



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 67. Einfluss verschiedener Höhen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha \quad (23)$$

Dadurch ist die Kurve  $AB$  (Fig. 3.) in Polar-Coordinaten bestimmt, und um  $s$  in  $\sigma$  auszudrücken, hat man nur die Bogenlänge  $s$  durch Integration zu finden. Hierzu giebt Fig. 3. die Differential-Gleichung:

$$ds^2 = (S_2 d\sigma)^2 + (dS_2)^2 \quad (24)$$

Hier ist  $S_2$  als Funktion der Veränderlichen  $\sigma$  nach (24) einzuführen;  $N_1$  ist konstant, und auch  $\alpha$  und  $\eta^2$  gelten hier als konstant. Man hat daher aus (23):

$$\frac{dS_2}{d\sigma} = -N_1 \eta^2 \cos^2 \alpha \sigma \quad , \quad (dS_2)^2 = \eta^4 \dots d\sigma^2 \quad (25)$$

Wenn wir Glieder mit  $\eta^4$  vernachlässigen, können wir (24) kurz so schreiben:

$$ds = S_2 d\sigma = N_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) d\sigma$$

Die Integration mit den Grenzen  $\sigma = 0$  und  $\sigma = \sigma$  giebt:

$$s = N_1 \left(\sigma - \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \cos^2 \alpha\right)$$

oder auch:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) \quad (26)$$

Das Korrektionsglied beträgt  $\frac{\eta^2}{6} \left(\frac{s}{N_1}\right)^3 \cos^2 \alpha \varphi''$  in Sekunden. Mit  $\varphi = \alpha = 45^\circ$  und  $s = 100\,000^m$  giebt dieses nur  $0,0002''$  (man kann daher bei einzelnen Dreiecksseiten das zweite Glied von (26) vernachlässigen).

Nach dem Satz von der verkürzten Breitendifferenz (8) § 54. S. 303 kann man hier setzen  $\sigma \cos \alpha = \frac{\Delta \varphi}{V^2} = \Delta \varphi'$ , also wird (26):

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2\right) \quad \text{oder} \quad s = N_1 \sigma \left(1 - \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2\right) \quad (27)$$

In dieser Form haben wir das Zahlen-Beispiel (7)–(9) S. 368 behandelt und berechnet:

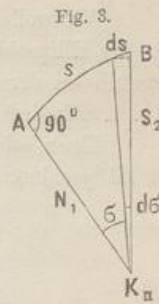
$$s = N_1 \sigma_1 (1 - \dots) = 132\,315,392^m - 0,019^m = 132\,315,373^m \quad (28)$$

$$s = N_2 \sigma_2 (1 - \dots) = 132\,315,394^m - 0,019^m = 132\,315,375^m \quad (29)$$

Das Korrektionsglied von (27) macht also hier nur etwa 2 Centimeter aus. Die beiden Werte  $s$  nach (28) und (29) sind innerhalb der Rechenschärfe als *gleich* zu betrachten, und wir werden später in § 71. auch finden, dass sie innerhalb der Rechenschärfe auch gleich lang sind, wie die geodätische Linie zwischen  $A$  und  $B$ .

## § 67. Einfluss verschiedener Höhen.

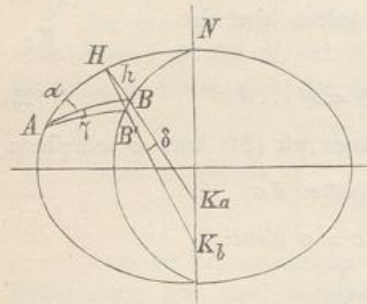
Im Bisherigen haben wir immer die Voraussetzung gemacht, dass die in Betracht kommenden Punkte  $A$ ,  $B$  beide auf der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoid liegen. Für Triangulierung, Azimutmessung u. dgl. zwischen zwei Punkten ist diese Annahme physisch nicht möglich, weil die Erde nicht durchsichtig ist. In Wirklichkeit befinden sich die Punkte auf Berghöhen, Türmen u. dgl., und es fragt sich, ob dadurch eine Änderung gegen die frühere Annahme stattfindet.



