



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 107. Geodätischer Excess

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

$$\text{Im ganzen: } \lambda = 36049,93731'' - 0,817\,795'' = 36049,11952'' \quad (47)$$

Die beiden reduzierten Breiten sind:

$$\psi_1 = 44^\circ 54' 14,67493'' \quad \psi_2 = 54^\circ 54' 35,31462'' \quad (48)$$

Diese ψ_1 und ψ_2 nebst λ von (47) bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Auflösung giebt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 29^\circ 3' 15,45983'' & \alpha_2 &= 36^\circ 45' 7,40055'' \\ \sigma_1 &= 11^\circ 52' 41,20996'' & &= 42761,20996'' \end{aligned} \quad (49)$$

Zur Reduktion von σ auf s hat man die Formel (30) mit den Coëfficienten (45); das Hauptglied wird 6.120 6663 024 und die 5 Korrektionsglieder:

$$- 5,994 \quad , \quad + 17,961 \quad , \quad + 0,010 \quad , \quad - 0,206 \quad , \quad 0,007$$

Im ganzen:

$$\log s = 6.120\,6663\,024 + 11,778 = 6.120\,6674\,802 \quad s = 1\,320\,284,365^m \quad (50)$$

Die Werte (49) und (50) stellen die Lösung der Aufgabe vor, welche mit (40), (41), (45) des vorigen § 105. S. 530 verglichen, genügend stimmen.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1883“ S. 81–82 haben wir eine Coëfficienten-Tabelle für die Formeln (28) und (29) gegeben, welche nicht dieselbe ist wie die neu berechnete Tabelle Seite [62]–[63] unseres Anhangs. Nur die Coëfficienten (σ_1) , (σ_2) , (λ_1) , (λ_2) sind mit den früheren [1], [3], (1), (3) identisch, abgesehen von einer kleinen Differenz in den letzten Stellen von $\log(\sigma_1)$ und $\log(\lambda_1)$ daher rührend, dass früher $\frac{1}{r^2} = 1 - 2\eta^2$ gesetzt war, was Vernachlässigung von η^4 enthält, welche in den neuen Coëfficienten (σ_1) , (σ_2) , (λ_1) , (λ_2) nicht mehr vorkommt. Ausserdem besteht der Unterschied, dass Funktionen $\sin^2 \varphi$, $\cos^2 \varphi$, $\cos^4 \varphi$, welche früher in die Coëfficienten gezogen waren, nun in der Formel bleiben, damit die Coëfficienten-Tafel kleinere Differenzen bekommt. Nur der in η^2 enthaltene Faktor $\cos^2 \varphi$ ist in die Coëfficienten gezogen, weil der Modul $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ sich analytisch gut findet, und auch formell den Faktoren r^2 gegenüber in den Coëfficienten zum Gleichgewicht beiträgt.

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung des im vorstehenden § 106. behandelten Verfahren können wir die Mecklenburgische Diagonale citieren, welche schon unter unseren Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben, in „Zeitschr. f. Verm. 1896“ S. 240–248 berechnet wurde.

Kapitel X.

Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

Vorbemerkung. Dieses Kapitel enthält im Wesentlichen den Inhalt der Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauss, Göttingae 1828 (societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827) und in „Carl Friedrich Gauss Werke“, IV. Band, Göttingen 1873, S. 217–258. In deutscher Übersetzung herausgegeben: „Allgemeine Flächentheorie u. s. w. von A. Wangerin, Leipzig, Engelmann 1889.“

Wir haben versucht, die analytischen Entwicklungen des ersten Theiles dieser klassischen Abhandlung durch unsere geometrischen Betrachtungen von § 107. und 108. zu ersetzen.

§. 107. Geodätischer Excess.

