



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 99. Allgemeine Beziehung zwischen dem Vergrößerungs-Verhältnis und dem Krümmungs-Differential der Abbildung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Dieses allgemeine k wird auf den Anfangspunkt und auf den Endpunkt angewendet mit:

$$k_1 = \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q_1^2 \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q_2^2 \quad (27)$$

Damit gehen die Formeln (25) und (26) in diese Formen über:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \psi_1 = \frac{2 k_1 \sin \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (28)$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \psi_2 = \frac{k_1 \sin \alpha_1 + 2 k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (29)$$

Zur Anwendung in Zahlen muss man die Funktion k nach (26) auf bestimmtes Mass einrichten. Nehmen wir wie bisher q in Graden und dann die kleinen Winkel ψ in Sekunden, so hat man zu setzen:

$$k = \frac{\rho''}{\rho^{\circ 2}} \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q^2 = 20 \pi \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q^2$$

mit den Konstanten von § 98. wird dieses ausgerechnet:

$$k = 0,203\ 259\ 386\ q^2 \quad (\log = 1.798\ 1798.684)$$

Die hiernach berechneten Werte k sind nur erste Näherungen, welche von den genaueren Werten k der Gauss'schen Tafel ähnliche Abweichungen zeigen, wie zwischen den ersten Näherungen und den genauen Werten von $\log m$, welche wir bei (14) § 97. S. 499 zusammengestellt haben.

§ 99. Allgemeine Beziehung zwischen dem Vergrößerungs-Verhältnis m und dem Krümmungs-Differential der Abbildung.

Im vorigen § 98. haben wir das Krümmungs-Differential δ des Abbildes einer geodätischen Linie durch eine Differentialbetrachtung in Fig. 2. S. 501 aus den besonderen Eigenschaften unseres Abbildungsfalles hergeleitet, und es wird wohl immer möglich sein, die besondere Art einer konformen Abbildung zu Rat zu ziehen, um jenes Krümmungs-Differential zu erlangen.

So haben wir z. B. auch in § 50. mit Fig. 2. S. 283 und in § 85. mit Fig. 2. S. 453, und auch noch bei der Gauss'schen konformen ebenen Abbildung in § 88. S. 472 verfahren.

Es giebt aber eine ganz allgemeine Beziehung zwischen dem Differential dm und dem Krümmungs-Differential $\delta = \frac{ds}{R}$, mit Hilfe deren man, sobald m , das man ja jedenfalls haben muss, entwickelt ist, sofort auch δ finden kann.

Die allgemeine Theorie zur Bestimmung von δ aus m ist von Gauss in Art. 12.—13. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie und in §. 14. von Schreiber, Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866, gegeben, wobei beidemal die geodätische Linie nach den Regeln der Variationsrechnung als kürzeste Linie aufgefasst wird.

Eine mehr geometrisch anschauliche Entwicklung und Darstellung dieser Bahn hat Professor Schols in Delft gegeben in der Abhandlung: Annales de l'école polytechnique de Delft. 1^{re} livraison. Leide, E. J. Brill 1884. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par Ch. M. Schols.

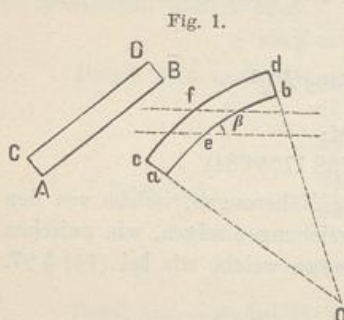
In § 10. dieses Werkes wird mit beistehender Fig. 1. entwickelt:

Das Rechteck $ABCD$ des Urbildes sei aus unendlich kleinen geodätischen Linien gebildet, und werde konform abgebildet in dem krummlinigen Viereck $abcd$. Durch die Mitten e und f der Seiten ab und cd werden Linien gezogen, in welchen das Vergrößerungs-Verhältnis konstant ist.

(Diese Linien für konstantes Vergrößerungs-Verhältnis m sind in Fig. 1. punktiert gezogen, wobei auch bemerkt sei, dass e die Mitte von ab sein sollte, was in dem Holzschnitt etwas verfehlt dargestellt ist).

Wenn dz der Parallelabstand der beiden punktierten Linien und β deren Winkel mit ab ist, so haben wir:

$$\alpha c = b d = e f \frac{dz}{\cos \beta} \quad (1)$$



Die kurzen Linien ca und db werden verlängert bis zu ihrem Schnitte o , so dass oa der Krümmungs-Halbmesser der Kurve ab ist, woraus folgt:

$$\frac{oc}{oa} = \frac{oa + ac}{oa} = \frac{cd}{ab} \quad (2)$$

also aus (1) und (2) zusammen:

$$\frac{oa + \frac{dz}{\cos \beta}}{oa} = 1 + \frac{1}{oa} \frac{dz}{\cos \beta} = \frac{cd}{ab} \quad (3)$$

