



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 73. Sphäroidisches Polar-Dreieck

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

*Sphäroidische Coordinaten.*

Ein letztes, und wohl das beste Verfahren, lange geodätische Linien aus Dreiecksketten zu berechnen, können wir durch vorgreifendes Citieren der Theorien unserer nächsten Kapitel angeben: Man rechnet die geodätische Übertragung von Länge, Breite und Azimut schrittweise von Dreiecksseite zu Dreiecksseite durch die ganze Kette hindurch nach § 77. (oder auch nach § 74.) und dann kann man die ganze Linie vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt nach Kap. VII. berechnen.

Bei diesem Verfahren braucht man, ohne indirekt rechnen zu müssen, nicht *mehr* Voraussetzungen zu machen, in Bezug auf die Erddimensionen und auf die Breiten des Anfangspunktes und das Azimut der Anfangs-Richtung, als unbedingt nötig ist. Eine völlig voraussetzungslose Berechnung geodätischer Linien giebt es nicht.

Über die Bedeutung der geodätischen Linie für die praktische Geodäsie im allgemeinen lässt sich so viel sagen: Die Einführung der Theorie der geodätischen Linie in der Geodäsie ist keine Notwendigkeit, wie z. B. die Theorie der geradlinigen ebenen Dreiecke es für die ebene Triangulierung ist; man könnte die Aufgaben der höheren Geodäsie auch z. B. durch Sehnen-Dreiecke und polyedrisch-räumliche Punkt-Bestimmungen und in noch manch anderer Weise behandeln; allein die geodätische Linie hat sich bis jetzt als bestes Mittel bewährt, zwischen den unmittelbaren geodätischen und astronomischen Messungen einerseits und den Annahmen über die Erdoberfläche andererseits, die nötigen mathematischen Beziehungen herzustellen.

## Kapitel VII.

## Geodätische Coordinaten.

*Vorbemerkung.* Wir werden in diesem Kapitel im wesentlichen das mit der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid behandeln, was schon in Kapitel V. mit dem Normalschnitt auf der Kugel gemacht worden ist.

Der Übergang von der Kugel zum Ellipsoid von § 54. mit Hilfe des elliptischen Meridianbogens und des „verkürzten“ Breitenunterschiedes  $\frac{\Delta \varphi}{\nu^2}$  war ein erster Notbehelf, welcher genügte, um die sphärischen Coordinaten-Formeln dem Ellipsoid anzupassen und in übertragener Form für erstes Verständnis unserer Landesvermessungen plausibel zu machen. Mit der Theorie der geodätischen Linie wird all das in neuer und heller Beleuchtung erscheinen.

## § 73. Sphäroidisches Polar-Dreieck.

In Fig. 1. S. 391 bezeichnet  $A$  einen Punkt des Umdrehungs-Ellipsoids (Sphäroids) mit der Breite  $\varphi$ , entsprechend  $B$  einen Punkt mit der Breite  $\varphi'$ ; der Längen-Unterschied dieser beiden Punkte, d. h. der Winkel, welchen ihre Meridian-Ebenen  $NA$  und  $NB$  einschliessen, sei  $l$  (von West nach Ost positiv gezählt). Die beiden Punkte sind durch eine geodätische Linie  $AB$  verbunden, deren lineare Grösse  $= s$  sei und welche bei  $A$  und  $B$  die Azimute  $\alpha$  und  $\alpha'$  hat.

Wir zählen im allgemeinen die Azimute von Nord über Ost, wie  $\alpha$  im Punkt  $A$ ; und das gleichfalls nordöstlich gezählte Azimut im Punkte  $B$  wäre also  $= \alpha' \pm 180^\circ$ , wenn  $\alpha'$  der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel ist.

Indem man in solchen Fällen unterscheidet diesseitiger Punkt  $A$  und jenseitiger Punkt  $B$ , kann man auch festsetzen, dass im diesseitigen Punkt  $\alpha$  von Nord über Ost gezählt und im jenseitigen Punkt stets  $\pm 180^\circ$  zu dem Wert  $\alpha'$  zuzufügen ist, den die Formeln geben. (Mit anderen Worten: Wir wollen die Azimute nordöstlich zählen, aber das dabei für den jenseitigen Punkt nötige Zusetzen von  $\pm 180^\circ$  in den Formeln weglassen.)

Zwischen diesen 6 Grössen,  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $l$ ,  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha'$ , bestehen Beziehungen von ähnlicher Art wie für das *sphärische* Dreieck Fig. 1. § 60. S. 338, welche hauptsächlich in zwei Aufgabenformen sich ausdrücken, nämlich *erstens*: gegeben  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $l$ , gesucht  $s$ ,  $\alpha$  und  $\alpha'$  oder *zweitens*: gegeben  $\varphi$ ,  $s$  und  $\alpha$ ; gesucht  $\varphi'$ ,  $l$  und  $\alpha'$ .