Dem sphärischen Excess, den wir in § 40. kennen gelernt haben, mit der Formel (2a) S. 231

$$\varepsilon = \frac{E}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F}{r^2} \varrho \quad \text{in Sekunden} \quad (1)$$

entspricht ein ganz analoger Satz auf irgend einer krummen Fläche, deren Haupt-Krümmungs-Halbmesser in einem Punkte M und N und deren mittlerer Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ ist, wobei ein unendlich kleines Dreieck vorausgesetzt ist, das durch geodätische Linien begrenzt, die kleine Fläche F hat.

Hiezu betrachten wir in den nachstehenden Fig. 1. und Fig. 2. ein kleines rechtwinkliges geodätisches Dreieck, dessen Katheten $CA = p$ und $CB = q$ in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen liegen, auf einer krummen Fläche, welche nach CA den Krümmungs-Halbmesser M und nach CB den Krümmungs-Halbmesser N hat.

Wir nehmen dabei die Bezeichnungen wie gewöhnlich für das Umdrehungs-Ellipsoid, und denken unter p und M die Beziehung zum Meridian, unter q und N die Beziehung rechtwinklig zum Meridian (indessen kann man die nächsten Betrachtungen auch allgemeiner führen).

Unter K_m und K_n verstehen wir die beiden Krümmungs-Mittelpunkte, so dass für einen kleinen Bogen $AC = p$ die beiden Normalen CK_m und $AK_m = M$ und entsprechend $CK_n = BK_n = N$ angenommen werden kann; damit ist auch die kleine Entfernung $K_n K_m = N - M$ bestimmt.

Wir haben hiernach wieder den Fall des früheren § 71. S. 382 und S. 384, und wir wollen von den dort auf S. 386 gefundenen Formeln einen Gebrauch machen, um den geodätischen Excess des geodätischen Dreiecks Fig. 2 mit den Katheten p und q und der Hypotenuse s zu bestimmen.

Figur 2. giebt uns drei Dreiecke, nämlich zwei sphärische und ein geodätisches.

I. Sphärisches Dreieck mit dem Halbmesser M :

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha_1 + \beta' - 180^\circ &= \varepsilon_m \\ \alpha_1 + \beta' + 90^\circ &= \varepsilon_m = \frac{pq}{2M^2} \end{aligned} \tag{2}$$

II. Sphärisches Dreieck mit dem Halbmesser N :

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha' + \beta_1 - 180^\circ &= \varepsilon_n \\ \alpha' + \beta_1 - 90^\circ &= \varepsilon_n = \frac{pq}{2N^2} \end{aligned} \tag{3}$$

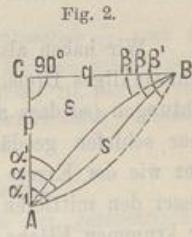
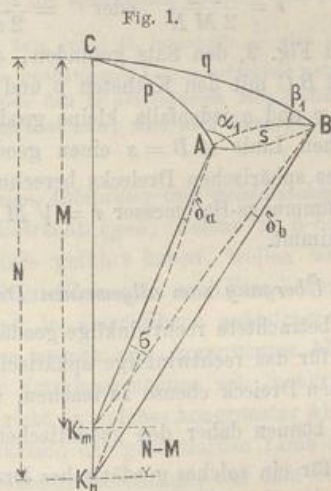
III. Geodätisches Dreieck mit der geodätischen Linie s :

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha + \beta - 180^\circ &= \varepsilon \\ \alpha + \beta - 90^\circ &= \varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

Zwischen den Winkeln dieser drei Dreiecke bestehen nach (16) S. 386 folgende Beziehungen:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3} \eta^2 \varepsilon \quad \beta - \beta_1 = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon \tag{5}$$

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon \quad \beta' - \beta = \frac{2}{3} \eta^2 \varepsilon \tag{6}$$



Dabei kann ε entweder $= \varepsilon_m$ oder $= \varepsilon_n$ nach (2) oder (3) genommen werden, denn wegen des Faktors $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ kommt es hier auf solche Unterscheidung nicht an.

