Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 20. Verschiedene Fehlerbetrachtungen zur Anlage von Dreiecks-Netzen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Azimut-Übertragung.

Die Azimut-Übertragung längs einer Dreieckskette besteht einfach in der *Summierung* aller längs eines Polygons auftretender Dreieckswinkel, z. B. in Fig. 1. (S. 117) besteht die Azimut-Übertragung längs $s_1 + s_2 + s_3$ in der Summierung $(3) + (1) + (6) + (9) + (7) + \ldots$

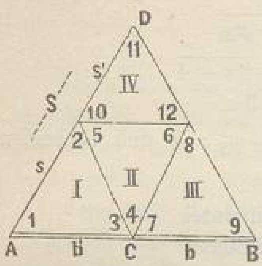
Wenn jedoch die Azimut-Übertragung längs der Haupterstreckung einer Dreieckskette besonders wichtig ist, so soll man schon die Anordnung der Messungen darnach einrichten, also nicht bloss die einzelnen je 60° betragenden Winkel in den Ketten von Fig. 1. bis 5. S. 117—120 messen, sondern die je nahezu 180° betragenden Winkel der in der Haupterstreckung liegenden Seiten.

Besser noch ist es, für die Zwecke der Azimut-Übertragung die Dreiecksseiten besonders anzuordnen, wie z. B. Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen gethan hat. Dieses ist aus dem Netzbilde der Gradmessung in Ostpreussen in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 499 zu ersehen, indem auf der nordwestlichen Gesamterstreckung Tunz-Galtgarben-Nidden-Memel nur zwei Zwischenpunkte Galtgarben und Nidden sind, während auf der südöstlichen Grenze 7 Zwischenpunkte zur Azimut-Übertragung nötig wären.

§ 20. Verschiedene Fehler-Betrachtungen zur Anlage von Dreiecks-Netzen.

I. Grösse der Dreiecke.

Fig. 1.



Eine erste wichtige Frage betrifft die *Grösse* der Dreiecksseiten. Soll man, wenn man die Wahl hat, grosse oder kleine Dreiecke nehmen?

Diese Frage ist sehr unbestimmt, wir wollen ihr mit Fig. 1. folgende bestimmtere Fassung geben:

Auf einer Geraden sind drei feste Punkte A, C, B gegeben, und zwar, wie wir meist bei Grundlinien annehmen, fehlerfrei gegeben, ein Punkt D kann entweder durch 4 Dreiecke I, II, III, IV mit Benützung des Zwischenpunktes C, oder durch *ein* Dreieck $A\,B\,D$ ohne Benützung des Zwischenpunktes C trianguliert werden; welches ist das günstigere?

Nimmt man alle 4 Dreiecke, so hat man zunächst 4 Summen-Gleichungen:

$$(1) + (2) + (3) - 180^\circ = 0, \quad (4) + (5) + (6) - (180) = 0, \quad (7) + (8) + (9) - 180^\circ = 0,$$
$$(10) + (11) + (12) - 180^\circ = 0 \tag{1}$$

und dazu eine Seiten-Gleichung, welche die Beziehung zwischen b' und b ausdrückt, d. h.:

$$b' \frac{sin\,(1)}{sin\,(2)} \frac{sin\,(5)}{sin\,(6)} \frac{sin\,(8)}{sin\,(9)} = b$$

oder mit der Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w. giebt dieses:

$$c_1 v_1 - c_2 v_2 + c_5 v_5 - c_6 v_6 + c_8 v_8 - c_9 v_9 + \ldots = 0 \tag{2}$$

Die Seite $A\,D = S$ wird in b' ausgedrückt durch die Funktion:

$$S = s + s' = b' \frac{sin\,(3)}{sin\,(2)} + b' \frac{sin\,(1)\,sin\,(4)\,sin\,(12)}{sin\,(2)\,sin\,(6)\,sin\,(11)}$$

