wir ziehen die Linie $n'o'$ in der vorgeschriebenen Richtung no , sonst aber beliebig und von n' und o' aus Parallelen zu den Richtungen op und nq oder pq . Dadurch erhalten wir das durch punktirte Linien angegebene Dreieck $n'o'p'$. Dieses erfüllt 5 der angegebenen Bedingungen, die sechste aber nicht, da p' nicht auf der von e zum Stabe ep gezogenen Parallelen enthalten ist. Man kann sich unendlich viele Dreiecke $n'o'p'$ construirt denken und unter ihnen muss auch das gesuchte Dreieck nop enthalten sein. Nach dem in Erinnerung gebrachten Satze liegen alle Punkte p' dieser Dreiecke auf einer Geraden. Es ist nicht nöthig, noch ein zweites Dreieck $n'o'p'$ zu construiren, um diese Gerade zu finden. Man bedenke nämlich, dass das Dreieck $n'o'p'$ auch zu einem Punkte, nämlich zum Schnittpunkte der Linien mn und do zusammenschrumpfen kann. Dieser Schnittpunkt ist

daher auch eine mögliche Lage des Punktes p' und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Punkte p' des bereits gezeichneten Dreiecks liefert daher sofort die Grade, auf der alle Punkte p' liegen müssen. Der Punkt p des gesuchten Dreiecks wird nun ohne Weiteres als Schnittpunkt der gezogenen Verbindungslinie mit der bereits bekannten Richtungslinie ep gefunden. Von da aus erhält man sofort auch die Punkte n und o , sowie in der Verlängerung von np den Punkt q . Hiermit sind wir zu demselben Resultate gelangt, das vorher unter Zuhilfenahme der Ritter'schen Methode abgeleitet worden war.

Vergleicht man hier wieder beide Wege mit einander, so lässt sich nicht verkennen, dass der zuletzt betretene für den mit ihm gut Vertrauten der kürzere und bequemere ist. So lang nämlich auch die Auseinandersetzung ausfiel, die zur Beschreibung und Begründung des Verfahrens erforderlich war, so schnell ist, wenn man es erst kennt, seine Ausführung. Man braucht in der That nur die vier in Abb. 17^b punktiert ausgezogenen Linien als Parallelen zu bekannten Stabrichtungen zu ziehen und spart damit vollständig die Ausrechnung einer Stabspannung nach der Momentenmethode, die wenn auch an sich ganz einfach, immerhin etwas mehr Mühe verursacht. Ausserdem muss man wohl auch sagen, dass die consequente Befolgung der geometrischen Methode beim Zeichnen des Kräfteplans stylgerechter ist, als die Benutzung einer dazwischen hinein geschobenen Rechnung. Diesem letzten Einwande liesse sich freilich dadurch bis zu einem gewissen Grade begegnen, dass man nach Führung des Schnittes $\sigma\sigma$ die Spannungen der durchschnittenen Stäbe nach dem Culmann'schen Verfahren anstatt nach dem Ritter'schen ermittelte. Immerhin wird auch hierbei die Construction des Kräfteplans in störender Weise unterbrochen.

Dies alles ist zuzugeben und auch hinzuzufügen, dass es sich für den Ingenieur einer Eisenconstructionswerkstätte, der solche Kräftepläne sehr häufig zu zeichnen hat, entschieden lohnt, sich mit dem auseinandergesetzten geometrischen Verfahren vertraut zu machen. Andererseits darf man hierin aber

auch nicht zu weit gehen. In den Ueberlegungen, die zur Lösung nöthig sind, ist das Ritter'sche Verfahren entschieden das einfachere und wer sich im einzelnen Falle des geometrischen Verfahrens grade nicht mehr recht entsinnt, möge getrost das Ritter'sche Verfahren anwenden. Die Hauptsache bleibt immer, die Stabspannungen in kürzester Zeit zuverlässig zu ermitteln, ohne Rücksicht darauf, wie dies geschieht.

Schliesslich muss noch einer sehr wichtigen Verwendung der Ritter'schen Methode gedacht werden. Bisher war nämlich immer nur von der Ermittlung der Stabspannungen die Rede, die zu einem bestimmten, gegebenen Lastsysteme gehören. Bei der Berechnung von Dachbindern kommt man damit freilich immer aus, indem man ausser auf gleichförmig vertheilte senkrechte Lasten nur noch auf die Belastung durch Winddruck zu achten braucht. Diese erfordert zwar die Construction weiterer Kräftepläne, die aber genau so wie in den vorhergehenden Fällen erfolgen kann. Anders ist es aber bei Brückenträgern. Die Lasten können hier auf sehr verschiedene Arten vertheilt sein und man steht dann vor der Frage, bei welcher Lastvertheilung die grösste Spannung in einem bestimmten Stabe hervorgerufen wird. In diesem Falle braucht man sich in der That jeweilig nur um eine einzige Stabspannung zu kümmern, während die übrigen einstweilen gleichgültig sind. Das Ritter'sche Verfahren ist dann allein praktisch brauchbar. Man verfährt so, dass man zunächst nur eine Belastung des Trägers durch eine Einzellast ins Auge fasst. Nach dem Ritter'schen Verfahren lässt sich schnell entscheiden, bei welchen Stellungen dieser Last auf dem Träger Zug- oder Druckspannungen in dem betrachteten Stabe hervorgerufen werden. Dann weiss man, welche Stellen des Trägers möglichst viel oder möglichst wenig belastet werden müssen, um die grösste Zug- oder Druckspannung in dem Stabe hervorzubringen. — Ausführlichere Betrachtungen dieser Art greifen übrigens schon über den Rahmen der technischen Mechanik hinaus und sind der Lehre vom Brückenbaue vorzubehalten. An einigen Stellen wird indessen darauf in der Folge noch kurz zurückgekommien werden.

Aufgaben.

