Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 32. Die Haupt-Krümmungs-Halbmesser

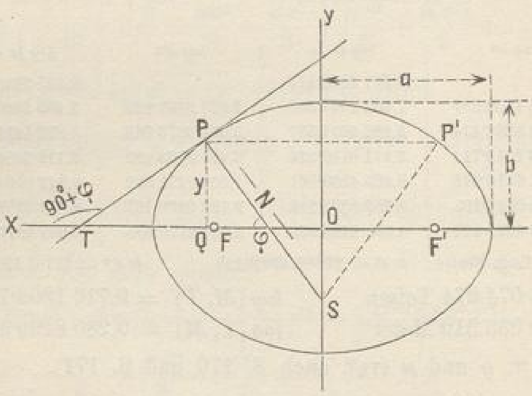
Für die Festhaltung der oben S. 191 fett gedruckten Konstanten besteht der Grund, dass die von der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme veröffentlichten geographischen Coordinaten, auf welchen die ganze preussische praktische Geodäsie beruht, mit diesen Konstanten und den darauf gegründeten Hilfstafeln berechnet sind, dass also z. B. eine Dreiecksseite rückwärts aus jenen Coordinaten berechnet unmöglich wieder ebenso herauskommen kann, wie sie als Dreiecksseite eingeführt worden ist, wenn nicht wieder dieselben Konstanten a und e^2 angewendet werden.

In diesem Buche haben wir die auf S. 191 fett gedruckten Zahlen und die darauf gegründeten auf S. 193 zusammengestellten weiteren geodätischen Konstanten allen geodätischen Rechnungen zu Grunde gelegt.

§ 32. Die Haupt-Krümmungs-Halbmesser.

Eine Ellipse mit den beiden Halb-Axen a und b in rechtwinkligen Coordinaten x und y ist in Fig. 1 gezeichnet.

Fig. 1.
Umdrehungs-Erd-Ellipsoid.



Die Gleichung dieser Ellipse ist bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{1}$$

Die Differentiierung dieser Gleichung giebt:

$$\frac{2\,x\,d\,x}{a^2} + \frac{2\,y\,d\,y}{b^2} = 0 \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y} \tag{2}$$

Andererseits hat der Differential-Quotient $\frac{d\,y}{d\,x}$ eine Beziehung zum Normalen-Winkel φ, nämlich (nach Fig. 1.):

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,cotg\;\varphi \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{cos\;\varphi}{sin\;\varphi} \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) zusammen geben:

$$\frac{b^2\,x}{a^2\,y} = \frac{cos\;\varphi}{sin\;\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{b^2\,x^2}{a^2\,y^2} = \frac{a^2\,cos^2\,\varphi}{b^2\,sin^2\,\varphi} \tag{4}$$

Nun hat man in (1) und (4) zwei Gleichungen, welche nach x^2 und y^2 aufgelöst werden können, was wir in aller Ausführlichkeit so schreiben:

$$\begin{array}{lll} (1) \text{ giebt:} & b^2 x^2 \qquad + a^2 y^2 & = a^2 b^2 \\ (4) \quad „ & b^4 x^2 \sin^2 \varphi - a^4 y^2 \cos^2 \varphi = 0 & \end{array}$$

Wenn man die erste dieser beiden Gleichungen mit $a^2 \cos^2 \varphi$ multipliziert und dann beide Gleichungen addiert, so bekommt man:

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \tag{5}$$

Wenn man andererseits die erste der beiden vorstehenden Gleichungen mit $b^2 \sin^2 \varphi$ multipliziert und dann beide Gleichungen subtrahiert, so bekommt man

$$y^2 = \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \tag{6}$$

Meridian-Krümmungs-Halbmesser M.