Das Weitere wollen wir nur noch mit der Vereinfachung machen, dass alle Dreiecke gleichseitig seien, also $b = b' = s = s'$ und $c_1 = c_2 \ldots = cotg\, 60° = c$. Damit giebt die Weiterrechnung für das Gewicht P der Seite S:

$$\frac{1}{P} = \left(10\, c^2 - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{16\, c^4}{6\, c^2}\right) b^2 = 7{,}333\, c^2\, b^2$$

also der mittlere Fehler von S:

$$m\,(S) = \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60°\, b\, \sqrt{7{,}333}$$

oder, da $2\,b = S$ ist, der relative Fehler (vgl. Anmerkung S. 110):

$$\mu\,(S) = \frac{\mu}{2\,\varrho}\, cotg\, 60°\, \sqrt{7{,}333} = 1{,}354\, \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° = 0{,}000\,003\,79\, \mu \qquad (3)$$

Wenn man dagegen die Seite S aus dem *einen* grossen Dreieck $A\,B\,D$ bestimmt, so bekommt man nach (12) § 18. S. 110:

$$\mu\,(S) = 1{,}4142\, \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° = 0{,}000\,003\,96\, \mu \qquad (4)$$

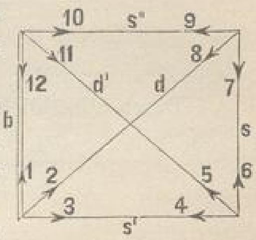
Die Bestimmung (4) der Seite S aus dem *einen* grossen Dreiecke ist also hier fast gleich günstig wie die Bestimmung (3) aus den 4 kleinen Dreiecken, trotzdem, dass mit den 4 kleinen Dreiecken der günstige Zwischenpunkt C mit benützt wurde, der in dem einen grossen Dreieck gar nicht vorkommt.

Bedenkt man noch, dass in den 4 Einzeldreiecken zusammen 4 mal so viel Winkel zu messen sind, als in dem *einen* Gesamtdreieck, oder dass man bei gleicher Winkelmessungs-Summe (Arbeit) die Seite S aus *einem* grossen Dreiecke nahezu doppelt so genau bekommt, als aus den vier kleinen Dreiecken, so erscheint das *eine* grosse Dreieck im Vorteil.

II. Diagonalen-Kontrolle.

In Fig. 2. haben wir ein Quadrat mit zwei Diagonalen gezeichnet, wobei die Seite b als Grundlinie gilt, aus welcher die anderen Seiten s', s und s'' trigonometrisch abgeleitet werden sollen.

Fig. 2.



Die ganze Figur ist bestimmt, auch wenn nur *eine* Diagonale eingemessen ist, und wir wollen untersuchen, welche Genauigkeits-Änderung stattfindet, je nachdem eine oder beide Diagonalen d und d' gemessen sind.

Die Messungen seien nach Richtungen gemacht, so dass für das volle Netz mit beiden Diagonalen 12 Richtungen gleichgewichtig vorliegen; wenn dagegen die Diagonale d' nicht vorhanden ist, fallen die beiden Richtungen (5) und (11) fort.

Im ganzen hat das Netz vier Bedingungs-Gleichungen, nämlich eine Seiten-Gleichung und drei Winkelsummen-Gleichungen, diese vier Gleichungen sind:

$$\text{a)}\quad \frac{sin\,(2,3)\; sin\,(4,5)\; sin\,(7,9)\; sin\,(10,12)}{sin\,(1,3)\; sin\,(4,6)\; sin\,(8,9)\; sin\,(10,11)} = 1 \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{b)} & (10,12) + (1,2) + (8,9) = 189° \\ \text{c)} & (1,3) + (4,5) + (11,12) = 180° \\ \text{d)} & (2,3) + (4,6) + (7,8) = 180° \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Wenn es sich um die Bestimmung des Gewichtes der Seite s handelt, so kommt hiezu noch:

$$\text{f)} \quad \frac{s}{b} = \frac{\sin(2,3)\sin(10,12)}{\sin(4,6)\sin(8,9)}$$

Um die Gleichungen a) und f) linear zu machen, braucht man bekanntlich die Cotangenten der Winkel als Coëfficienten, und da in unserem Falle nur Winkel von 45° oder 90° vorkommen, für welche man z. B. hat:

$$cotg\,(2,3) = cotg\,45^\circ = 1 \quad , \quad cotg\,(7,9) = cotg\,90^\circ = 0,$$

so werden die linearen Gleichungen sehr einfach.

