



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

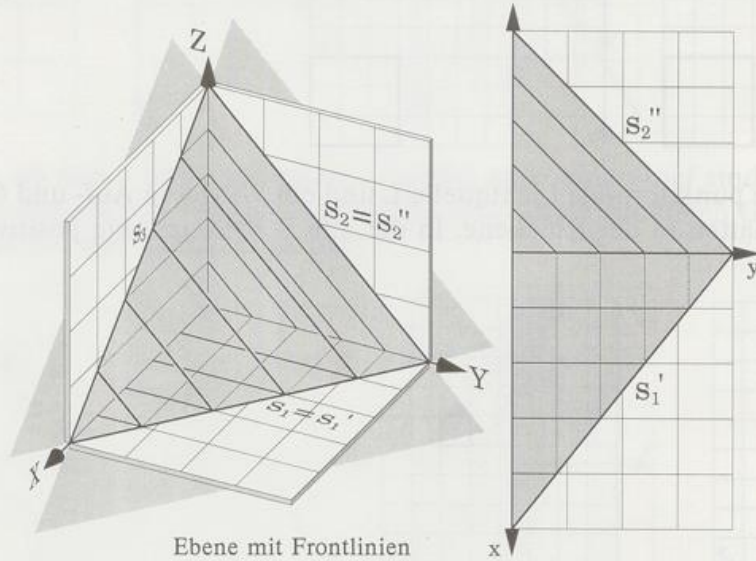
8.1.4 Darstellung von Ebenen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83924](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83924)

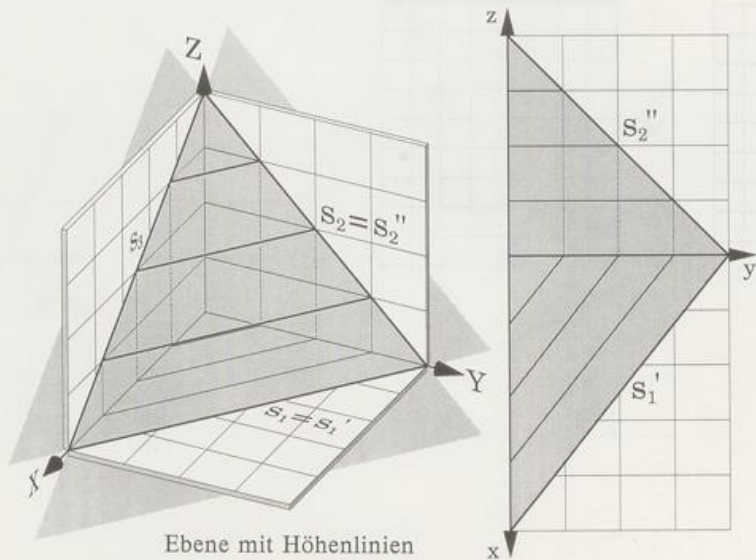
8.1.4 Darstellung von Ebenen

Eine Ebene ist in keiner Richtung begrenzt, sie läßt sich eigentlich – ebenso wie eine Gerade – nicht zeichnen. So wie man eine Gerade mit zwei Punkten oder einer Strecke andeutet, so verwendet man bei einer Ebene Figuren, die in ihr liegen und sie bestimmen: Parallelogramme, Dreiecke, sich schneidende oder parallele Geraden.

Wie eine Ebene im Koordinatensystem liegt, erkennt man am deutlichsten an ihren **Spurgeraden**, kurz Spuren – das sind die Geraden, in denen sich die Ebene und die Rißebenen schneiden. Gewöhnlich bezeichnet man die Spur in der Grundrißebene mit s_1 und die in der Aufrißebene mit s_2 . Weil s_1 in der Grundrißebene liegt, stimmen s_1 und s_1' überein. Weil s_2 in der Aufrißebene liegt, stimmen s_2 und s_2'' überein. s_2' und s_1'' fallen mit der y -Achse zusammen. Höhen- und Frontlinien verstärken den Raumeindruck.