1. Aufgabe. Vier gleich lange Stangen sind an den Enden gelenkförmig mit einander verbunden; ausserdem ist ein Diagonalstab d eingeschaltet (vgl. Abb. 18^a). Man soll die Spannung in d ermitteln, wenn das Viereck längs der anderen Diagonalen mit einer Kraft P zusammengedrückt wird. In welcher Beziehung steht das Verhältniss der Kräfte P und S_d zu den Längen der Diagonalen im Rhombus?

Lösung. Abb. 18^b gibt den Kräfteplan an, der zu der angenommenen Belastung der Stangenverbindung gehört. Er konnte leicht als reciproker Kräfteplan eingerichtet werden. Man erkennt, dass im vorliegenden Falle der Kräfteplan zugleich der Figur der

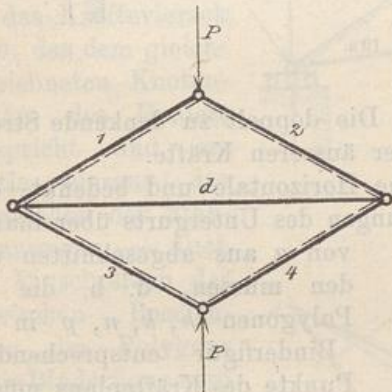


Abb. 18 a.

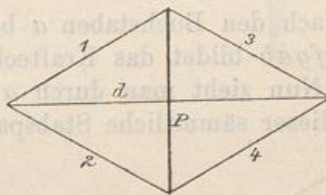


Abb. 18 b.

Stangenverbindung ähnlich ist. Freilich entsprechen sich die ähnlich liegenden Seiten in beiden Figuren nicht einander. Die Last P und die Spannung in d verhalten sich, wie aus dem Vergleiche beider Figuren hervorgeht, wie die beiden Rhombusdiagonalen zueinander.

2. Aufgabe. Man soll den Kräfteplan für den in Abb. 19^a gezeichneten Dachbinder construiren. Die an den Knotenpunkten des Obergurts angreifenden Lasten sind alle senkrecht und gleich gross.

Lösung. In solchen Fällen wird man den Kräfteplan immer als reciproken einrichten. Ich will das Verfahren hier gleich so beschreiben, wie man es handhabt, wenn man schon eine gewisse Uebung erlangt hat. Von früher her ist bekannt, dass man den reciproken Kräfteplan mit dem Kraftecke der äusseren Kräfte beginnen muss. Man zieht also eine Senkrechte, trägt die fünf Knoten-

punktlasten darauf ab, schreibt die Buchstaben *b* bis *g*, den im Binder bereits eingetragenen Bezeichnungen entsprechend, bei, hal- birt die Strecke *bg*, beachtet, dass nun jede der beiden Hälften einen Auflagerdruck bedeutet und schreibt dem Halbirungspunkte

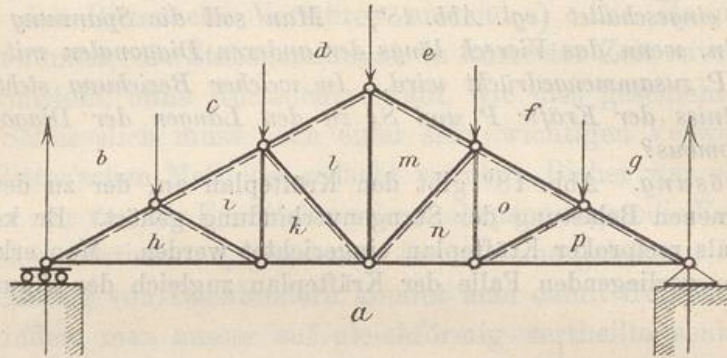


Abb. 19 a.

hiernach den Buchstaben *a* bei. Die doppelt zu denkende Strecke *bcdefgab* bildet das Krafteck der äusseren Kräfte.

Nun zieht man durch *a* eine Horizontale und bedenkt, dass auf dieser sämtliche Stabspannungen des Untergurts übereinander

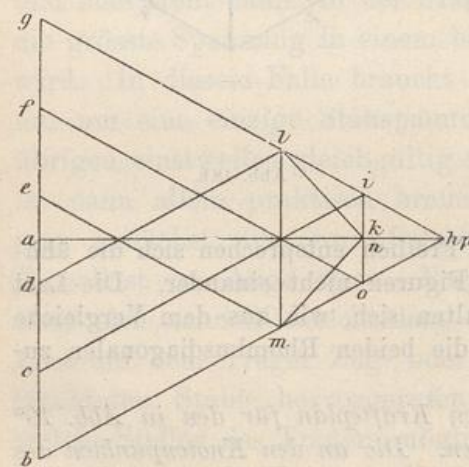


Abb. 19 b.

von *a* aus abgeschnitten werden müssen, d. h. die den Polygonen *h*, *k*, *n*, *p* in der

Binderfigur entsprechenden Punkte des Kräfteplans müssen auf jener Horizontalen liegen. Ebenso zieht man sofort durch die Punkte *b*, *c*, *d* Parallelen zum linksseitigen und durch *e*, *f*, *g* Parallelen zum rechtsseitigen Obergurt des Binders. Auf diesen müssen die Punkte enthalten sein, die den an den Obergurt angrenzenden Polygonen *h*, *i*, *l* und *m*, *o*, *p* des Binders entsprechen. Man

braucht zwar diese Parallelen erst nach und nach für die Construction des Kräfteplans; es ist aber am vorteilhaftesten, sie alle gleich auf einmal zu ziehen, weil man damit Zeit und Mühe spart und auch grössere Genauigkeit erzielen kann, als wenn man jede später einzeln für sich zöge.

