



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 98. Azimut-Reduktion

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Da der Kugelhalbmesser = A ist, haben wir die Breiten-Differenz $q - q_1$ als eine Reihe nach Potenzen von x mit dem Ausgangs-Azimut β_1 , d. h. wir können dazu die früheren allgemeinen Reihenentwicklungen von § 64. benutzen, d. h. wir haben

von (27) S. 359 mit $u = \frac{x}{A} \cos \beta_1$ und mit $v = \frac{x}{A} \sin \beta_1$:

$$\text{Breitendifferenz} \quad q - q_1 = \frac{x}{A} \cos \beta_1 - \frac{x^2}{2A^2} \sin^2 \beta_1 \operatorname{tang}(Q + q_0)$$

Es genügt für das Folgende zu wissen, dass dieses eine quadratische Funktion von x ist, und dass damit auch $\frac{1}{m}$ nach (16) sich in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lassen wird, ganz ebenso wie bei einer früheren ähnlichen Betrachtung von § 85. sich der Ausdruck $\frac{1}{m}$ als eine Potenzreihe $\alpha + \beta l + \gamma l^2 + \dots$ auf S. 456. oben darstellen liess.

Das genügt auch, um die Beziehung zwischen einer auf dem Ellipsoid liegenden geodätischen Linie S und ihrem Abbilde s auf der Kugel durch eine Beziehung darzustellen, welche der früheren (31) § 85. S. 457 oder auch (16) § 50. S. 282 entsprechend, in erster Näherung so lautet:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (17)$$

wobei m_1 das Vergrößerungs-Verhältnis am Anfang, m_0 in der Mitte und m_2 am Ende bedeutet.

Wenn die verschiedenen m nicht sehr verschieden sind, so kann man noch mehr genähert rechnen, und z. B. logarithmisch kurz so nehmen:

$$\log s - \log S = \frac{\log m_1 + \log m_2}{2} \quad (18)$$

Das ist auch dasselbe, wie wenn man schreibt:

$$\frac{s}{S} = \sqrt{m_1 m_2} \quad (19)$$

Dazu sei auch nochmals bemerkt, dass S die geodätische Linie auf dem Ellipsoid und s die entsprechende Linie auf der konformen Kugel vom Halbmesser A ist.

§ 98. Azimut-Reduktion.

Wenn zwei Punkte des Ellipsoids auf die Kugel konform abgebildet sind, so kann man auch die Verbindungslinien beider Punkte in Betracht ziehen, und zwar denken wir uns auf dem Ellipsoid beide Punkte durch eine geodätische Linie und auf der Kugel durch einen Grosskreisbogen verbunden.

Man darf aber nicht annehmen, dass nun der Grosskreisbogen schlechthin die Abbildung der geodätischen Linie sei; das ist ebensowenig der Fall, als dass bei der ebenen konformen Abbildung von § 50. die Gerade in der Ebene als Abbildung des Grosskreisbogens genommen werden dürfte, und wir werden eine ähnliche Betrachtung wie bei Fig. 5. S. 281 oder Fig. 2. S. 453 nun auch für die Kugelabbildung anzustellen haben.

In nebenstehender Fig. 1., welche sich auf die Kugel bezieht, betrachten wir zwei von dem Ellipsoid herübergetragene Punkte mit den Kugelbreiten u und u' und dem Längen-Unterschied αl . Der mit K bezeichnete Verbindungsbogen sei grösster Kreisbogen der Kugel, und ausserdem haben wir eine Kurve G gezogen, welche das konforme Kugel-Abbild der geodätischen Linie des Ellipsoids ist.

Eine geodätische Linie des Ellipsoids bildet sich, wie schon zu Anfang bemerkt wurde, im allgemeinen nicht als Grosskreisbogen der Kugel ab, und es handelt sich nun darum, die Azimet-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta' - \alpha'$ zwischen dem Abbild G der geodätischen Linie und dem Grosskreisbogen K zu bestimmen.