Wir wollen zunächst annehmen, der Standpunkt des Beobachters befinde sich auf der Ellipsoidfläche selbst, welche unseren Betrachtungen zu Grunde gelegt wird; dagegen sei der Zielpunkt in einer Höhe  $h$  über der Ellipsoidfläche befindlich, wie in Fig. 1. mit dem Standpunkt  $A$  und dem Zielpunkt  $H$  angedeutet ist.

Einen solchen Zielpunkt denken wir uns auf das Ellipsoid projiziert mittelst der Ellipsoidnormalen (wobei von einer Krümmung der Lotlinien abgesehen wird).

Fig. 1.



In Fig. 1. sei  $H$  ein hochgelegener Punkt und  $B'$  dessen Projektion, wobei  $HK_b$  die Normale von  $B$  ist. Wenn nun von einem entfernten Punkt  $A$ , der in der Ellipsoidfläche selbst liegt, mittelst des Theodolits nach  $B$  gemessen wird, so geschieht dieses in der Ebene  $AHK_a$ , welche in  $A$  normal ist, und der Theodolit projiziert den Punkt  $H$  nicht nach  $B'$ , sondern nach  $B$ .

Um den dadurch entstehenden Azimutal-Fehler  $BA B' = \gamma$  zu bestimmen, brauchen wir wieder den kleinen Winkel  $K_a H K_b = \delta$ , nämlich nach (4) § 65, S. 363 in erster Näherung:

$$\delta = \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} = \eta^2 \frac{s}{N} \cos \alpha$$

wobei  $s$  die lineare Entfernung  $AB$  und  $N$  der Quer-Krümmungs-Halbmesser ist. Damit hat man den Projektionsfehler  $BB'$  im Meridian:

$$BB' = h \delta = \eta^2 \frac{hs}{N} \cos \alpha$$

Der entsprechende Azimutfehler  $\gamma$  ist:

$$\gamma = \frac{BB' \sin \alpha}{s} = \eta^2 \frac{h}{N} \sin \alpha \cos \alpha$$

Mit  $\varphi$  und  $\alpha = 45^\circ$  giebt dieses:

$$\gamma = 0,054'' \frac{h}{1000}$$

Also für  $h = 1000^m$  giebt dieses bereits  $0,054''$ .

Wenn der Punkt  $A$  selbst nicht in der Ellipsoidfläche liegt, sondern darüber, so ändert das an der bisherigen Betrachtung nichts, weil  $A$  in seiner eigenen Normalen  $K_a A$  gehoben ist, wobei die vertikale Theodolit-Axe von  $A$  mit der Normalen  $A K_a$  zusammenfällt.

*Wirkung der Refraktion.* Infolge der Abplattung der Erde und der Niveauschichten der Atmosphäre findet eine Ablenkung eines Lichtstrahles durch Refraktion nicht bloss in vertikalem Sinne, sondern auch in horizontalem Sinne statt. Je zwei aufeinander folgende Elemente eines Lichtstrahls liegen in einer Ebene, welche die Lotlinie der Trennungsfäche zwischen zwei verschiedenen dichten und verschieden brechenden Schichten der Atmosphäre enthält. Da die Trennungsfäche zweier solcher Schichten rechtwinklig zur Lotrichtung sein muss, finden wir für den Lauf einer Lichtkurve durch die Atmosphäre ein ähnliches Gesetz wie für die geodätische Linie (vgl. Fig. 2. in § 68.), dass nämlich die Schmiegungs-Ebene der Lichtkurve überall Normalebene der lichtbrechenden Fläche sei oder die Lotlinie dieser Fläche enthalten muss.