Durch Vergleichung von (2), (3), (4) mit Rücksicht auf (5) und (6) findet man:

$$\varepsilon = \varepsilon_m - \eta^2 \varepsilon = \varepsilon_m (1 - \eta^2) = \frac{p q}{2 M^2} (1 - \eta^2) \quad (7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \eta^2 \varepsilon = \varepsilon_n (1 + \eta^2) = \frac{p q}{2 N^2} (1 + \eta^2) \quad (8)$$

Wenn man beachtet, dass $1 + \eta^2 = V^2 = N : M$ (nämlich wie immer nach unseren Grundformeln § 32. S. 197) und wenn man auch genähert $1 - \eta^2 = \frac{1}{1 + \eta^2}$ setzt, so geben die beiden Formeln (7) und (8) übereinstimmend:

$$\varepsilon = \frac{p q}{2 M N} \quad \text{oder} \quad = \frac{p q}{2 r^2} \quad (9)$$

Wir haben also zu Fig. 2, den Satz gefunden, dass ein kleines geodätisches, rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten p und q in den Haupt-Krümmungsrichtungen (so dass also p und q jedenfalls kleine geodätische Linien sind) und mit einer schiefen geodätischen Linie $AB = s$ einen geodätischen Excess ε giebt, der ganz wie der Excess eines sphärischen Dreiecks berechnet wird, wenn man als Halbmesser den mittleren Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ an der betreffenden Stelle der krummen Fläche annimmt.

Übergang zum allgemeinen Dreieck.

Nachdem für das betrachtete rechtwinklige geodätische Dreieck dieselbe Formel gefunden ist, wie früher für das rechtwinklige sphärische Dreieck, ist auch der Übergang zu einem allgemeinen Dreieck ebenso zu machen, wie für das sphärische Dreieck Fig. 4. S. 248, und wir können daher den geodätischen Excess bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich nun auch für ein solches geodätisches Dreieck, das sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken von der Form Fig. 2. S. 539 zusammensetzen lässt, als bewiesen annehmen.

Das ist aber noch nicht der ganz allgemeine Fall, denn jenes rechtwinklige Dreieck Fig. 2. hat die Besonderheit, dass seine Katheten p und q in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen der Fläche liegen; und wir können daher nach dem bisherigen Beweissgang den Satz nur für solche geodätische Dreiecke als bewiesen annehmen, welche eine Seite in einer Haupt-Krümmungsrichtung liegen haben.

Indessen lässt sich der Übergang von einem solchen Dreieck zu einem beliebig gestalteten und auch gegen die Haupt-Krümmungsrichtungen beliebig liegenden Dreieck vollends leicht bewerkstelligen, indem nach Fig. 3. das allgemeine Dreieck ABC in zwei Dreiecke ACD und ABD zerlegt wird, welche die Seite AD in einer Haupt-Krümmungsrichtung gemeinschaftlich haben.

Wenn ε_1 und ε_2 die Excesse dieser beiden Dreiecke ACD und ABD sind, so hat man nach Fig. 3.:

$$\varepsilon_1 = \frac{(q - e) p}{2 r^2} \quad \varepsilon_2 = \frac{(q' + e) p}{2 r^2}$$

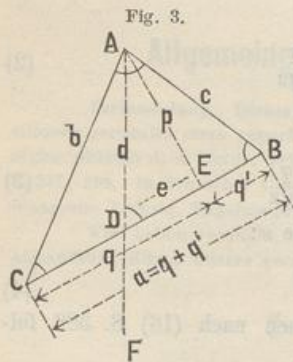


Fig. 3.

also:
$$s_1 + \varepsilon_2 = \frac{(q + q')p}{2r^2} = \frac{ap}{2r^2} = \varepsilon$$

allgemein:
$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \quad (10)$$

Es gilt also für kleine geodätische Dreiecke dieselbe Excessberechnung in erster Näherung, wie für ein sphärisches Dreieck nach Gleichung (1), wenn man nur den mittleren Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ anwendet, wobei übrigens auch noch angenommen ist, dass die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N unter sich nahe gleich sind, so dass $\frac{N}{M} = 1 + \eta^2$ und $\frac{M}{N} = 1 - \eta^2$ gesetzt werden kann, d. h. dass η^4 gegen η^2 vernachlässigt werden kann.