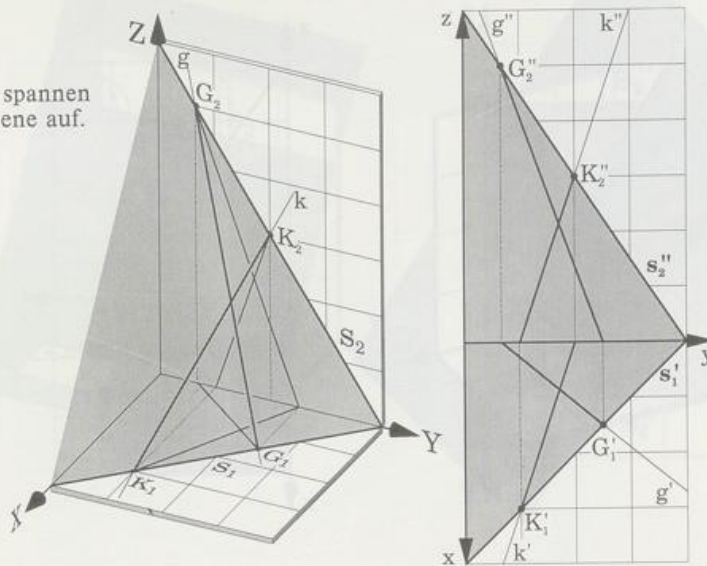
Ebene mit Frontlinien



Ebene mit Höhenlinien

Ist die Ebene nicht durch ihre Spuren, sondern durch andere Bestimmungsstücke gegeben, dann kennt man auf jeden Fall zwei Geraden g und h , die in ihr liegen. Haben diese Geraden Spurpunkte in der Grund- und Aufrißebene, so hat man damit die Spuren der Ebene: $s_1 = G_1H_1$ und $s_2 = G_2H_2$.

g und k spannen eine Ebene auf.

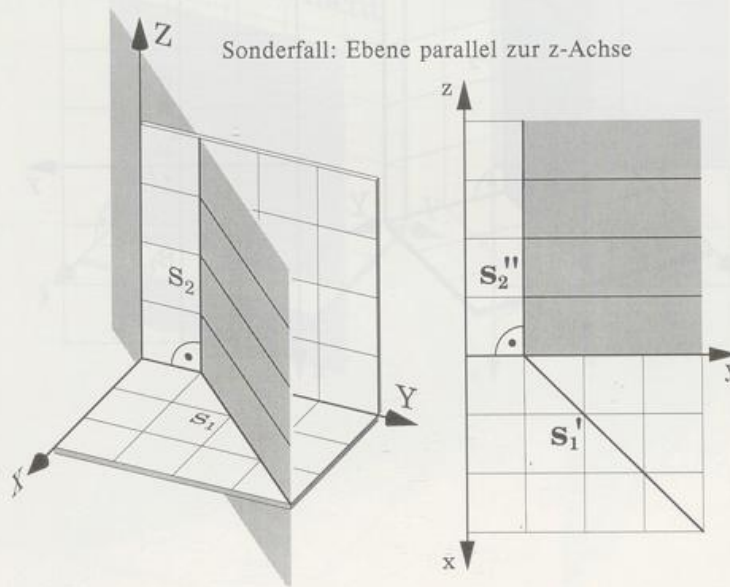


Sonderfälle

Besondere Lagen von Ebenen liegen vor, wenn eine Spur senkrecht oder parallel zur y -Achse ist.

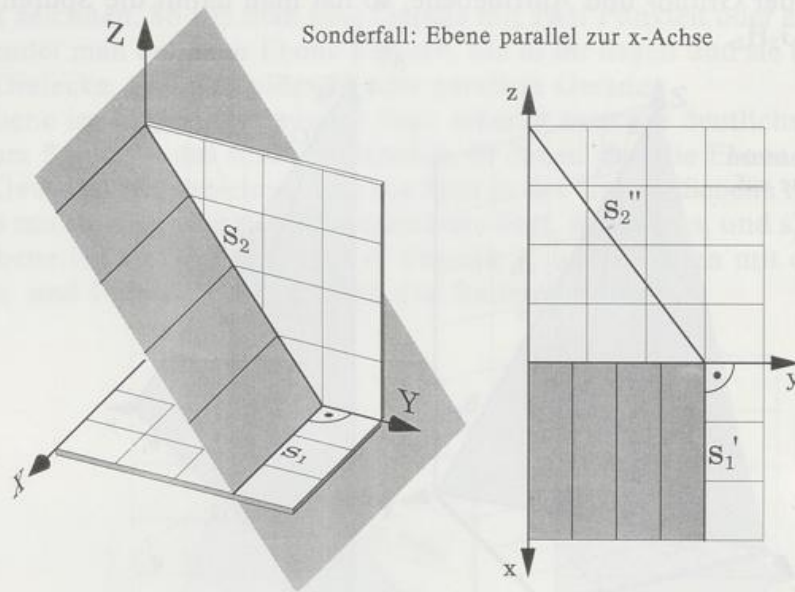
$s_2 = s_2'$ ist senkrecht zur y -Achse.