Auf diese Weise bekommt man aus a) eine Gleichung von folgender Form:

$$-v_2 + v_3 - v_4 + v_5 + v_8 - v_9 + v_{10} - v_{11} + \ldots = 0 \tag{7}$$

Die Gleichung b) wird geben:

$$-v_1 + v_2 - v_8 + v_9 - v_{10} + v_{12} + \ldots = 0 \tag{8}$$

Das ganze so zu bildende Coëfficienten-System ist in folgender Tabelle enthalten:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
a	.	-1	$+1$	-1	$+1$	.	.	$+1$	-1	$+1$	-1	.
b	-1	$+1$	.	.	.	.	.	-1	$+1$	-1	.	$+1$
c	-1	.	$+1$	-1	$+1$	.	.	.	.	.	-1	$+1$
d	.	-1	$+1$	-1	.	$+1$	-1	$+1$	.	.	.	.
f	.	-1	$+1$	.	.	.	.	$+1$	-1	.	.	.

(9)

Dieses giebt $[a\,a] = (-1)^2 + (+1)^2 + \ldots = +8$

$[a\,b] = (-1)\,(+1) + \ldots \quad = -4$

Das ganze derartige Coëfficienten-System ist:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \underline{+8} & -4 & +4 & +4 & +4 \\ & \underline{+6} & +2 & -2 & -3 \\ & & \underline{+6} & +2 & +1 \\ & & & \underline{+6} & +3 \\ & & & & \underline{+4} \end{array}\right\} \tag{10}$$

Durch allmähliche Elimination erhält man:

$$\left.\begin{array}{cccc} \underline{+4} & +4 & 0 & -1 \\ & \underline{+4} & 0 & -1 \\ & & \underline{+4} & +1 \\ & & & \underline{+2} \end{array}\right\} \tag{10$_a$}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{0} & 0 & 0 \\ & \underline{+4} & +1 \\ & & \underline{+1{,}75} \end{array}\right\} \tag{10$_b$}$$

$$\underline{+1{,}50} = \frac{1}{P} \text{ für die Seite } s, \text{ mit zwei Diagonalen.}$$

Wenn nun μ der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung ist, so ist der mittlere Fehler des Verhältnisses $s:b$, oder der sogenannte relative Fehler der trigonometrischen Übertragung von b nach s folgendes:

$$\mu\,(s) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{1{,}50} \tag{11}$$

Nach diesem nehmen wir an, dass die Diagonale d' nicht gemessen sei, dann fällt die Seiten-Gleichung a) und die zweite Dreiecks-Gleichung c) fort, im übrigen bleibt die Rechnung wie vorhin und giebt:

	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12
a	−1	+1	.	.	.	.	−1	+1	−1	+1
b	.	−1	+1	−1	+1	−1	+1	.	.	.
f	.	−1	+1	.	.	.	+1	−1	.	.

$$\begin{array}{ccc}
\underline{+6} & -2 & -3 \\
 & \underline{+6} & +3 \\
 & & \underline{+4} \\
 & \underline{+5{,}333} & \overline{+2{,}000} \\
 & & \underline{+2{,}500} \\
 & & +1{,}750 = \dfrac{1}{P} \text{ für } s, \text{ mit } \textit{einer} \text{ Diagonale } d.
\end{array}$$

Nachdem wir diesen Fall in aller Ausführlichkeit vorgerechnet haben, mag es genügen, für die beiden anderen Fälle s' und s'' die Ergebnisse mitzuteilen, wie in folgender Zusammenstellung geschieht:

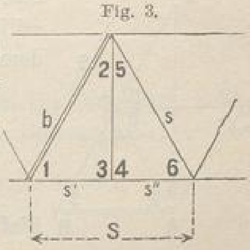
Berechnete Seite	mit *einer* Diagonale d	mit *zwei* Diagonalen d und d'	
s	$\frac{1}{P} = 1{,}75$	$\frac{1}{P} = 1{,}50$	$\sqrt{\frac{1{,}75}{1{,}50}} = 1{,}080$
s'	$\frac{1}{P'} = 4{,}00$	$\frac{1}{P'} = 3{,}75$	$\sqrt{\frac{4{,}00}{3{,}75}} = 1{,}033$
s''	$\frac{1}{P''} = 3{,}75$	$\frac{1}{P''} = 3{,}75$	

Wie man hieraus sieht, ist der Genauigkeits-Gewinn durch Hinzunehmen der zweiten Diagonale nicht bedeutend. Bei s'' ändert die zweite Diagonale d' überhaupt nichts, wie auch aus Fig. 2. S. 128 unmittelbar zu ersehen ist.

In der letzten Spalte vorstehender Zusammenstellung sind die Fehler-Verhältnisse 1,080 und 1,033 für beide Fälle angegeben, es ist also der Genauigkeits-Gewinn durch die zweite Diagonale nur bzw. 8% und 3%.

III. Ein weiterer Fragefall ist in Fig. 3. dargestellt.

Fig. 3.



Wenn die Grundlinie b fest gegeben ist, so kann man die Seiten s und $s' + s'' = S$ entweder aus *einem* Dreieck mit den Winkeln (1), (2 + 5), (6) oder aus *zwei* Dreiecken (1) (2) (3) und (4) (5) (6) bestimmen; es fragt sich, was das günstigere ist.

Da wir die Behandlung solcher Aufgaben nun genügend erläutert haben, schreiben wir sofort die Ergebnisse mit der Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w. (mit den Fehler-Bezeichnungen nach der Anmerkung zu S. 110). Die Gewichte der Winkel seien alle = 1.

Für die Seite s hat man aus *einem* Dreieck nach (11) § 18. S. 110:

$$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_1^2 + c_6^2 + c_1 c_6)} \tag{12}$$

Dagegen aus *beiden* Dreiecken:

$$\mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_1^2 + c_3^2 + c_1 c_3 + c_4^2 + c_6^2 + c_4 c_6)} \tag{13}$$

Für die andere Seite S hat man aus *einem* Dreieck:

$$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_{25}^2 + c_6^2 + c_{25} c_6)} \tag{14}$$

und aus *beiden* Dreiecken (wobei aber die Bedingung, dass $s' + s''$ eine Gerade sei, nicht mit enthalten ist):

$$m(s' + s'') =$$
$$\frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\left(s'^2c_2^2 + s''^2(c_1^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_5c_6) + S^2c_3^2 - s's''c_1c_2 + s'Sc_2c_3 + s''Sc_1c_3\right)} \tag{15}$$

Macht man das grosse Dreieck gleichseitig und die Querlinie rechtwinklig, also $c_1 = c_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}, c_2 = c_5 = \sqrt{3}$ und $c_3 = c_4 = 0$, so erhält man folgende Vergleichung:

aus *einem* Dreieck	aus *zwei* Dreiecken
$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)}$

$$\mu(s)_1 : \mu(s)_2 = 1 : 0{,}8165 \tag{16}$$

aus *einem* Dreieck	aus *zwei* Dreiecken
$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\mu(s' + s'') = \frac{\mu}{3}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)}$

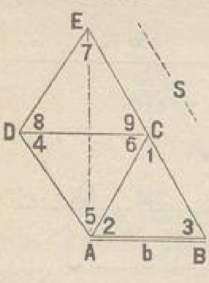
$$\mu(S) : \mu(s' + s'') = 1 : 1{,}291 \tag{17}$$

Es wird also zwar die Seite s günstiger aus zwei Dreiecken, dagegen S günstiger aus *einem* Dreieck bestimmt.

Hiernach kann man zu Fig. 3. sagen:

Die Einschaltung des Punktes bei 3. 4 in die Reihe der gleichseitigen Dreiecke wirkt ungünstig auf die Bestimmung der Längen-Erstreckung S der Kette, aber günstig auf die Basis-Übertragung von b nach s.