Nachdem die Parallelen zu den Gurtstäben alle gezogen sind, sucht man den Punkt h auf, der als Schnitt von zwei bereits vorhandenen Linien gefunden wird, zieht dann der Reihe nach die Parallelen hi, ik, kl u. s. f., womit schnell alle Punkte des Kräfteplans gefunden werden. Beim Ziehen dieser Linien braucht man übrigens nicht mehr an die Construction einer reciproken Figur zu denken. Es ist vielmehr besser, wenn man dabei den Kräfteplan sofort als solchen, d. h. als Aneinanderreihung von Kraftecken auffasst. Beim Aufsuchen des in Abb. 19^b

mit h bezeichneten Punktes denke man also sofort an das Kräftedreieck ahb , beim Aufsuchen von i an das Kräfteviereck $bcih$, das dem gleichbezeichneten Knotenpunkte des Binders entspricht und ermittle hieraus das Vorzeichen der Stabspannungen. — Auch das Einschreiben der Bow'schen Bezeichnung der Polygone in die Binderfigur wird für den Geübten bald entbehrlich; man kann dann wieder zu der in anderer Hinsicht bequemeren Nummerirung der Stäbe übergehen. Für die erste

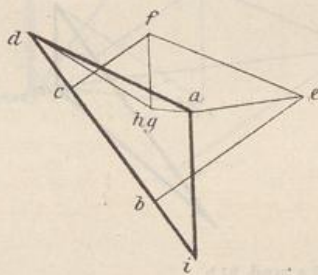
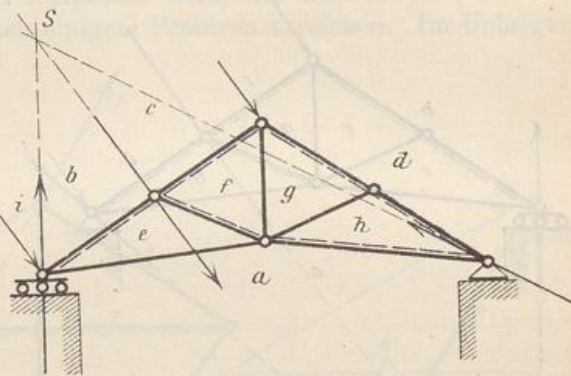


Abb. 20 a und 20 b.

Einübung und so lange man sich noch nicht recht sicher fühlt, wird aber die Bow'sche Bezeichnung die besseren Dienste thun.

3. Aufgabe. Man soll den Kräfteplan für den durch Winddruck einseitig belasteten Dachbinder in Abb. 20^a zeichnen.

Lösung. Zuerst sind die durch die Windbelastung hervorgerufenen Auflagerkräfte zu ermitteln. In Abb. 20^a ist angenommen, dass die zum beweglichen Auflager gehörige Dachseite belastet ist. Die Resultirende des Winddrucks geht durch den in der Mitte der Dachseite gelegenen Knotenpunkt und steht senkrecht zur Dach-

fläche. Mit dieser Resultirenden müssen die beiden Auflagerkräfte im Gleichgewichte stehen. Die Richtungslinien aller drei Kräfte müssen sich daher in einem Punkte schneiden. Da im beweglichen Auflager (von der geringen rollenden Reibung abgesehen) nur ein senkrecht zur Auflagerbahn stehender Auflagerdruck übertragen werden kann, findet man den Schnittpunkt S der drei Kräfte und hiermit auch die Richtungslinie des im festen Auflager übertragenen Auflagerdrucks ohne Weiteres. Nach dieser Vorbereitung kann man

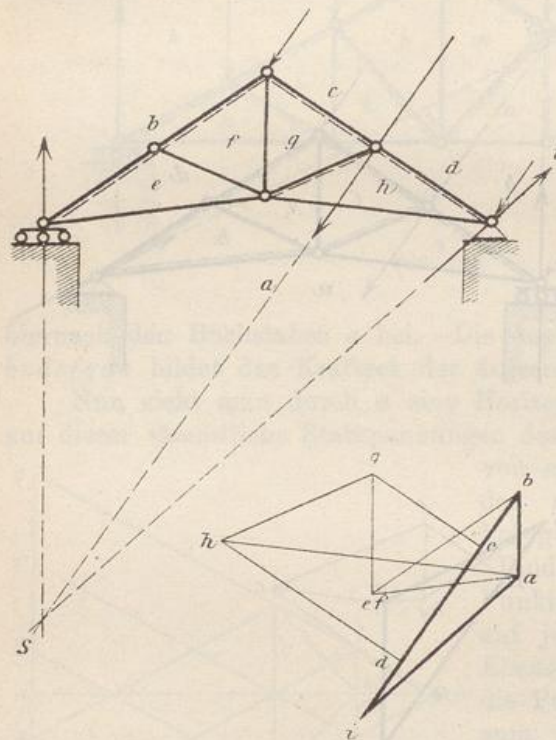


Abb. 21a und 21b.

mit der Construction des Kräfteplans in Abb. 20^b sofort beginnen. Man trägt zuerst den ganzen Winddruck auf und zieht Parallelen zu den Richtungslinien beider Auflagerkräfte. Dann theilt man den Winddruck noch in die zu den drei Knotenpunkten gehörigen Theile dc , cb und bi ein. Dann bleibt nur noch übrig, die zum Binder reciproke Figur zu construiren, was genau so wie in den vorhergehenden Fällen ausgeführt werden kann. Dabei findet man, dass die Punkte g und h zusammenfallen. Der Stab gh

ist nämlich bei diesem Belastungsfalle spannungslos.

4. Aufgabe. Dasselbe für den Fall, dass die Windbelastung auf die zum festen Auflager gehörige Dachseite entfällt (Abb. 21^a).

Lösung. In Bezug auf Windbelastung ist der Träger nicht symmetrisch, da sich die zum festen Auflager gehörige Dachseite anders verhält, als die jenseitige. Man muss daher in allen solchen Fällen zwei Kräftepläne construiren, um die ungünstigsten Stabspannungen zu finden. Im Uebrigen ist aber das Verfahren genau so wie vorher; es bedarf daher zu Abb. 21^b keiner besonderen Erläuterung.