Die Ebene steht senkrecht auf der Grundrißebene, sie ist parallel zur z -Achse.



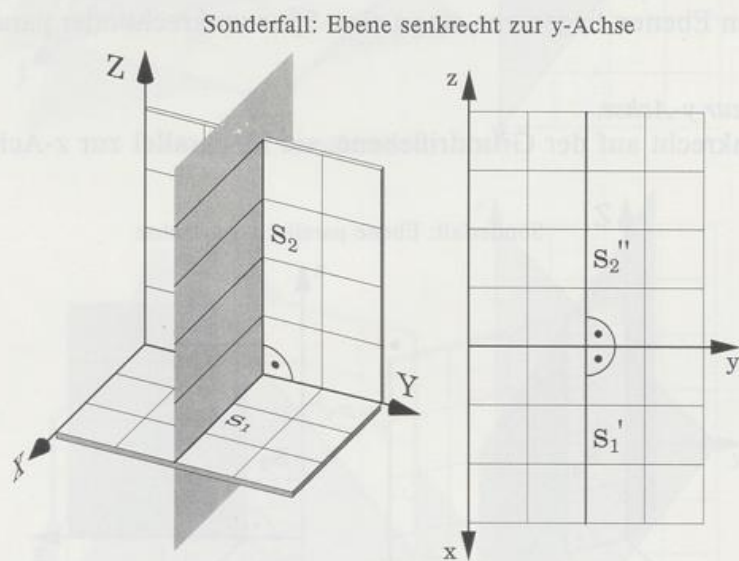
$s_1 = s_1'$ ist senkrecht zur y -Achse.

Die Ebene steht senkrecht auf der Aufrißebene, sie ist parallel zur x -Achse.

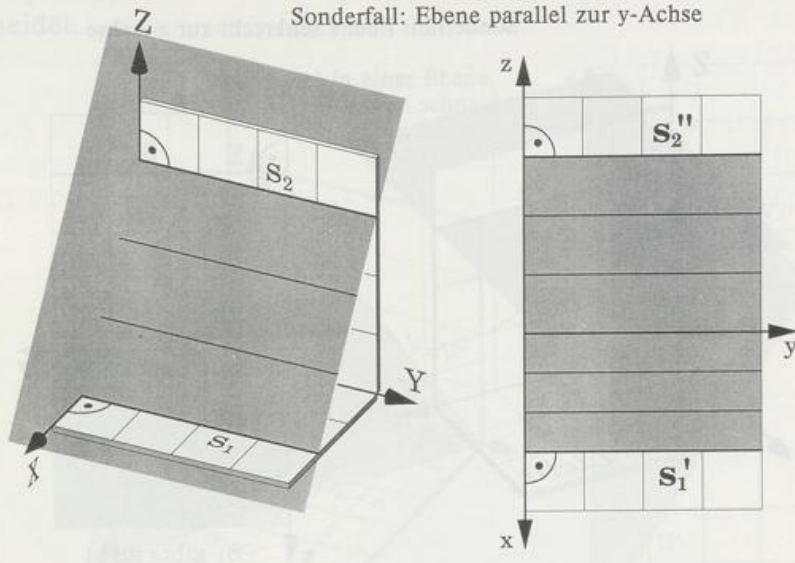


s_1 und s_1'' sind senkrecht zur y -Achse.