Fig. 4.



IV. In Fig. 4. zeigt ide Fehler-Berechnung, dass aus der Basis $AB = b$ die Seite $BE = S$ günstiger durch *drei* gleichseitige Dreiecke bestimmt wird, als durch *ein* Dreieck ABE, denn die Fehler-Berechnung giebt:

1) aus drei Dreiecken

$$S = BC + CE$$

$$S = b\,\frac{\sin(2)}{\sin(1)} + b\,\frac{\sin(3)\,\sin(5)\,\sin(8)}{\sin(1)\,\sin(4)\,\sin(7)}$$

hiefür wird, wenn alle Winkel $= 60°$ sind:

$$\mu(S) = 0{,}913\,\frac{\mu}{\varrho} \tag{18}$$

2) $S = BE$ als Hypotenuse des *einen* rechtwinkligen Dreiecks BAE mit $B = 60°$, $A = 90°$ und $E = 30°$ berechnet, giebt:

$$\mu(S) = 1{,}414 \frac{\mu}{\varrho} \tag{19}$$

Dieser Fehler ist also nahe das 1,5fache des zuerst berechneten Fehlers der Bestimmung aus drei Dreiecken.

V. Wir wollen hier noch eine andere kleine Genauigkeits-Untersuchung anschliessen, wie auch schon in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 470. Es soll der mittlere Fehler einer Richtung bestimmt werden, nur mit Rücksicht auf die Summen-Proben in dem Viereck, also *ohne* die Seiten-Gleichung. Man hat dann nach Fig. 2. S. 123 die schon unter (6), (8) und (9) enthaltenen Bedingungs-Gleichungen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
-v_1 & +v_2 & . & . & . & . & . & -v_8 & +v_9 & -v_{10} & . & +v_{12} & +w_1=0 \\
-v_1 & . & +v_3 & -v_4 & +v_5 & . & . & . & . & . & -v_{11} & +v_{12} & +w_2=0 \\
. & -v_2 & +v_3 & -v_4 & . & +v_6 & -v_7 & +v_8 & . & . & . & . & +w_3=0
\end{array}$$

Hiezu gehören die Normalgleichungen (deren Coëfficienten in (10) schon mit enthalten sind):

$$\begin{aligned}
+6\,k_1 + 2\,k_2 - 2\,k_3 + w_1 &= 0 \\
+2\,k_1 + 6\,k_2 + 2\,k_3 + w_2 &= 0 \\
-2\,k_1 + 2\,k_2 + 6\,k_3 + w_3 &= 0
\end{aligned}$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = \frac{-2\,w_1 + w_2 - w_3}{8}\,, \quad k_2 = \frac{w_1 - 2\,w_2 + w_3}{8}\,, \quad k_3 = \frac{-w_1 + w_2 - 2\,w_3}{8}$$

Nun ist $[v\,v] = -[w\,k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$-8\,[w\,k] = 2\,w_1^2 + 2\,w_2^2 + 2\,w_3^2 - 2\,w_1\,w_2 + 2\,w_1\,w_3 - 2\,w_2\,w_3 \tag{20}$$

Das kann man aber noch übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4, nämlich:

$$w_1 - w_2 + w_3 = w_4$$

Damit kann man (20) auf die Form bringen:

$$-8\,[w\,k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

und den mittleren Gewichtseinheits-Fehler m' erhält man, da drei unabhängige Bedingungs-Gleichungen benützt wurden:

$$m'^2 = \frac{[v\;v]}{3} = \frac{-[w\,k]}{3} = \frac{1}{3}\,\frac{[w^2]}{8} \tag{21}$$

wo nun unter $[w^2]$ die Summe *aller vier* in dem Vierecke möglicher Dreiecks-Summenproben bedeutet. Der Wert m' nach (21) ist ein mittlerer Richtungs-Fehler, der entsprechende mittlere Winkelfehler ist:

$$m = m'\sqrt{2} = \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \tag{22}$$

Hieran schliesst sich an der Schreiber'sche Satz über günstigste Gewichtsverteilung, welcher bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, § 48. behandelt worden ist.