5. Aufgabe. An dem durch Abb. 22^a dargestellten Stangenfünfecke mit den sich überkreuzenden Diagonalstäben 6 und 7 greifen die beiden Kräfte P als Lasten an; man soll die Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Man beginnt mit dem Knotenpunkte, in dem die Stäbe 1 und 2 zusammenstossen, da an ihm nur zwei der Grösse nach unbekannte Kräfte angreifen; dann geht man zum Knotenpunkte 1, 5, 6 oder auch zu 2, 7, 3 über u. s. f. Wünscht man, dass der Kräfteplan ein reciproker wird, wie in Abb. 22^b, so lässt sich dies auch leicht nach einigem Probiren erreichen. Im Uebrigen

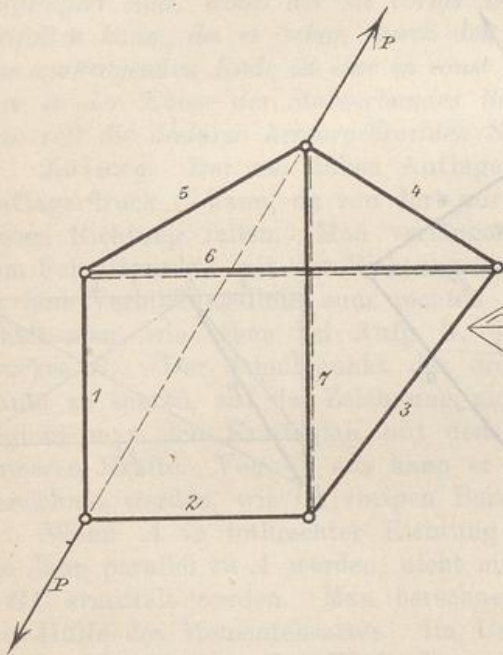


Abb. 22 a.

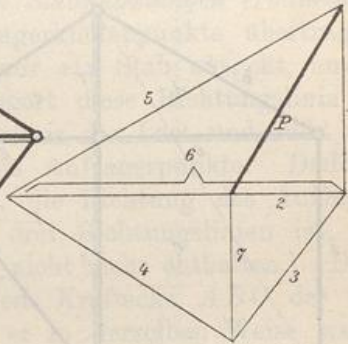


Abb. 22 b.

ist darauf in solchen Fällen nicht viel Werth zu legen, da ein beliebig angeordneter anderer Kräfteplan die gleichen Dienste thut. — Eine einfache Regel für die Construction des reciproken Kräfteplans lässt sich im vorliegenden Falle desshalb nicht geben, weil nicht unmittelbar klar ist, wie man die Figur des Stabwerks in Polygone zerlegen kann, so dass jede Richtungslinie als gemeinschaftliche Seite in zwei aneinander grenzenden Polygonen auftritt. Die Zerlegung ist freilich möglich; die Polygone greifen aber dann übereinander. Es sind die polygonalen Züge $P, 1, 5, P$ und $P, 2, 7, P$, ferner die geschlossenen Stabpolygone 1, 2, 3, 6; 3, 4, 7 und 4, 5, 6.

Eine andere Lösung derselben Aufgabe ist in den Abb. 23

dargestellt. Bei ihr ist angenommen, dass die sich überkreuzenden Stäbe 6 und 7 an der Kreuzungsstelle mit einander verbunden seien. Jeder von beiden Stäben zerfällt dann in zwei andere; man hat daher zwei Unbekannte mehr, wofür aber auch ein neuer Knotenpunkt hinzutritt, für den Gleichgewicht bestehen muss. Solange dieser Knotenpunkt nicht durch äussere Kräfte belastet wird, ändert sich durch die Verbindung gar nichts an den Stabspannungen. Man bedenke nämlich, dass das Krafteck aus den Stabspannungen 6, 6', 7, 7' jedenfalls als Parallelogramm (hier als Rechteck) gezeichnet werden kann. Die Spannungen 6 und 6'

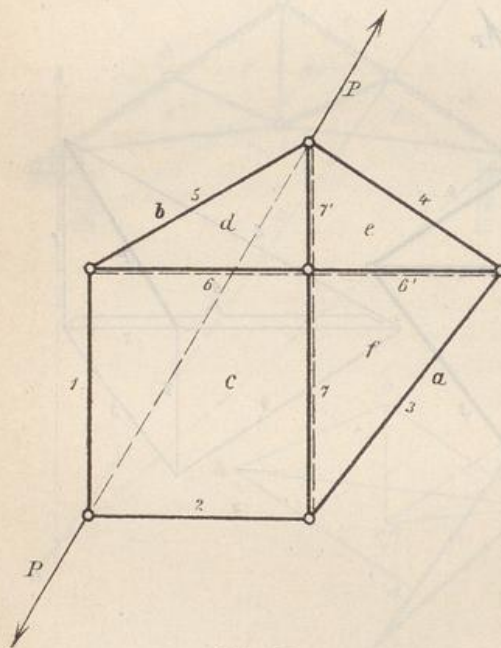


Abb. 23 a.

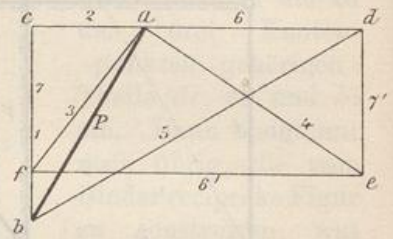


Abb. 23 b.

sind daher nach Grösse und Vorzeichen einander gleich und ebenso 7 und 7'. Es ist also in der That genau so, als wenn die Stäbe ohne Verbindung aneinander vorbei gingen.