Nach dem Prinzip der Konformität sind hiebei die Azimute α und α' , welche das Abbild der geodätischen Linie auf der Kugel zeigt, gleich den Azimuten α und α' der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid, so dass die Azimet-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\alpha' - \beta'$ der sphärischen Fig. 1. das sind, was wir bestimmen müssen.

Unsere nächste Aufgabe wird sein, das Krümmungs-Differential der Linie G relativ gegen K (Fig. 1.) zu bestimmen, und dafür haben wir mit Fig. 2. eine Differential-Figur zu Fig. 1. besonders herausgezeichnet.

Wir betrachten mit Fig. 2. die Meridian-Konvergenz $\alpha_2 - \alpha_1$ für ein kleines Stück des Abbildes der geodätischen Linie, und die Meridian-Konvergenz $\beta_2 - \beta_1$ für ein entsprechendes, zwischen denselben Meridianen liegendes Stück des Kreisbogens. Dabei ist dl der Längenunterschied auf dem Ellipsoid, also αdl der entsprechende Längenunterschied auf der Kugel, wobei α die Längenreduktionskonstante nach (15) § 94. S. 489 bedeutet.

Dazu bestehen zwei Differentialgleichungen:

$$\text{Grosskreisbogen } KK' \quad \beta_2 - \beta_1 = dl \sin \varphi \quad (1)$$

$$\text{Ellipsoid oder Kugel-Abbild } GG' \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha dl \sin u \quad (2)$$

$$\text{Also die Differenz } \delta = (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = dl (\alpha \sin u - \sin \varphi) \quad (3)$$

Diese Differenz δ ist die Krümmung des Bogens GG' , indem die drei anderen Seiten des unendlich kleinen Vierecks Fig. 2. als Grosskreisbogen keine geodätische Krümmung haben und in der Differentialbetrachtung als Gerade zu betrachten sind. Es ist nämlich die Winkelsumme des kleinen Vierecks von Fig. 2.:

$$(180^\circ - \beta_1) + \beta_2 + (180^\circ - \alpha_2) + \alpha_1 = 360^\circ + (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = 360^\circ + \delta$$

und dieses stimmt mit dem in Fig. 2. eingeschriebenen Winkel δ , sowie mit der Bedeutung von δ in der Gleichung (3).

Zur schärferen Begründung der Gleichung (3) mag auch noch bemerkt werden, dass der Querabstand y der Linien K und G sich nachher als sehr klein, nur von der Ordnung $\eta^2 s^2 q^2$ zeigen wird und deswegen kommt der sphärische Excess des kleinen Vierecks, d. h. die Flächenkrümmung neben der Linienkrümmung, nicht in Betracht.

Fig. 1. (Kugel).

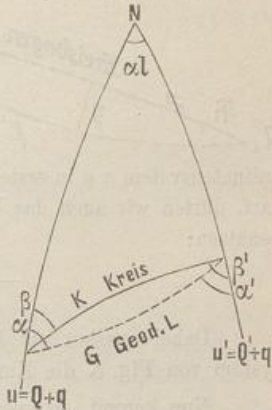
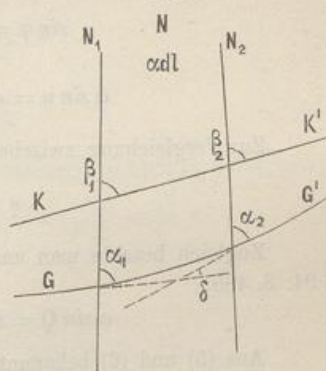


Fig. 2.



Wir wollen nun mit Fig. 3. ein sphärisches Coordinatensystem xy annehmen, wobei der Kreisbogen $Q_1 Q_2$ als x -Axe die Bedeutung von der Linie K in Fig. 1. und der Linie L' von Fig. 3. dieselbe Bedeutung wie die Linie G in Fig. 1. hat, nämlich konformes Abbild der geodätischen Linie.