Nun ist zu beachten, dass Fig. 1 eine Differentialfigur sein soll, dass also cd und ab unendlich klein sind, dass also längs cd und ab das Vergrößerungs-Verhältnis m als konstant gilt, und zwar sei:

$$m = \frac{ab}{AB} \quad \text{und} \quad m + dm = \frac{cd}{CD} = \frac{cd}{AB} \quad (4)$$

$$\frac{cd}{ab} = \frac{m + dm}{m} = 1 + \frac{dm}{m}$$

Man hat also aus (3) und (4):

$$1 + \frac{1}{oa} \frac{dz}{\cos \beta} = 1 + \frac{dm}{m}$$

Bezeichnen wir den Krümmungs-Halbmesser oa mit R oder die Krümmung mit $1:R$, so haben wir also:

$$\text{Krümmung} \quad \frac{1}{R} = \frac{dm}{m dz} \cos \beta \quad (5)$$

oder wenn mit $\log m$ der natürliche Logarithmus von m bezeichnet wird:

$$\text{Krümmung} \quad \frac{1}{R} = \frac{d \log m}{dz} \cos \beta \quad (6)$$

Als erste Anwendung dieser allgemeinen Formel wollen wir den besonderen Fall von § 50. S. 281 nehmen mit:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad \text{oder} \quad \log m = \frac{y^2}{2r^2} \quad (7)$$

Die Richtung der z ist hier mit der Richtung y übereinstimmend, weil die Linien für konstantes m nach Fig. 3. S. 279 parallel der x -Axe gehen, und β von (6) ist

der Richtungswinkel t_1 von Fig. 6. S. 283, es giebt also die allgemeine Gleichung (6) in unserem besonderen Falle:

$$\text{Krümmung} \quad \frac{1}{R} = \frac{y^2}{d^2 2r^2} \cos t_1 = \frac{y}{r^2} \cos t_1 \quad (8)$$

Dieses (12) stimmt mit (28) Fig. 50. S. 283, wenn man das auf der folgenden Seite 284 oben stehende $\frac{dx}{d\xi} = \cos t_1$ berücksichtigt, und auch das Vorzeichen — entsprechend der Lage des Coordinatensystems einsetzt.

Nach dieser ersten Anwendung auf den einfachen Fall von § 50. wollen wir auch die Anwendung der allgemeinen Formel (6) auf unseren Fall der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel vornehmen.

Dabei ist es zuerst nötig, die Bedeutung des Winkels β aufzusuchen, d. h. des Winkels, welchen eine abzubildende geodätische Linie mit den Linien konstanter Vergrößerung m bildet, und da in unserem Falle die Vergrößerung m nur von der geographischen Breite abhängt, ist das β der allgemeinen Formel (6) entsprechend $90^\circ - \alpha$, wenn α das von der Meridianrichtung an gezählte Azimut ist. Setzen wir ausserdem die Krümmung $1 : R = -\frac{d^2 y}{d x^2}$ in dem Sinne von Fig. 3. und Fig. 4. § 98. S. 502 und 503, so haben wir aus (6) zunächst:

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d \log m}{d z} \sin \alpha \quad \text{oder} \quad = \frac{d \log m}{d z} \sin \beta \quad (9)$$

wobei die Azimute α und β von Fig. 4. § 98. S. 503 hinreichend als gleich angenommen werden können. Weiter haben wir von (9) und (10) § 97. S. 498:

$$\log m = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} \text{tang } P p^3 \quad \text{oder} \quad = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} \text{tang } P q^3 \quad (10)$$

Das Differential $d z$, welches in der allgemeinen Formel (6) vorkommt, ist in der Meridianrichtung zu suchen, d. h. es ist $d z = A d q$, wobei nach (24) S. 197 der mittlere Krümmungs-Halbmesser des Ellipsoids, welcher als Kugelabbildungs-Halbmesser dient, ist:

$$A = \frac{c}{V^3} \quad \text{oder auch} \quad A = \frac{N}{V}$$

weshalb man nun hat:

$$\begin{aligned} \frac{d \log m}{d z} &= \frac{d \log m}{d q} \frac{d q}{d z} = -\frac{2 \eta^2}{V} q^2 \text{tang } P \frac{d q}{d z} \\ \frac{d \log m}{d z} &= -\frac{2 \eta^2 q^2}{V A} \text{tang } P = -\frac{2 \eta^2 q^2}{V^2 A} \text{tang } Q \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei ist $\text{tang } Q = V \text{tang } P$ gesetzt nach (17a) § 94. S. 489.

Aus (6) und (7) hat man also jetzt:

$$-\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{2 \eta^2 q^2}{V^2 A} \text{tang } Q \sin \beta \quad (12)$$

Dieses (8) stimmt mit dem früheren (14) § 98. S. 503, womit also eine zweite Herleitung des Krümmungs-Differentials gegeben ist, aus welchem die Azimut-Reduktionen von § 98. sich ergeben.