Bei dieser Fassung der Aufgabe lässt sich sofort nach einfacher Regel ein reziproker Kräfteplan zeichnen, der freilich mit dem im vorigen Falle nicht übereinstimmt, obschon natürlich dieselben Spannungen in ihm vorkommen. Man kann hier nämlich die Figur des Stabverbandes in Polygone zerlegen, die der gestellten Forderung genügen, ohne sich zu überdecken. Diese Polygone sind wieder nach Bow durch Buchstaben bezeichnet, während der Uebersichtlichkeit wegen zugleich die Stabnummern der vorigen Zeichnung

beibehalten sind. Der Kräfteplan kann dann in Abb. 23^b sofort als reciproke Figur des Stabverbandes hingezeichnet werden. — Zugleich ist noch zu beachten, dass Abb. 23^b auch als Kräfteplan zu Abb. 22^a angesehen werden kann. Zu dieser Figur ist er aber nicht reciprok, da die Seiten 6 und 7 in ihm doppelt vertreten sind.

6. Aufgabe. Abb. 24^a (S. 60) gibt eine Stabverbindung an, die aus der vorigen durch Hinzufügung eines Dreiecks entsteht. Man verwendet sie in dieser oder einer ähnlichen Form zum Aufbaue von Kran-Gerüsten. Dem entsprechend ist angenommen, dass die unteren Knotenpunkte auf einem festen Unterbaue oder einem Wagengestelle aufgelagert sind, wobei der sie vorher verbindende Stab als solcher fortfallen kann, da er schon durch den Unterbau ersetzt ist. An dem vorkragenden Ende ist eine in sonst beliebiger Richtung gehende, aber in der Ebene des Stabverbandes liegende Last A angebracht; man soll die dadurch hervorgebrachten Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Der am linken Auflagerknotenpunkte übertragene Auflagerdruck C kann, da von dort nur ein Stab ausgeht, nur in dessen Richtung fallen. Man verlängert diese Richtungslinie bis zum Schnittpunkte mit der Richtungslinie der Last und zieht von da eine Verbindungslinie zum rechten Auflagerpunkte. Dadurch erhält man, wie schon bei Aufg. 3, die Richtung des Auflagerdruckes B . (Der Schnittpunkt der drei Richtungslinien ist, um Raum zu sparen, auf der Zeichnung nicht mehr enthalten.) Dann beginnt man den Kräfteplan mit dem Kräftecke ABC der drei äusseren Kräfte. Von da aus kann er in derselben Weise weiter gezeichnet werden, wie im vorigen Beispiele.

Wenn A in lothrechter Richtung geht, können B und C , die dann parallel zu A werden, nicht mehr durch das Kräftedreieck ABC ermittelt werden. Man berechnet sie dann am einfachsten mit Hülfe des Momentensatzes. Im Uebrigen wird aber dadurch an der Construction des Kräfteplans nichts geändert, denn dass die drei Seiten des Dreiecks ABC dann in eine Gerade fallen, hindert nicht, die Zeichnung, sobald nur die drei Eckpunkte des Dreiecks aufgetragen sind, in derselben Weise weiter zu führen, wie vorher.

Schliesslich möge noch darauf hingewiesen werden, dass bei einem Krane ausser den Stabspannungen auch noch Seilspannungen vorkommen. Von dem Knotenpunkte, an dem die Last A angebracht ist, möge etwa ein Seil oder eine Kette längs des Stabes gc und von dessen Endpunkt über eine Leitrolle längs der Stäbe df und eb herabgeführt werden. Die Seilspannungen sind aus der Berechnung der Windevorrichtung jedenfalls bekannt. Man bedenke dann, dass die durch den Kräfteplan ermittelten Spannungen die

algebraische Summe aus Seilspannung und Stabspannung angeben. Geht also das Seil neben einem gezogenen Stabe wie gc entlang,