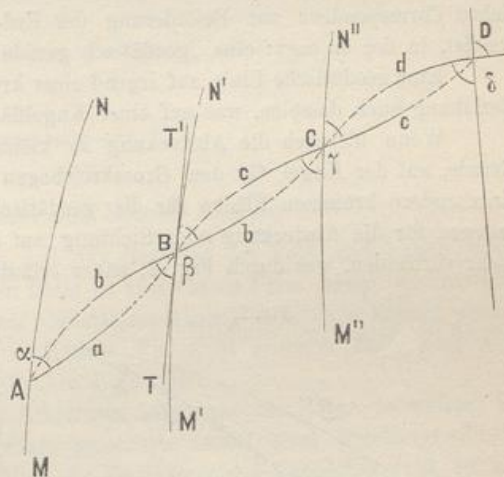
Auf Grund dieses Gesetzes sind Untersuchungen über die azimutale Ablenkung des Lichtstrahles angestellt worden von Andrae, Sonderhof und Helmert (s. Helmert, höhere Geodäsie II. S. 565), in ähnlicher Weise, wie für den Lauf der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid zwischen den beiden Normalschnitten. Da die Lichtkurve in ihrer Hauptkrümmung viel flacher ist als die geodätische Linie auf der Erde, so wird auch der Querabstand zwischen den Normalschnitten in demselben Verhältnisse kleiner, und ebenso auch die kleinen Winkel beider Lichtkurven kleiner als für die geodätische Linie auf der Erde. Das Krümmungsverhältnis zwischen der Lichtlinie und einer Erdlinie ist der sogenannte Refraktions-Coëfficient, im Mittel etwa  $k = 0,13$ , und hiernach verhält sich die azimutale Ablenkung des Lichtstrahls zu der entsprechenden geodätischen Reduktion wie  $0,13$  zu  $1$ . Da nun diese geodätische Reduktion selbst sehr gering ist, so ist nach den citirten Untersuchungen von Andrae, Sonderhof und Helmert die Lichtablenkung zu vernachlässigen.

§ 68. Die geodätische Linie.

Nachdem wir in § 65. uns überzeugt haben, dass zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  der ellipsoidischen Erdoberfläche im allgemeinen zwei verschiedene Normalschnitte bestehen, in welchen bei Theodolit-Beobachtungen von  $A$  nach  $B$  und von  $B$  nach  $A$  die Sicht-Linien sich befinden, können wir auch angeben, was für ein Linienzug erhalten wird, wenn man mehrere aufeinanderfolgende Punkte  $A, B, C$  (Fig. 1.) durch fortgesetztes Theodolit-Einweisen, wie eine Gerade in der Ebene, absteckt.

In Fig. 1. stehe in  $A$  ein Theodolit mit lotrechter Axe, mit welchem ein entfernter Punkt  $B$  angezielt oder eingewiesen wird, wobei die Sicht  $AaB$  stattfindet. Hierauf begiebt man sich mit dem Theodolit nach  $B$ , stellt denselben dort ebenfalls mit lotrechter Axe auf, zielt zurück nach  $A$ , was in der Sicht  $BbA$  geschieht, dreht dann um  $180^\circ$  und bekommt die neue Sicht  $BbC$ . Hierauf geht man nach  $C$ , nimmt wieder die Sicht rückwärts  $CcB$ , und um  $180^\circ$  gedreht vorwärts  $CcD$ , und so fort.

Fig. 1.



Die Theorie von § 65. hat uns gezeigt, dass bei diesem Verfahren allerdings im allgemeinen zwei Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten  $A$  und  $B$ ,  $B$  und  $C$ , u. s. w. in Betracht kommen, nämlich  $AaB$  von  $A$  nach  $B$  und  $BbA$  von  $B$  nach  $A$  u. s. w., doch sind die Abweichungen zwischen  $a$  und  $b$ ,  $c$  und  $d$  u. s. w. so klein, dass sie selbst bei Dreiecksseiten von 100 000 Meter auf unserer Erdoberfläche noch vernachlässigt werden können.

Wäre unsere Erde stärker abgeplattet, so würden auch diese Abweichungen stärker sein; und im Sinne der Theorie kommt es auf den Grössenbetrag der Abweichungen jetzt nicht an, sondern darauf, dass das mathematische Gesetz des Linienzuges  $A, B, C, D$  erkannt werde.

Jedenfalls werden bei der Krümmung, wie sie unser Erdellipsoid hat, die Abweichungen  $ab$  immer kleiner, wenn die Zielweiten  $AB, BC$  u. s. w. fortgesetzt