Da man nun aus den schon angegebenen Gründen das sphärische Coordinatensystem xy in erster Näherung wie ein ebenes rechtwinkliges System behandeln darf, dürfen wir auch das bei (3) gefundene Krümmungs-Differential zu der Gleichung benutzen:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\delta}{dx} = (\alpha \sin u - \sin \varphi) \frac{dl}{dx} \quad (4)$$

Dabei mussten wir die linke Seite negativ schreiben, weil bei dem Coordinatensystem von Fig. 3. die Kurve L' gegen die x -Axe konkav ist.

Nun kommt es zuerst darauf an, die Funktion $\alpha \sin u - \sin \varphi$ zu entwickeln, und dazu haben wir nach Fig. 3. und Fig. 4. § 93. S. 488

$$\varphi = P + p \quad u = Q + q$$

also nach der Taylor'schen Reihe:

$$\sin \varphi = \sin P + p \cos P - \frac{p^2}{2} \sin P \quad (5)$$

$$\alpha \sin u = \alpha \sin Q + \alpha q \cos Q - \alpha \frac{q^2}{2} \sin Q \quad (6)$$

Zur Vergleichung zwischen p und q hat man nach (18) § 96. S. 496 die Reihe:

$$q = \frac{p}{V} + \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^3} p^2 \tan P \quad (7)$$

Zugleich beachte man auch die Grundformeln für P und Q nach (14) und (17) § 94. S. 489:

$$\alpha \sin Q = \sin P \quad \text{und} \quad \alpha \cos Q = V \cos P \quad (8)$$

Aus (5) und (6) bekommt man zunächst, da sich die ersten Glieder wegen (8) aufheben:

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \alpha q \cos Q - p \cos P + \frac{p^2 - q^2}{2} \sin P \quad (9)$$

Wegen (8) und (7) ist aber:

$$\alpha q \cos Q = V \cos P \left(\frac{p}{V} + \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^3} p^2 \tan P \right)$$

und wegen (7):

$$p^2 = q^2 V^2 = q^2 (1 + \eta^2) \quad \text{oder} \quad p^2 - q^2 = \frac{p}{V^2} \eta^2$$

Damit kann man (9) zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \alpha \sin u - \sin \varphi &= \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^2} p^2 \sin P + \frac{1}{2} \frac{p^2}{V^2} \eta^2 \sin P \\ \alpha \sin u - \sin \varphi &= \frac{2}{V^2} \eta^2 p^2 \sin P \quad \text{oder} \quad = 2 \eta^2 q^2 \sin P \end{aligned} \quad (10)$$

Zurückgreifend auf (4) haben wir also die Krümmungs-Differentialgleichung:

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = 2 r^2 q^2 \sin P \frac{d l}{d x} \quad (11)$$

Das Differential $d l$ der geographischen Länge l hat man nach der allgemeinen Reihenentwicklung von (6) § 74. S. 393:

$$d l = \frac{V \sin \alpha}{c \cos \varphi} = \frac{d S \sin \alpha}{N \cos \varphi} \quad (12)$$

Statt $d S$ für die geodätische Linie können wir in unserem Falle genügend genau $d x$ setzen, und indem wir auch noch in erster Näherung $\varphi = P$ nehmen, haben wir aus (11) und (12):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2 r^2}{N} q^2 \sin \alpha \tan P \quad (13)$$

Dabei beziehen sich N , α und P auf das Ellipsoid, und wenn wir zur Kugel übergehen wollen, ist $N = A V$ zu setzen (da N die Bedeutung von r in (24) § 32. S. 197 hat). Das Azimut α kann hinreichend genau gleich dem Kugelazimut β gesetzt werden und nach (8) ist $\tan Q = V \tan P$, folglich giebt nun (13) beim Übergang zur Kugel:

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2 r^2 q^2}{A V^2} \sin \beta \tan Q \quad (14)$$

wobei wir zur Abkürzung schreiben wollen:

$$\frac{2 r^2}{A V^2} \sin \beta \tan Q = F \quad (15)$$

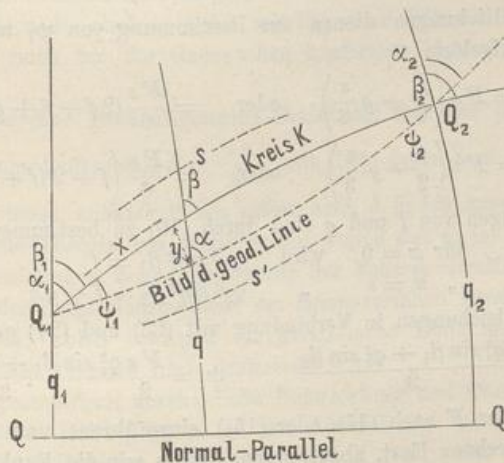
oder

$$\frac{2 r^2}{A V} \sin \beta \tan P = F \quad (15 a)$$

Um auf x überzugehen, haben wir in erster Näherung nach Fig. 4. zu setzen:

$$q = q_1 + \frac{x}{A} \cos \beta_1 + \dots \quad \text{also} \quad q^2 = q_1^2 + 2 q_1 \frac{x}{A} \cos \beta_1 + \dots \quad (16)$$

Fig. 4.



Hiebei ist q_1 derjenige Wert von q , welcher zu dem Anfangspunkt Q_1 gehört, und q_2 derjenige Wert von q , welcher zu dem Endpunkte Q_2 des betrachteten Bogens s

gehört. In gleicher Weise haben wir auch für das Azimut β , welches der Breite q und der Abscisse x entspricht, nach (29) S. 359 mit $v = \frac{x}{A} \sin \beta_1$:

$$\beta = \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 \tan Q_1$$

$$\sin \beta = \sin \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 \cos \beta_1 \tan Q_1 \quad (17)$$

Man hat also aus (16) und (17):

$$q^2 \sin \beta = q_1^2 \sin \beta_1 + \frac{x}{A} (2 q_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1 + q_1^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 \tan Q_1) \quad (18)$$

Dieses ist eine lineare Funktion von x , welche zur vorübergehenden Abkürzung so geschrieben werden mag:

$$q^2 \sin \beta = f + g x \quad , \quad \text{wobei } f = q_1^2 \sin^2 \beta_1 \quad (19)$$

Damit wird nach (14) und (15):

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = F(f + g x) \quad (20)$$

$$\text{integriert:} \quad -\frac{dy}{dx} = -\psi_1 + F\left(fx + \frac{gx^2}{2}\right) \quad (21)$$

$$-y = -\psi_1 x + F\left(\frac{fx^2}{2} + \frac{gx^3}{6}\right) \quad (22)$$

Dabei ist $-\psi_1$ bei (2) als Integrations-Konstante zugesetzt, während in (22) bei y , das mit $x = 0$ verschwinden muss, keine weitere Integrations-Konstante hinzukommt. Wenn $x = s$ wird, so muss $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = -\psi_2$ werden, dieses giebt aus (22) und (21) folgende zwei Gleichungen:

$$0 = -\psi_1 s + F\left(f \frac{s^2}{2} + g \frac{s^3}{6}\right)$$

$$+ \psi_2 = -\psi_1 + F\left(fs + g \frac{s^2}{2}\right)$$

Diese zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von ψ_1 und ψ_2 , und geben nach ψ_1 und ψ_2 aufgelöst:

$$\psi_1 = F s \left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{6}\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{F s}{6} (2f + f + g s) \quad (23)$$

$$\psi_2 = F s \left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{3}\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{F s}{6} (f + 2(f + g s)) \quad (24)$$