Nach diesem gehen wir über zur Bestimmung des Krümmungs-Halbmessers der Meridian-Ellipse, den wir mit M bezeichnen wollen. Die analytische Geometrie bietet hiezu bekanntlich die Formel:

$$M = \frac{\left(1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d\,x^2}} \tag{7}$$

Den hiezu nötigen ersten Differential-Quotienten haben wir bereits in (3) gebraucht, nämlich:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\cot g\, \varphi \quad , \quad 1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \tag{8}$$

Die zweite Ableitung hievon giebt zunächst:

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{d\,x} \tag{9}$$

und um $\frac{d\varphi}{d\,x}$ zu erlangen, müssen wir die Reciproke $\frac{d\,x}{d\varphi}$ aus (5) ableiten:

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Ableitung eines Bruches:

$$\frac{d\,x}{d\varphi} = \frac{a^2}{(\sqrt{\ldots})^2}\left(-\sin \varphi \sqrt{\ldots} - \cos \varphi \frac{-a^2 \cos \varphi \sin \varphi + b^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{\ldots}}\right)$$

$$\frac{d\,x}{d\varphi} = \frac{-a^2}{(\sqrt{\ldots})^3}\left(\sin \varphi\, (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) + \cos \varphi\, (-a^2 + b^2) \sin \varphi \cos \varphi\right)$$

$$= \frac{-a^2}{(\sqrt{\ldots})^3}\, b^2 \sin \varphi\, (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$\frac{d\,x}{d\varphi} = \frac{-a^2 b^2 \sin \varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

Nun kann man aus (8), (9), (10) die Formel (7) zusammensetzen, und man bekommt dadurch mit Weglassung des für uns bedeutungslosen Vorzeichens:

$$M = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

Einführung der Excentricität.

Die Formeln, welche wir hier entwickelt haben, sind die sich zuerst darbietenden, allein für die späteren Anwendungen sind diese Formeln nicht geeignet, weil man darin nicht gut den wichtigen Umstand zum Ausdruck bringen kann, dass beim Erdellipsoid die beiden Halbaxen a und b nahezu *gleich* sind, oder mit anderen Worten: die später unerlässlichen rasch konvergierenden Reihen-Entwicklungen lassen sich an die vorstehenden Formeln mit a und b nicht gut ansetzen. Man führt deswegen eine Excentricität und eine lineare Axengrösse ein. Wir haben hiezu zwei Formen, welche zunächst beide behandelt werden sollen:

$$\text{I. Ältere Form mit } \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 \text{ und Axe } a \tag{12}$$

$$\text{II. Neuere Form mit } \frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2 \text{ und Axengrösse } \frac{a^2}{b} \tag{13}$$

Bleiben wir zuerst bei der älteren Form I, so haben wir, um alles in a und e^2 auszudrücken, zunächst

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2 \qquad b^2 = a^2 (1 - e^2) \tag{14}$$

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi + a^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

Wir setzen ein für allemal:

$$1 - e^2 \sin^2 \varphi = W^2 \qquad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \tag{15}$$

damit werden x und y, sowie M aus ihren ersten Formen in (5), (6) und (11) übergeführt in:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \qquad y = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{W} \tag{16}$$

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3} \tag{17}$$

Diese Formeln (16) und (17) findet man sehr allgemein in geodätischen Werken, sie sind aber nicht die besten. Wenn man nach der neueren Form II bei (13) rechnet, so bekommt man:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = e'^2 \qquad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + e'^2} \,, \quad \frac{a^2}{b} = c$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}} \qquad b = \frac{c}{1 + e'^2} \tag{18}$$

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = \frac{c^2 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)}{(1 + e'^2)^2}$$

Wir setzen ein für allemal:

$$1 + e'^2 \cos^2 \varphi = V^2 \qquad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{19}$$

damit werden x, y und M aus (5), (6), (11) übergeführt in:

$$x = \frac{c \cos \varphi}{V} \qquad y = \frac{c \sin \varphi}{V(1+e'^2)} \tag{20}$$

$$M = \frac{c}{V^3} \tag{21}$$

Der Querkrümmungshalbmesser N.

Durch das Vorstehende haben wir den ersten Haupt-Krümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids, für den Meridian, bestimmt; der zweite Haupt-Krümmungs-Halbmesser, welcher sich auf die Krümmung quer zum Meridian, also von West nach Ost bezieht, kann ohne weitere Rechnung durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung gefunden werden.

Wir betrachten in Fig. 1. (S. 194) zuerst den Parallelkreis $P\,P'$ für die Breite φ, und sehen, dass alle in diesem Parallelkreis gezogenen Flächen-Normalen sich in *einem* Punkte S der Axe schneiden.