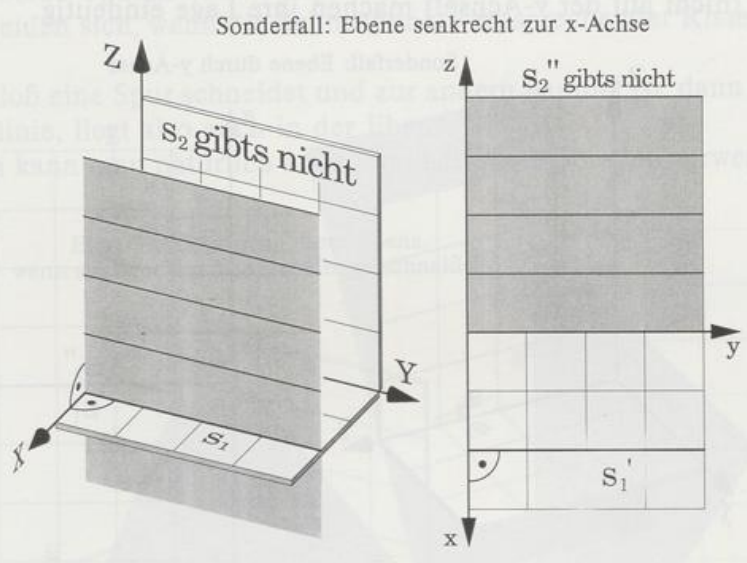
Die Ebene steht senkrecht auf der y -Achse, sie ist parallel zur Seitenrißebene.



s_1 und s_2'' sind parallel zur y-Achse.
Die Ebene ist parallel zur y-Achse.

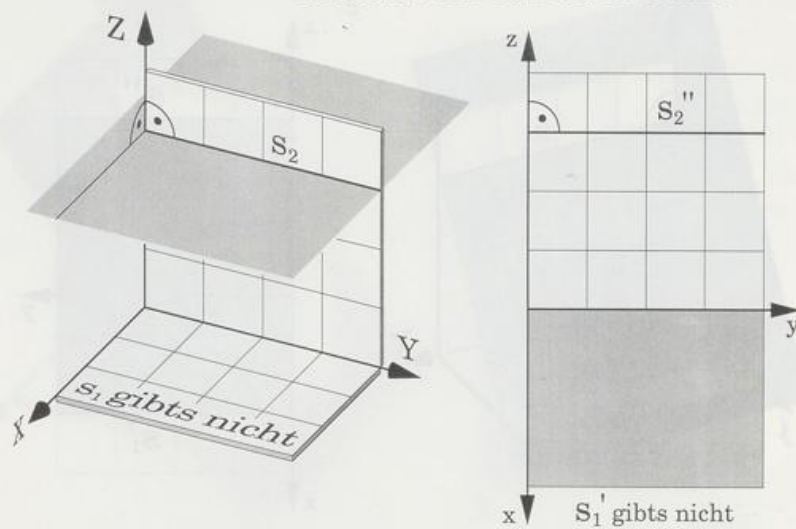


s_1 ist parallel zur y-Achse, und s_2'' existiert nicht.
Die Ebene ist parallel zur Aufrißebene.



s_2'' ist parallel zur y-Achse, und s_1' existiert nicht.
Die Ebene ist parallel zur Grundrißebene.

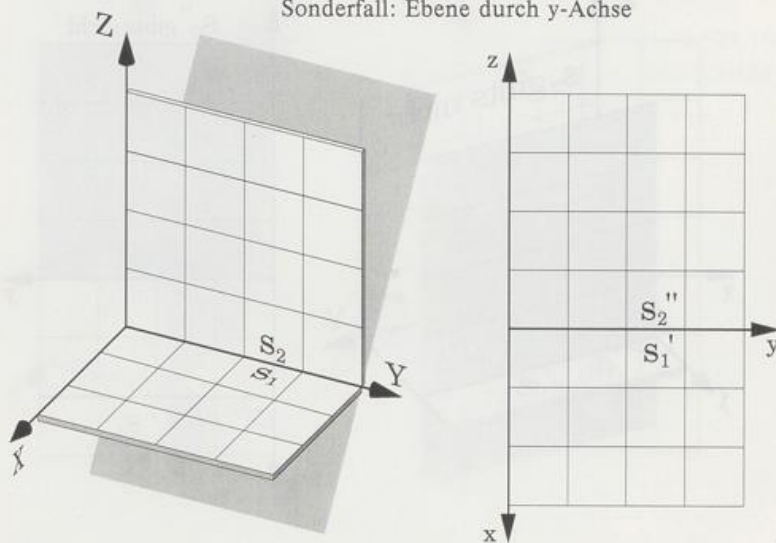
Sonderfall: Ebene senkrecht zur z-Achse



s_1 und s_2' fallen mit der y-Achse zusammen.