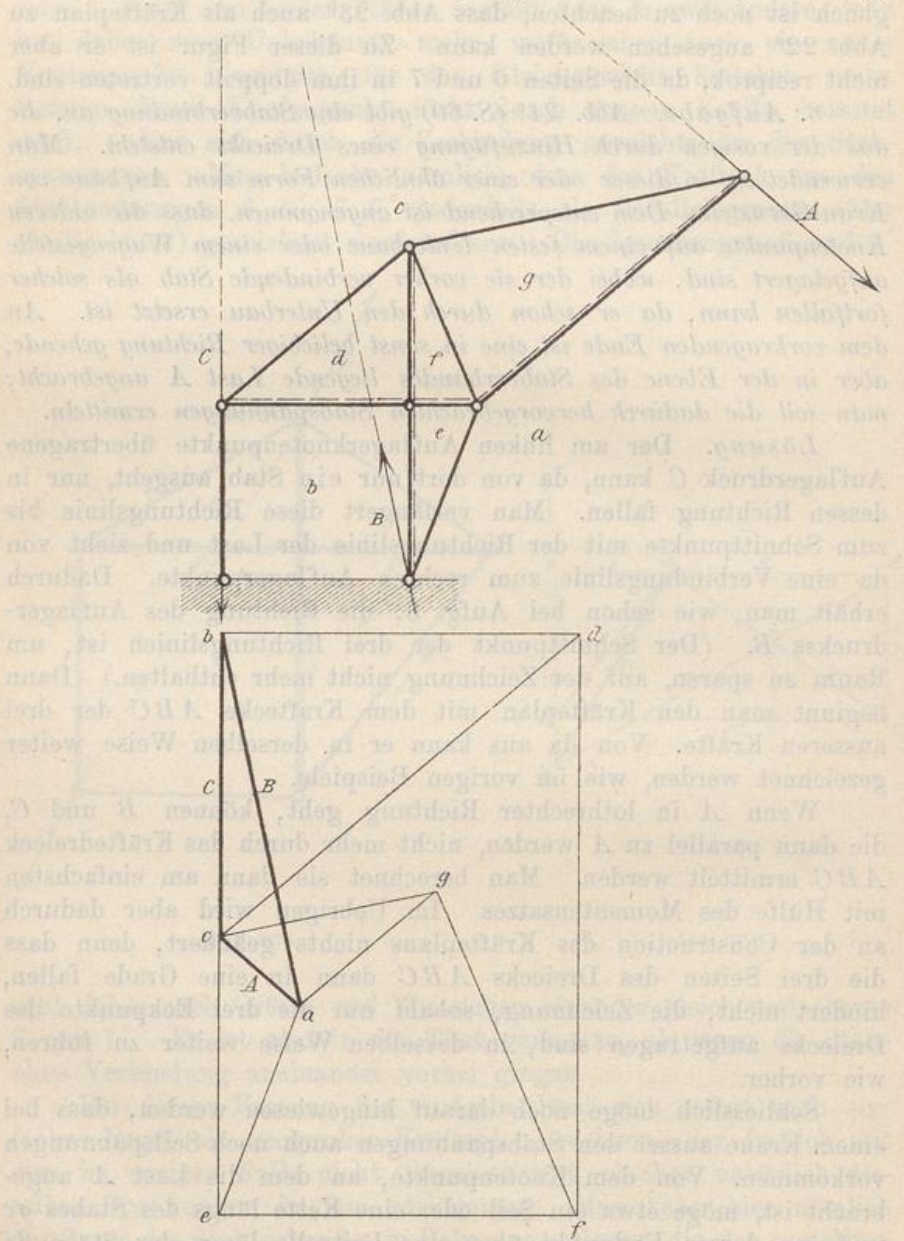


Abb. 24a und 24b.

so bewirkt die Seilspannung eine ihr gleiche Entlastung des Stabes, während die Spannung eines gedrückten Stabes, wie df oder be

um diesen Betrag vergrößert wird. — Anstatt dessen kann man sich natürlich auch das Seil ganz entfernt denken und dafür die auf die Rollen von ihm übertragenen Kräfte als Lasten am Stabverbande anbringen. Die vorher angestellte Ueberlegung führt aber gewöhnlich schneller zum Ziele.

7. Aufgabe. Man soll für den in Abb. 25^a dargestellten Stabverband, an dem sich die äusseren Kräfte P_1, P_2, P_3 im Gleichgewichte halten, den Kräfteplan construiren.

Lösung. Hier ist wieder eine „schlichte“ Zerlegung der Figur in Polygone möglich, d. h. eine Zerlegung in Polygone, die nebeneinander liegen, ohne sich zu überdecken. Daher kann auch ein reciproker

Kräfteplan ohne mehr Schwierigkeit als ein anderer gezeichnet werden. Eine Schwierigkeit besteht jedoch für die Construction des Kräfteplans, ohne Rücksicht auf dessen besondere Anordnung. An jedem Knotenpunkte greifen nämlich mindestens drei Stabspannungen an; man kann daher den Kräfteplan nicht in der gewöhnlichen Weise beginnen. Auch wenn man den Kräfteplan nicht vom mechanischen Gesichtspunkte aus betrachtet, sondern ihn als reciproke Figur rein geometrisch auf-

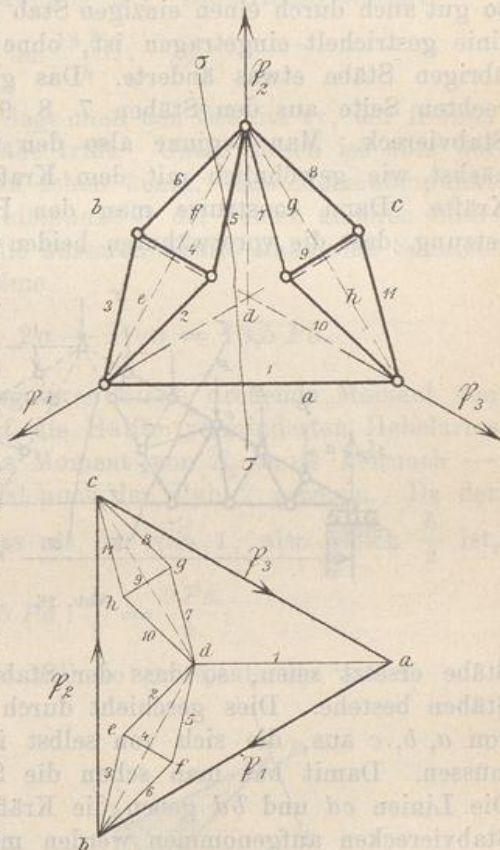


Abb. 25 a und 25 b.

fasst, bleibt die Schwierigkeit bestehen, da keins der Stabpolygone an zwei der zu den äusseren Kräften gehörigen Polygonzüge a, b, c angrenzt. Der zugehörige Punkt des Kräfteplans kann daher nicht als Schnitt von zwei Parallelen aufgefunden werden.

Dagegen kann die Ritter'sche Methode ohne weiteres angewendet werden, da sich ein Schnitt $\sigma\sigma$ legen lässt, der nur drei, nicht durch denselben Punkt gehende Stäbe trifft. Hat man auf diese Weise die Spannung des unteren horizontalen Stabes 1 ge-

funden, so steht der weiteren Construction des Kräfteplans auf dem gewöhnlichen Wege kein Hinderniss mehr im Wege.