Der Querkrümmungs-Bogen, welcher in P rechtwinklig zum Meridian ist, muss offenbar jenen Parallelkreis $P\,P'$ in P berühren, und deswegen sind zwei einander unendlich nahe liegende Gerade $P\,S$ auch Normalen des Querkrümmungs-Bogens in P. Da aber der Schnittpunkt zweier einander unendlich naher Normalen einer Kurve als Krümmungs-Mittelpunkt der Kurve gilt, so ist $P\,S$ der Krümmungs-Halbmesser des Querkrümmungs-Bogens, oder kurz, es ist $PS = N$ der Querkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids in dem Punkte P.

Indem wir die Länge dieses Querkrümmungs-Halbmessers ein für allemal mit N bezeichnen, haben wir

$$N = \frac{x}{\cos \varphi}$$

und je nach der alten oder neuen Form (16) oder (20) giebt dieses:

$$N = \frac{a}{W} \quad \text{oder} \quad N = \frac{c}{V} \tag{22}$$

Mittlerer Krümmungshalbmesser r.

Unter dem mittleren Krümmungshalbmesser versteht man in der Geodäsie das geometrische Mittel aus den beiden Haupt-Krümmungs-Halbmessern M und N, d. h.:

$$r = \sqrt{M\,N} \tag{23}$$

oder mit Einsetzung der Bedeutungen von M und N

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} \quad \text{oder} \quad r = \frac{c}{V^2} \tag{24}$$

Krümmungs-Verhältnis $N : M$.

Nachdem die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N bestimmt sind, wollen wir auch ihren Quotienten betrachten, d. h. in zwei Formen, aus (17) und (21) mit (22):

$$\frac{N}{M} = \frac{W^2}{1-e^2} \quad \text{oder} \quad \frac{N}{M} = V^2 \tag{25}$$

Dieser Quotient ist in der Geodäsie sehr wichtig, denn je näher dieser Quotient gleich 1 ist, desto mehr ist es gestattet, die Erde unter der betreffenden Breite als eine Kugel zu betrachten. Zur Gewinnung einer Übersicht wollen wir einige Werte hiefür ausrechnen:

$\varphi = 0°$	$\dfrac{N}{M}$	$= 1{,}0067 = V^2$
.. $30°$	....	$1{,}0050$
.. $45°$	....	$1{,}0034$
.. $60°$	....	$1{,}0017$
.. $90°$	....	$1{,}0000$

Die Werte V^2 sind von 1 ziemlich verschieden, unter 45° um etwa $^1/_3$ $^0/_0$; und nur in den Erdpolen ($\varphi = 90°$) wird $V^2 = 1$.

Trotzdem giebt es viele Fälle, wo es sich nur um kleine Korrektionen *zweiter* Ordnung handelt, in welchen der Quotient $N : M$ doch hinreichend $= 1$ gesetzt, d. h. die Erde als Kugel behandelt werden darf. In solchen Fällen nimmt man dann den mittleren Krümmungs-Halbmesser r nach (23) oder (24) als Halbmesser einer solchen Kugel.

Da das Verhältnis $N : M$ stets grösser als 1 ist, ist auch immer N grösser als M, d. h. der Querkrümmungs-Halbmesser ist immer grösser als der Meridian-krümmungs-Halbmesser, oder umgekehrt, die Krümmung $1 : M$ ist im Meridian stets grösser als die Krümmung $1 : N$ im Querbogen. Nur im Pol werden beide gleich, nämlich $N = M = \dfrac{a^2}{b} = c^2$ (wie schon in (9) § 31. S. 189 bemerkt wurde) und im Pol der Erde wäre daher das beste Arbeitsfeld für einen Geodäten, weil dort alle sphäroidischen Korrektionen verschwinden.

Geocentrischer Halbmesser und geocentrische Breite.

Selten in der Geodäsie, aber in der Astronomie zu Parallelaxenrechnungen gebraucht, sind noch zwei Werte, welche wir im Anschluss an das Vorhergehende bestimmen wollen, nämlich der Abstand eines Erdpunktes von dem Erdmittelpunkt, geocentrischer Halbmesser $= C$ genannt und der Winkel dieses Halbmessers mit dem Äquator, geocentrische Breite $= \gamma$.