Durch solche einfache Betrachtungen, welche zu den Formeln (7)–(10) geführt haben, kann man nicht bloss, wie hier geschehen, die Formel für den Excess herleiten, sondern man kann auch noch nachweisen, dass innerhalb $\frac{1}{r^2}$ die sphärischen Formeln von § 44, nämlich (8)–(10) S. 246 und 247 und auch der Legendrische Satz von § 41. innerhalb $\frac{1}{r^2}$ also ausschliesslich $\frac{1}{r^4}$ auch für ein geodätisches Dreieck mit kleinen geodätischen Linien auf irgend welcher krummen Fläche ebenso gilt, wie die Excessformel. Wir haben das in der früheren 3ten Auflage dieses III. Bandes, 1890, § 93. gezeigt und durchgeführt, was aber nun, weil kein dringendes Bedürfnis dafür vorhanden ist, übergangen werden soll.

Kongruente Linien-Abbildung und geodätischer Excess.

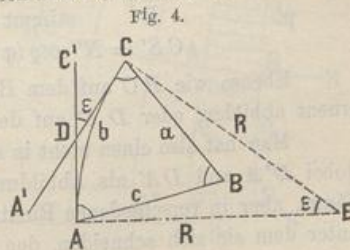
Im Anschluss an die Betrachtungen, welche in § 68. zu der geometrischen Definition der geodätischen Linie geführt haben, wollen wir irgend eine Linie auf einer krummen Fläche in einzelnen Elementen nach Streckenmass und Azimutalwinkeln aufgenommen, und entsprechend in einer Ebene aufgetragen denken. Die dadurch entstehende Linie in der Ebene nennen wir „kongruentes Abbild“ der Linie auf der krummen Fläche, und das ganze Verfahren nennen wir „kongruente Linien-Abbildung“.

Eine geodätische Linie giebt in solcher kongruenter Abbildung eine Gerade von gleicher Grösse wie die Rektifikation der geodätischen Linie (vgl. § 89. S. 474).

Wenn von einem geschlossenen Linienzuge, auf dem Umdrehungs-Ellipsoid oder auf einer anderen krummen Fläche, in dieser Weise eine kongruente ebene Abbildung gemacht wird, so wird der abgebildete ebene Zug im allgemeinen nicht schliessen, und die dabei sich zeigenden Schlussfehler stehen in Beziehung zu der Krümmung der Fläche, auf welcher der geschlossene Linienzug liegt. Nur bei einer abwickelbaren Fläche wird die kongruente ebene Abbildung eines geschlossenen Zuges im allgemeinen wieder geschlossen sein.

Die Schlusswidersprüche werden, wie bei den durch Messungsfehler erzeugten Schlussfehlern der Feldmess-Züge, theils linear, theils als Winkel sich zeigen, und der in der Winkelsumme auftretende Schluss-Widerspruch soll „geodätischer Excess“ heissen.

In Fig. 4. seien AB und BC die kongruenten ebenen Abbildungen zweier Seiten eines geodätischen Dreiecks auf einer krummen Fläche, so dass die zwei Seiten AB , BC und der Winkel bei B kongruent abgebildet sind; will man aber die Abbildung auch für die dritte Seite CA fortsetzen, so bekommt man entweder CA' oder AC' , welche beide das Dreieck ABC nicht schliessen, sondern sich in D schneiden und daselbst den geodätischen Excess ε zur Anschauung bringen. Man kann den Excess ε auch durch die Krümmung einer



Linie AbC veranschaulichen, welche bei A und C die Geraden AC' und CA' berührt, denn die Gesamtkrümmung dieser Kurve AbC ist eben jener Winkel ε und wenn die Kurve AbC ein Kreisbogen ist, wie in Fig. 4. mit dem Mittelpunkt E , so erscheint der Excess ε auch als Centriwinkel dieses Bogens, und es besteht zwischen der Bogenlänge b , dem Halbmesser R und dem Excess ε die Gleichung $b = R\varepsilon$.