Anstatt dessen führt hier auch eine andere Ueberlegung sehr einfach zum Ziele. Man bedenke nämlich, dass die Stäbe 2, 3, 4, 5, 6 für sich genommen eine unverschiebliche Figur bilden, die im ganzen Verbande nur die Aufgabe hat, die Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2 mit einander zu verbinden. Dies könnte eben so gut auch durch einen einzigen Stab geschehen, dessen Richtungslinie gestrichelt eingetragen ist, ohne dass sich dadurch für die übrigen Stäbe etwas änderte. Das gleiche gilt für das auf der rechten Seite aus den Stäben 7, 8, 9, 10, 11 zusammengestellte Stabviereck. Man beginne also den Kräfteplan in Abb. 25^b zunächst wie gewöhnlich mit dem Kräftecke abc für die äusseren Kräfte. Dann construire man den Punkt d unter der Voraussetzung, dass die vorerwähnten beiden Stabvierecke durch einfache

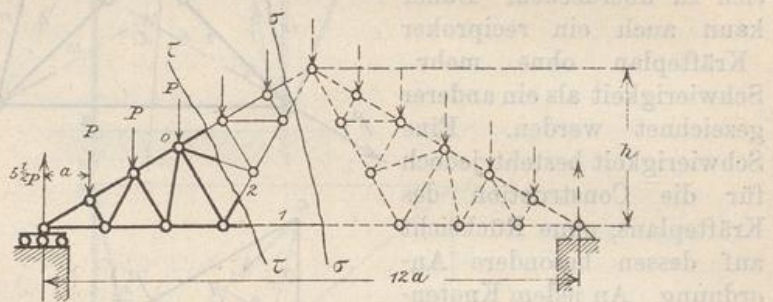


Abb. 26.

Stäbe ersetzt seien, so dass der Stabverband nur noch aus drei Stäben bestehe. Dies geschieht durch Ziehen der drei Parallelen von a, b, c aus, die sich von selbst in einem Punkte schneiden müssen. Damit hat man schon die Spannung ad des Stabes 1. Die Linien cd und bd geben die Kräfte an, die von den beiden Stabvierecken aufgenommen werden müssen. Diese können dann genau wieder so in die einzelnen Stabspannungen zerlegt werden, wie es im gleichen Falle bei Aufgabe 1 geschehen war. — Die Stäbe 4 und 9 sind gedrückt, alle übrigen gezogen.

8. Aufgabe. Für den in Abb. 26 gezeichneten Dachbinder soll die Spannung des mit 1 bezeichneten mittelsten Stabes der Untergurtung nach der Ritter'schen Methode berechnet werden, wenn jeder Knotenpunkt des Obergurts die senkrechte Last P trägt. Nachher ebenso die Stabspannung von 2.

Lösung. Man lege den Schnitt $\sigma\sigma$; der Momentenpunkt für Stab 1 ist der Firstknotenpunkt. Der Auflagerdruck ist $5\frac{1}{2}P$,

sein Hebelarm $6a$. Die Summe der Momente der äusseren Kräfte links vom Schnitte für den Momentenpunkt ist

$$5 \frac{1}{2} P \cdot 6a - P \cdot 5a - P \cdot 4a - P \cdot 3a - P \cdot 2a - Pa = + 18 Pa.$$

Ebenso gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen muss das Moment der Stabspannung S_1 des Stabes 1 sein. Daraus folgt zunächst, dass S_1 eine Zugspannung ist. Die Grösse beträgt

$$S_1 = \frac{18 Pa}{h}.$$

Um auch S_2 zu erhalten, lege man den Schnitt $\tau\tau$, der freilich ausser 2 noch drei andere Stäbe trifft. Unter diesen ist aber der Stab 1, dessen Spannung man schon kennt. Als Momentenpunkt für Stab 2 ist daher der Schnittpunkt O der beiden anderen Stabrichtungen zu wählen. Für die äusseren Kräfte links vom Schnitte erhält man die Momentensumme

$$5 \frac{1}{2} P \cdot 3a - P \cdot 2a - P \cdot a = 13,5 Pa.$$

Dazu kommt das im negativen Sinne drehende Moment von S_1 , das für O wegen des auf die Hälfte verminderten Hebelarms nur noch $9 Pa$ beträgt. Das Moment von S_2 muss hiernach $- 4,5 Pa$ betragen. Demnach ist auch der Stab 2 gezogen. Da der Hebelarm von 2 ebenso gross als der von 1, also gleich $\frac{h}{2}$ ist, findet man

$$S_2 = 4,5 Pa : \frac{h}{2} = \frac{9 Pa}{h},$$

d. h. die Spannung von 2 ist halb so gross, als die von 1.

In der Abb. 26 sind der besseren Uebersicht wegen die links vom Schnitte $\tau\tau$ liegenden Theile stark, die links von $\sigma\sigma$ liegenden schwächer und die rechts davon liegenden gestrichelt ausgezogen.

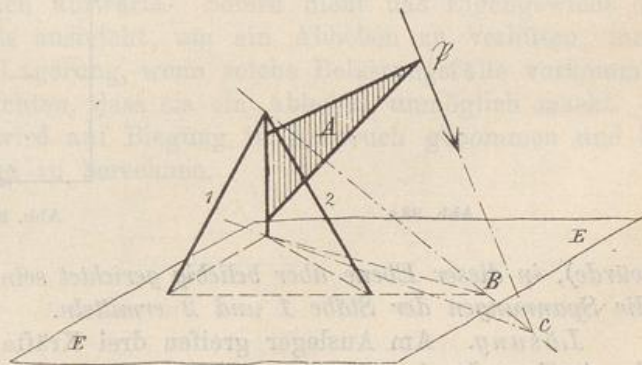


Abb. 27.