Die Bedeutungen von f und g sind durch (19) zu bestimmen:

$$\text{für } x = 0 \quad \text{wird} \quad q_1^2 \sin^2 \beta_1 = f$$

$$\text{„ } x = s \quad \text{„} \quad q_2^2 \sin^2 \beta_2 = f + g s$$

Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit (23) und (24) geben:

$$\psi_1 = \frac{F s}{2} \frac{2 q_1^2 \sin \beta_1 + q_2^2 \sin \beta_2}{3} \quad \psi_2 = \frac{F s}{2} \frac{q_1^2 \sin \beta_1 + 2 q_2^2 \sin \beta_2}{3} \quad (25)$$

Um den Faktor F nach (15) oder (15a) einzuführen, und nachher das, was sich tabellarisch berechnen lässt, abzutrennen, führen wir die Funktion ein:

$$\frac{\eta^2}{V^2} \tan Q q^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\eta^2}{V} \tan P q^2 = k \quad (26)$$

Dieses allgemeine k wird auf den Anfangspunkt und auf den Endpunkt angewendet mit:

$$k_1 = \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q_1^2 \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q_2^2 \quad (27)$$

Damit gehen die Formeln (25) und (26) in diese Formen über:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \psi_1 = \frac{2 k_1 \sin \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (28)$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \psi_2 = \frac{k_1 \sin \alpha_1 + 2 k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (29)$$

Zur Anwendung in Zahlen muss man die Funktion k nach (26) auf bestimmtes Mass einrichten. Nehmen wir wie bisher q in Graden und dann die kleinen Winkel ψ in Sekunden, so hat man zu setzen:

$$k = \frac{\rho''}{\rho^{\circ 2}} \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q^2 = 20 \pi \frac{r^2}{V} \operatorname{tang} P q^2$$

mit den Konstanten von § 98. wird dieses ausgerechnet:

$$k = 0,203\ 259\ 386\ q^2 \quad (\log = 1.798\ 1798.684)$$

Die hiernach berechneten Werte k sind nur erste Näherungen, welche von den genaueren Werten k der Gauss'schen Tafel ähnliche Abweichungen zeigen, wie zwischen den ersten Näherungen und den genauen Werten von $\log m$, welche wir bei (14) § 97. S. 499 zusammengestellt haben.

§ 99. Allgemeine Beziehung zwischen dem Vergrößerungs-Verhältnis m und dem Krümmungs-Differential der Abbildung.

Im vorigen § 98. haben wir das Krümmungs-Differential δ des Abbildes einer geodätischen Linie durch eine Differentialbetrachtung in Fig. 2. S. 501 aus den besonderen Eigenschaften unseres Abbildungsfalles hergeleitet, und es wird wohl immer möglich sein, die besondere Art einer konformen Abbildung zu Rat zu ziehen, um jenes Krümmungs-Differential zu erlangen.

So haben wir z. B. auch in § 50. mit Fig. 2. S. 283 und in § 85. mit Fig. 2. S. 453, und auch noch bei der Gauss'schen konformen ebenen Abbildung in § 88. S. 472 verfahren.

Es giebt aber eine ganz allgemeine Beziehung zwischen dem Differential dm und dem Krümmungs-Differential $\delta = \frac{ds}{R}$, mit Hilfe deren man, sobald m , das man ja jedenfalls haben muss, entwickelt ist, sofort auch δ finden kann.

Die allgemeine Theorie zur Bestimmung von δ aus m ist von Gauss in Art. 12.—13. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie und in §. 14. von Schreiber, Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866, gegeben, wobei beidemal die geodätische Linie nach den Regeln der Variationsrechnung als kürzeste Linie aufgefasst wird.

Eine mehr geometrisch anschauliche Entwicklung und Darstellung dieser Bahn hat Professor Schols in Delft gegeben in der Abhandlung: Annales de l'école polytechnique de Delft. 1^{re} livraison. Leide, E. J. Brill 1884. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par Ch. M. Schols.