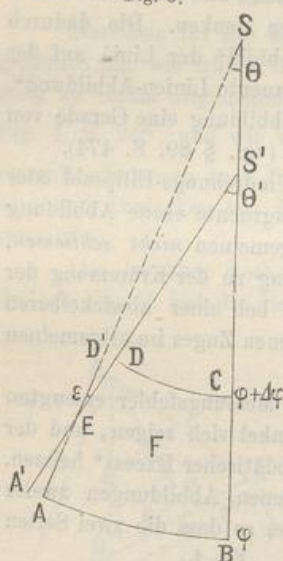
Die in den früheren §§ 80. und 81. betrachteten Kegelprojektionen geben ein gutes Beispiel für unseren Fall:

Ein Parallelkreisbogen des Umdrehungs-Ellipsoids giebt eine kongruente ebene Abbildung, welche sich durch Kegelabwicklung leicht darstellen lässt, wie aus Fig. 1. S. 428 mit den zugehörigen Gleichungen zu ersehen ist. In der Breite φ ist der Kegel-Halbmesser $= N \cotg \varphi$, und für den Längenunterschied l ist die Meridian-Konvergenz $= l \sin \varphi$; ein Parallelkreisbogen in der Breite φ mit dem Längenunterschied l giebt daher in kongruenter ebener Abbildung einen Kreisbogen vom Halbmesser $N \cotg \varphi$ mit dem Centriwinkel $l \sin \varphi$; die Bogenlänge wird also $= N \cotg \varphi l \sin \varphi = N l \cos \varphi$, übereinstimmend mit der Länge des Parallelkreisbogens selbst.

Die Kegelabwicklung giebt eine geodätisch kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens, nach Krümmung und Entfernung. Gleiches ist bei jeder abwickelbaren Fläche der Fall.

Im Anschluss hieran betrachten wir ein durch zwei Meridiane und zwei Parallelkreise begrenztes Trapez des Umdrehungs-Ellipsoids (oder einer anderen Umdrehungsfläche) und suchen den Excess des Vierecks zu bestimmen.

Fig. 5.



In Fig. 5. sei $ABCD$ die kongruente Linien-Abbildung von drei Seiten eines solchen Trapezes, AB entspricht dem Parallelkreisbogen auf der Breite φ mit der Länge l , es ist daher in kongruenter Linien-Abbildung AB ein Kreisbogen vom Halbmesser $AS = BS = N \cotg \varphi$ und dem Centriwinkel Θ als Meridian-Konvergenz $= l \sin \varphi$, also:

$$BS = N \cotg \varphi \quad \Theta = l \sin \varphi \quad (11)$$

Eine Nachbarbreite sei $\varphi + d\varphi$, wobei $d\varphi$ als Differential genommen dasselbe sei, was in Fig. 5 mit $\Delta\varphi$ bezeichnet ist; dann giebt der Meridianbogen zwischen den Breiten φ und $\varphi + \Delta\varphi$ die kongruente geradlinige Abbildung:

$$BC = M d\varphi \quad (12)$$

Die dritte Seite CD ist kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens in der Breite $\varphi + d\varphi$, mit dem Längenunterschied l , d. h. es ist CD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt S' auf BS und dessen Centriwinkel Θ' bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$CS' = N' \cotg (\varphi + d\varphi) \quad , \quad \Theta' = l \sin (\varphi + d\varphi) \quad (13)$$

Ebenso wie BC auf dem Halbmesser BS , kann man auch AD' auf AS kongruent abbilden, oder DA' auf dem Halbmesser $S'D$.