Die Lösungen dieser beiden Aufgaben gehen mehrfach ineinander über.

Ehe wir an die verschiedenen Auflösungen der Aufgabe selbst gehen, schicken wir einige Beispiele hiefür voraus (ähnlich wie wir dieses auch für die sphärische Aufgabe S. 338 gethan haben). Dass diese Beispiele in sich richtig sind, können wir jetzt noch nicht beweisen; dieses wird sich aus der übereinstimmenden Berechnung nach den verschiedenen später zu entwickelnden Methoden ergeben.

Fig. 1.



#### I. Kleines sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left. \begin{array}{ll}
 \varphi = 49^\circ 30' 0'' & \varphi' = 50^\circ 30' 0'' \quad l = 1^\circ 0' 0'' \\
 \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \varphi' - \varphi = 1^\circ 0' 0'' \\
 \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 48' 20,4580'' & \alpha' - \alpha = 0^\circ 45' 57,8942'' \\
 \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,9471'' & \log s = 5.121\ 6103\ 131 \\
 \hline
 \alpha' = 33^\circ 11' 19,4051'' & s = 132\ 315,375^m \\
 \alpha = 32^\circ 25' 21,5109'' &
 \end{array} \right\} (1)$$

#### II. Grosses sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left. \begin{array}{ll}
 \varphi = 45^\circ 0' 0'' & \varphi' = 55^\circ 0' 0'' \quad l = 10^\circ 0' 0'' \\
 \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \varphi' - \varphi = 10^\circ 0' 0'' \\
 \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 54' 11,4302'' & \alpha' - \alpha = 7^\circ 41' 51,9408'' \\
 \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 3^\circ 50' 55,9704'' & \log s = 6.120\ 6674\ 805 \\
 \hline
 \alpha' = 36^\circ 45' 7,4006'' & s = 1\ 320\ 284,366^m \\
 \alpha = 29^\circ 3' 15,4598'' &
 \end{array} \right\} (2)$$

Ein Beispiel, das zwischen den beiden vorhergehenden liegt, ist von den Mecklenburgischen Geodäten als Kontroll-Diagonale über das ganze Land gerechnet worden. („Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 240—242). Dasselbe giebt mit den Bezeichnungen von Fig. 1. folgendes:

III. Mecklenburgische Diagonale.

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 53^\circ 0' & \varphi' &= 54^\circ 30' & l &= 3^\circ 30' \\ \frac{\varphi' + \varphi}{2} &= 53^\circ 45' & \varphi' - \varphi &= 1^\circ 30' & l &= 12\,600'' \\ \frac{\alpha' + \alpha}{2} &= 54^\circ 8' 20,77402'' & \alpha' - \alpha &= 2^\circ 48' 23,18112'' \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= 1^\circ 24' 41,59056'' & \log s &= 5.454\,5946\,712 \\ \alpha' &= 55^\circ 33' 2,36458'' & s &= 284\,835,8642^m \\ \alpha &= 52^\circ 43' 39,18346'' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ein kleines Beispiel, mit nicht runden Zahlen, nehmen wir aus Bohnenbergers Triangulierung von Württemberg:

IV.  $P = \text{Hornisgrinde.}$

$P' = \text{Tübingen.}$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 48^\circ 36' 21,8966'' & \varphi' &= 48^\circ 31' 12,4000'' \\ l &= 0^\circ 50' 55,5537'' = 3055,5537'' \\ \alpha &= 98^\circ 21' 29,9583'' & \alpha' &= 98^\circ 59' 40,6800'' \\ \log s &= 4.801\,8443\,0 & s &= 63\,364,218^m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Endlich nehmen wir noch ein grösseres Beispiel mit nicht runden Zahlen, welches auch schon anderwärts mehrfach benützt worden ist.

V.  $P = \text{Berlin.}$

$P' = \text{Königsberg.}$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 52^\circ 30' 16,7'' & \varphi' &= 54^\circ 42' 50,6'' \\ l &= 7^\circ 6' 0'' = 25\,560'' \\ \alpha &= 59^\circ 33' 0,6892'' & \alpha' &= 65^\circ 16' 9,3650'' \\ \log s &= 5.724\,2591\,353 & s &= 529\,979,578^m \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

## § 74. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von $s$ .

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 391.)

Die drei Differential-Gleichungen, welche wir in § 69. S. 379 entwickelt haben, sind, wenn wir nun den Längenunterschied mit  $l$  bezeichnen, folgende:

$$ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (1)$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \varphi dl \quad (2)$$

$$d\alpha = dl \sin \varphi \quad (3)$$

Dabei ist  $M$  der Meridian-Krümmungs-Halbmesser und  $N$  der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Breite  $\varphi$ , d. h. wie immer nach § 32. S. 197:

$$M = \frac{c}{V^3}, \quad N = \frac{c}{V}, \quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (4)$$