Nach Fig. 1. § 31. S. 188 haben wir für diese beiden Grössen sofort die Formeln:

$$C = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad tang\, \gamma = \frac{y}{x} \tag{a}$$

Wir wollen weiter mit a und e^2 rechnen, d. h. nach (16) S. 196

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \quad \text{und} \quad y = \frac{a\,(1 - e^2) \sin \varphi}{W} \tag{b}$$

also

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}(\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi) \quad , \quad tang\, \gamma = (1 - e^2)\, tang\, \varphi \tag{c}$$

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}\left(\cos^2 \varphi + \frac{tang^2\, \gamma}{tang^2\, \varphi} \sin^2 \varphi\right) = \frac{a^2}{W^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \gamma} \tag{d}$$

Aus (c) hat man weiter:

$$1 - e^2 = \frac{tang^2\,\gamma}{tang^2\,\varphi} \quad , \quad e^2 = \frac{sin\,(\varphi - \gamma)}{sin\,\varphi\; cos\,\gamma}$$

$$W^2 = 1 - e^2\,sin^2\,\varphi = 1 - sin\,(\varphi - \gamma)\,\frac{sin\,\varphi}{cos\,\gamma} = \frac{cos\,\varphi}{cos\,\gamma}\,cos\,(\varphi - \gamma)$$

also nach (d):

$$C^2 = \frac{a^2\,cos\,\varphi}{cos\,\gamma\;cos\,(\varphi - \gamma)} \tag{e}$$

Mit diesen Formeln (c)—(e) hat man genügende Mittel zur scharfen Ausrechnung von C und γ, indessen häufiger braucht man Näherungsformeln, welche mit Beschränkung auf e^2, d. h. Vernachlässigung von e^4 u. s. w. sich rasch geben. Aus (c) hat man:

$$tang\,\varphi - tang\,\gamma = e^2\,tang\,\varphi$$

$$\frac{\varphi - \psi}{cos^2\,\varphi} = e^2\,tang\,\varphi \quad , \quad \varphi - \psi = e^2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi$$

oder mit Zusetzung von ϱ:

$$\varphi - \psi = \frac{1}{2}\,e^2\,\varrho\,sin\,2\,\varphi = [2.8378056]\;sin\,2\,\varphi \tag{f}$$

Mit gleicher Näherung hat man aus (c):

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}\,(cos^2\,\varphi + (1 - 2\,e^2)\,sin^2\,\varphi) = \frac{a^2}{W^2}\,(1 - 2\,e^2\,sin^2\,\varphi)$$

Da $W^2 = 1 - e^2\,sin^2\,\varphi$ oder $1 : W^2 = 1 + e^2\,sin^2\,\varphi$, hat man:

$$C^2 = a^2\,(1 - e^2\,sin^2\,\varphi) = a^2\,W^2$$

$$C = a\,\left(1 - \frac{e^2}{2}\,sin^2\,\varphi\right) \tag{g}$$

Die Formeln (f) und (g) braucht man z. B. zur Reduktion von Monddistanzen. Genaue Tafeln für $log\,\frac{C}{a}$ und für $\varphi - \psi$ sind von Encke in dem „Berliner astronomischen Jahrbuche für 1882“, S. 344—373 gegeben worden. In der Geodäsie werden diese Werte fast nie gebraucht.

Reduzierte Breite. In der Geodäsie spielt noch ein anderer Winkel eine wichtige Rolle, der „reduzierte Breite“ genannt wird und bestimmt wird durch die Gleichung:

$$tang\,\psi = \sqrt{1 - e^2}\;tang\,\varphi$$

Damit werden wir uns aber erst später zu beschäftigen haben.

§ 33. Krümmungs-Halbmesser für beliebiges Azimut.

Nachdem der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M und der Querkrümmungs-Halbmesser N bestimmt sind, kann man auch den Krümmungs-Halbmesser R für irgend welches Azimut α leicht angeben, wenn man den Eulerschen Satz als bekannt voraussetzt, nämlich:

$$\frac{1}{R} = \frac{cos^2\,\alpha}{M} + \frac{sin^2\,\alpha}{N} \tag{1}$$