Die Ebene enthält die y-Achse. Damit liegt die Ebene noch nicht fest. Erst der Seitenriß oder ein Punkt (nicht auf der y-Achse!) machen ihre Lage eindeutig.

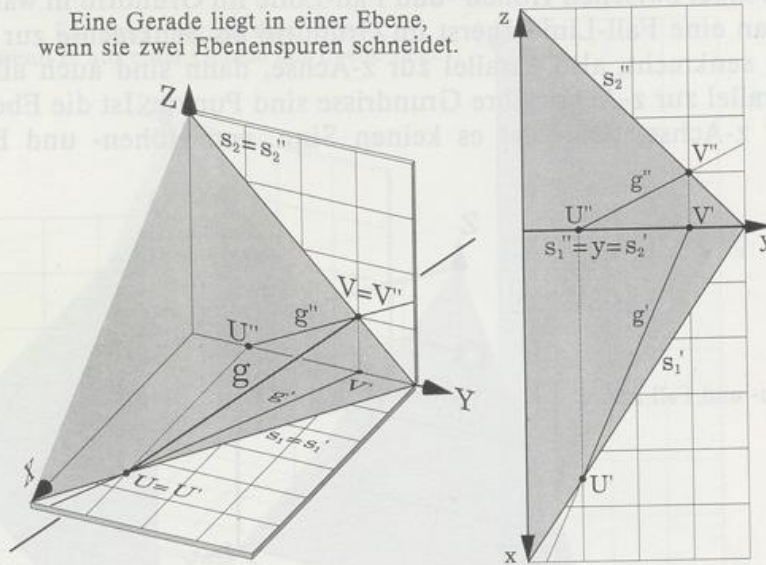
Sonderfall: Ebene durch y-Achse



Gerade in der Ebene

Gegeben ist eine Gerade g durch ihre Risse g' und g'' sowie eine Ebene E durch ihre Spuren s_1 und s_2 . Um zu prüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt, untersucht man, ob sie die Spuren der Ebene schneidet.

Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie zwei Ebenenspuren schneidet.

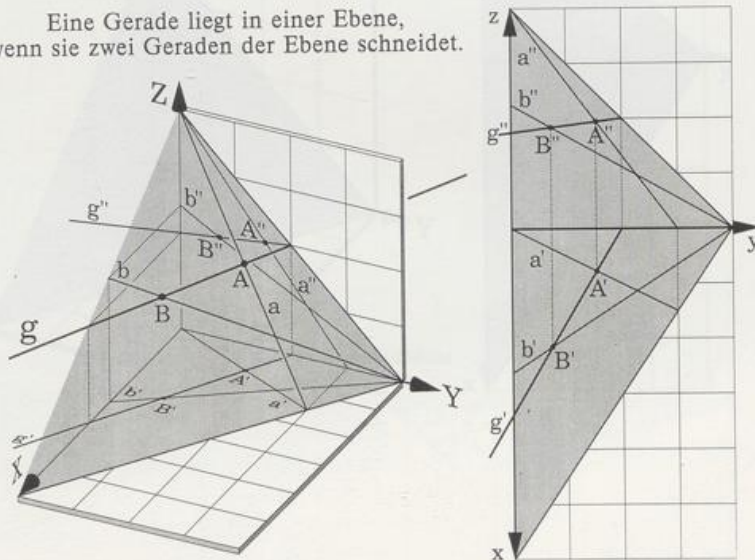


Wenn die Gerade beide Spuren schneidet, dann liegt sie in der Ebene. Zur Erinnerung: Zwei Geraden schneiden sich, wenn die Schnittpunkte entsprechender Risse auf *einem* Ordner liegen.