9. Aufgabe.

In Abb. 27 ist das Gerüst für einen sogenannten Derrick-Kran in axonometrischer Zeichnung angegeben. Auf der horizontalen Ebene EE

sind die Stäbe 1 und 2 und die senkrechte Kransäule befestigt. Der Ausleger A kann sich mit der Kransäule um deren senkrechte Axe drehen. Bei irgend einer Stellung des Auslegers trägt dieser an seinem Ende eine Last \mathfrak{P} , deren Richtungslinie in der Ebene von A enthalten sein muss (weil sonst eine Drehung von A eintreten

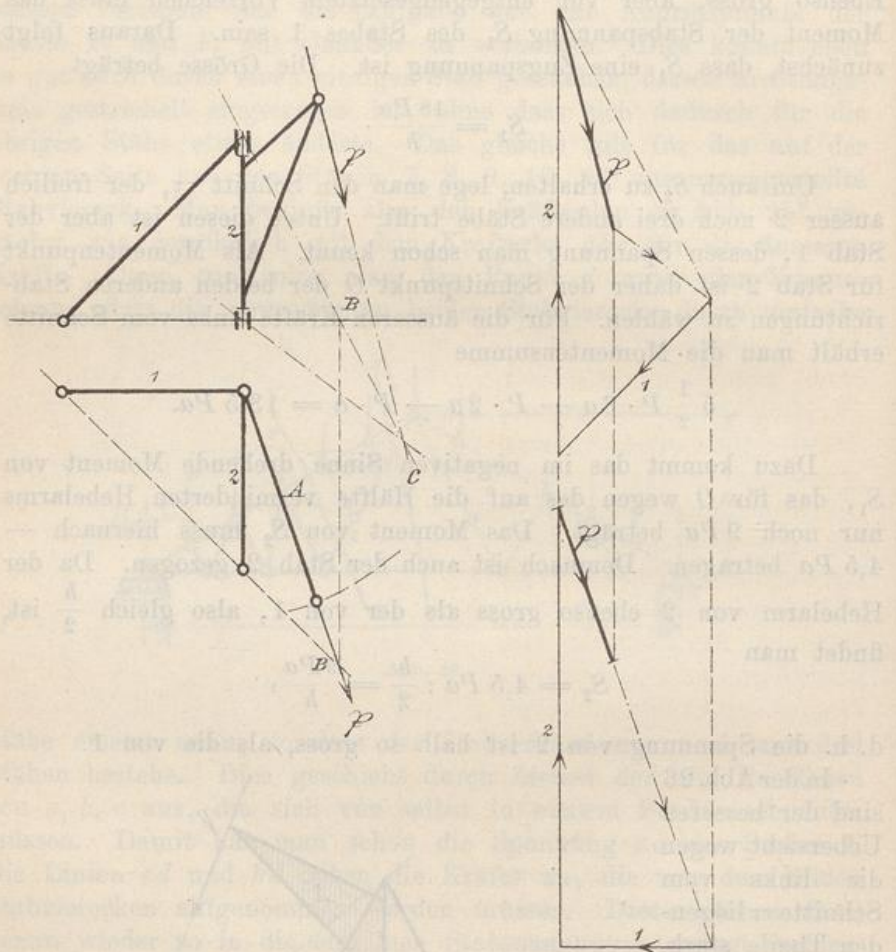


Abb. 28 a.

Abb. 28 b.

würde), in dieser Ebene aber beliebig gerichtet sein kann. Man soll die Spannungen der Stäbe 1 und 2 ermitteln.

Lösung. Am Ausleger greifen drei Kräfte an: die Last \mathfrak{P} , der Auflagerdruck am unteren Ende der Kransäule und die Resultierende der Stabspannungen 1 und 2 am oberen Ende. Damit Gleichgewicht bestehen kann, müssen sich die Richtungslinien der drei Kräfte in einem Punkte schneiden. Von \mathfrak{P} ist die Richtungs-

linie bereits gegeben. Die Resultierende der Stabspannungen 1 und 2 muss einerseits in die durch 1 und 2 gelegte Ebene, andererseits in die Ebene A fallen; sie liegt daher in der Schnittlinie beider Ebenen. Diese erhält man als Verbindungslinie des Schnittpunktes B der Horizontalspuren beider Ebenen mit dem oberen Endpunkte der Kransäule. Der Schnitt dieser Linie mit der Richtung von \mathfrak{P} liefert den Punkt C , in dem sich die drei Kraftrichtungslinien treffen und die Verbindungslinie von C mit dem unteren Endpunkte der Kransäule gibt daher die Richtung des Auflagerdrucks an diesem Endpunkte an.

Nach diesen Vorbemerkungen kann die Kräftezerlegung leicht ausgeführt werden. In Abb. 28^a ist das Krangerüst in Grundriss und Aufriss gezeichnet und Punkt C im Aufrisse construiert. Dann wird im Kräfteplane, Abb. 28^b, zuerst das Kräftedreieck aus P , dem Auflagerdrucke und der Resultierenden aus 1 und 2 gezeichnet, das sich im Grundrisse auf eine Gerade projicirt. Es bleibt nur noch übrig, die Resultierende aus 1 und 2 nach diesen beiden Richtungslinien zu zerlegen. Nachträglich kann man von dieser Resultierenden ganz absehen und den Kräfteplan als ein Kräfteviereck für den Auflagerdruck, die Last \mathfrak{P} und die beiden Stabspannungen ansehen, die sämtlich am Ausleger angreifen. Dem entsprechend sind die Pfeile in Abb. 28^b eingetragen. Stab 1 ist gezogen und Stab 2 gedrückt. Die Grösse der Stabspannungen ergibt sich durch Ermittlung der wahren Längen der Krafteckseiten 1 und 2.

Man bemerkt übrigens, dass der Auflagerdruck bei der angenommenen Auslegerstellung und Belastung an der Kransäule schief nach abwärts gerichtet ist. Die Kransäule drückt daher das Lager schief nach aufwärts. Sofern nicht das Eigengewicht der Kransäule bereits ausreicht, um ein Abheben zu verhüten, muss man daher die Lagerung, wenn solche Belastungsfälle vorkommen können, so einrichten, dass sie ein Abheben unmöglich macht. — Die Kransäule wird auf Biegung in Anspruch genommen und ist dem entsprechend zu berechnen.