Man hat also einen nicht in sich selbst zurückkehrenden Linienzug $D'ABCD A'$, wobei $D'A$ und DA' als Abbildungen desselben Meridianbogens, beide in richtiger Länge, aber in verschiedenen Richtungen dargestellt sind, so dass der kleine Winkel ε , unter dem sie sich schneiden, den Winkelschlussfehler der Abbildung oder den geo-

dätischen Excess des Trapezes auf der krummen Fläche darstellt. Um diesen Winkel ε näher zu bestimmen, haben wir aus Fig. 5.:

$$\varepsilon = \Theta' - \Theta$$

$$\text{oder wegen (13): } \varepsilon = l(\sin(\varphi + d\varphi) - \sin \varphi) = l \cos \varphi d\varphi \quad (14)$$

Da der Parallelbogen $AB = N l \cos \varphi$ ist, kann für die Fläche des Trapezes nach (12) angegeben werden:

$$F = BC.AB \quad \text{also} \quad F = MN l \cos \varphi d\varphi \quad (15)$$

Mit Einführung des mittleren Krümmungs-Halbmessers r also mit $r^2 = MN$ hat man hieraus, mit (14):

$$l \cos \varphi d\varphi = \frac{F}{r^2} = \varepsilon \quad (16)$$

Der Längenunterschied l kann hiebei beliebig gross sein; zur weiteren Anwendung wollen wir aber auch l unendlich klein annehmen, und damit den Satz aussprechen, dass der Excess jedes unendlich kleinen Trapezes von der Form Fig. 5. sich nach der Formel (16) aus F und r^2 berechnen lässt. Endlich da jede andere unendlich kleine Fläche als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Trapezen betrachtet werden darf, ist es nach dem Ergebnis unserer Betrachtung richtig, den Excess einer irgendwie begrenzten kleinen Fläche F des Umdrehungs-Ellipsoids, oder einer anderen Umdrehungsfläche nach der Formel (16) aus F und r^2 zu berechnen.

Wir haben also für den Excess eines Trapezes einer Umdrehungsfläche dieselbe Berechnung wie für den Excess eines kleinen geodätischen Dreiecks nach (10) S. 541, und wir können nun den weiteren Schluss bilden, dass für irgend einen durch kleine Dimensionen begrenzten Teil einer krummen Fläche, der geodätische Excess durch die Formel (10) oder (16) angegeben wird.

§108. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten.

Ganz analog den Coordinaten-Systemen, welche wir in der Ebene mit geraden Linien und auf der Kugel mit grössten Kreisen benützen, kann man auch auf irgend einer Fläche mit geodätischen Linien Coordinaten-Systeme anordnen.

In Fig. 1. sei OG eine geodätische Linie, auf welcher ein Punkt P durch das Mass $OP = p$ bestimmt ist, und ebenso auch andere Punkte P', P'' u. s. w. durch ihre auf der geodätischen Linie OG gemessenen Abstände.

In den Punkten P, P', P'' u. s. w. werden geodätische Linien $PQ, P'Q', P''Q''$ u. s. w. rechtwinklig zu OG gezogen, und auf den Linien PQ werden gleiche Masse q abgetragen, so dass eine geodätische Parallele HH' entsteht, und eine zweite Parallele KK' im Abstände $q + dq$ von der Anfangslinie OG .

Solcher Linien der zwei Systeme PQ und HH' können wir ganze Scharen gezogen denken; dieselben schneiden sich gegenseitig rechtwinklig (geodätische Parallele § 70. S. 381) und bilden ein System von Vierecken, deren eines $ABCD$ in Fig. 1. besonders hervorgehoben ist.

Die ganze Anordnung der Linien in Fig. 1. können wir ein rechtwinkliges geo-

Fig. 1.