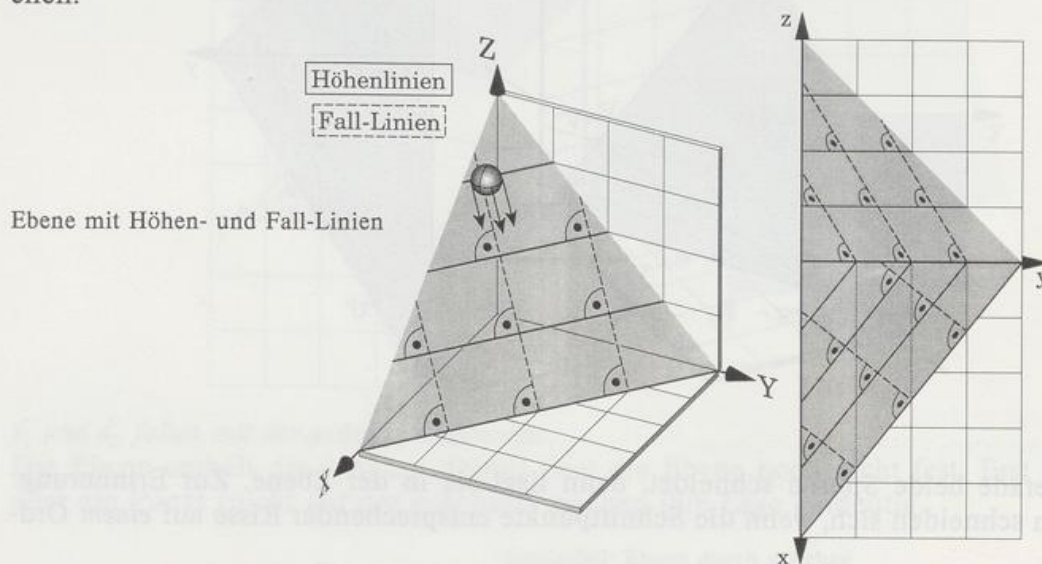
Wenn die Gerade bloß eine Spur schneidet und zur andern parallel ist, dann ist sie entweder Höhen- oder Frontlinie, liegt also auch in der Ebene.

Anstelle der Spuren kann man natürlich auch zwei beliebige Geraden verwenden, die in der Ebene liegen.

Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie zwei Geraden der Ebene schneidet.



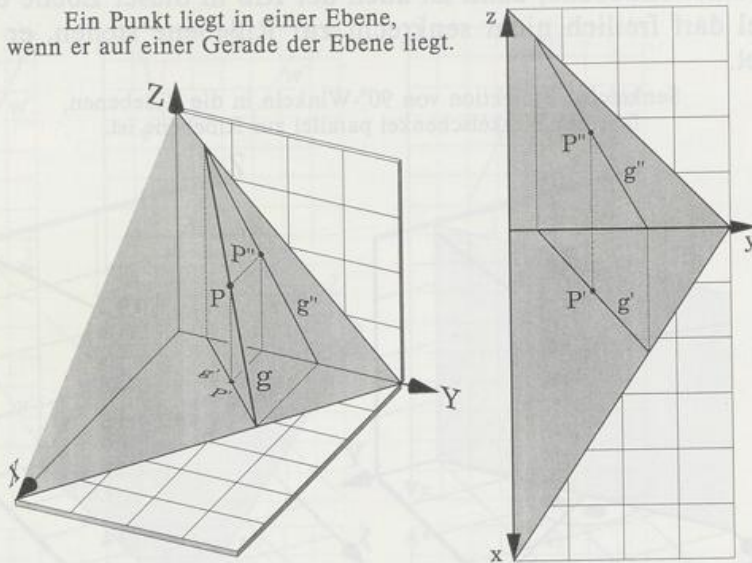
Zu den besonderen Geraden einer Ebene gehören die Fall-Linien. Sie stehen senkrecht auf den Höhenlinien und damit auch auf der Grundrißspur s_1 . Der Name rührt daher, daß eine Kugel auf einer Fall-Linie hinunterrollt, wenn die Schwerkraft (wie üblich) senkrecht nach unten gerichtet ist. Weil die Höhenlinien parallel zur Grundrißebene verlaufen, sieht man den rechten Winkel zwischen Höhen- und Fall-Linie im Grundriß in wahrer Größe. Deshalb konstruiert man eine Fall-Linie zuerst im Grundriß als Senkrechte zur Spur s'_1 . Ist die Ebene senkrecht, also parallel zur z-Achse, dann sind auch alle Fall-Linien senkrecht, also parallel zur z-Achse; ihre Grundrisse sind Punkte. Ist die Ebene waagrecht, also senkrecht zur z-Achse, dann hat es keinen Sinn, von Höhen- und Fall-Linien zu sprechen.



Punkt und Ebene

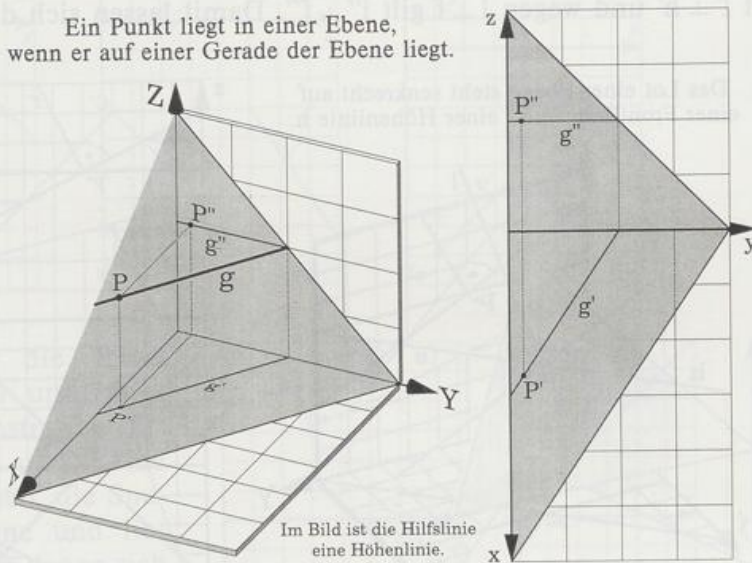
Ist eine Ebene E durch ihre Spuren gegeben, so läßt sich schnell entscheiden, ob ein Punkt P in ihr liegt: Man zeichnet eine Hilfsgerade g , die so in E liegt, daß einer ihrer Risse durch den entsprechenden Punktriß geht:

Ein Punkt liegt in einer Ebene, wenn er auf einer Gerade der Ebene liegt.



g' durch P' im Grundriß oder g'' durch P'' im Aufriß. Liegt dann der andere Punktriß auf dem andern Geradenriß, so liegt der Punkt auf der Hilfsgerade und damit in der Ebene. Als Hilfsgerade verwendet man gern eine Höhen- oder Frontlinie.

Ein Punkt liegt in einer Ebene, wenn er auf einer Gerade der Ebene liegt.

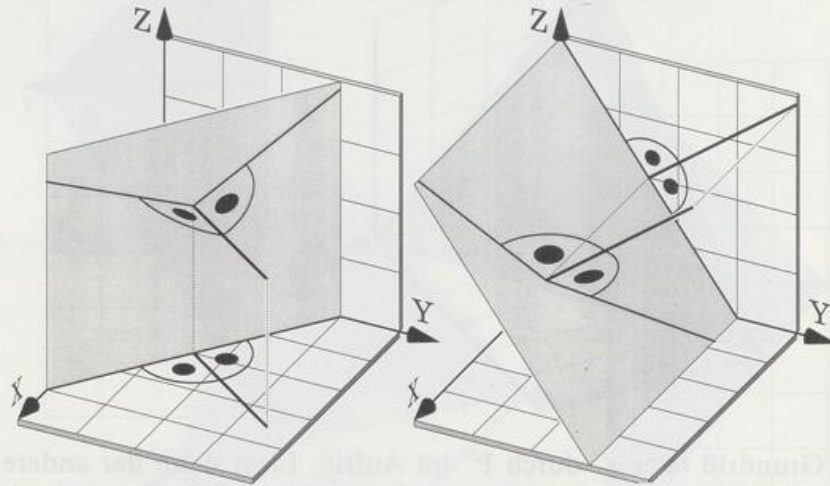


Im Bild ist die Hilfslinie eine Höhenlinie.

Loterrichten

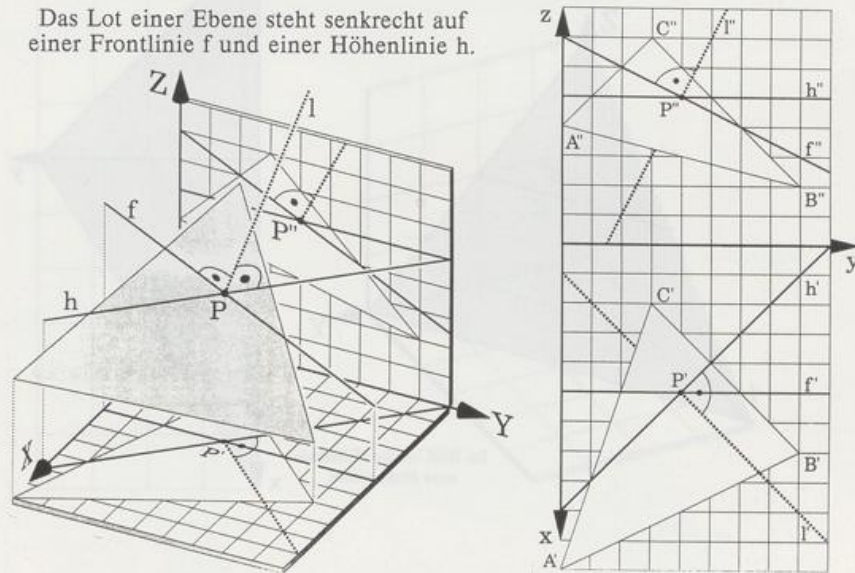
Eine Gerade, die senkrecht auf einer Ebene steht, heißt Lot dieser Ebene. Ein Lot l durch den Ebenenpunkt P steht senkrecht auf jeder Gerade der Ebene, die durch P geht, also auch auf der Höhenlinie h und der Frontlinie f durch P . Es gilt: Ist ein Schenkel eines 90° -Winkels parallel zu einer Rißebeane, dann ist auch der Riß in dieser Ebene ein 90° -Winkel; der andere Schenkel darf freilich nicht senkrecht zur Rißebeane stehen, er würde ja sonst als Punkt abgebildet.

Senkrechte Projektion von 90° -Winkeln in die Rißebeanen, falls ein Winkelschenkel parallel zur Rißebeane ist.



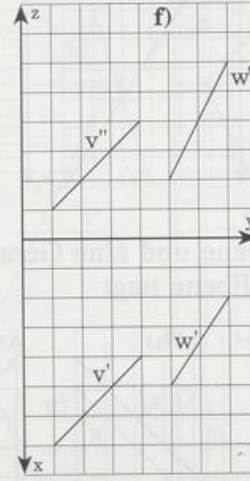
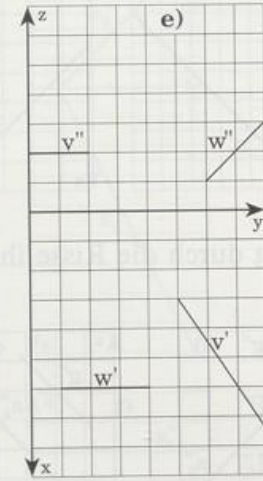
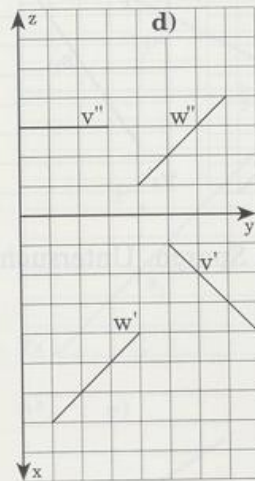
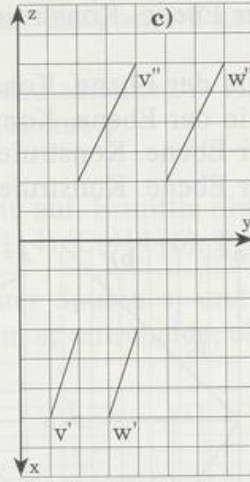
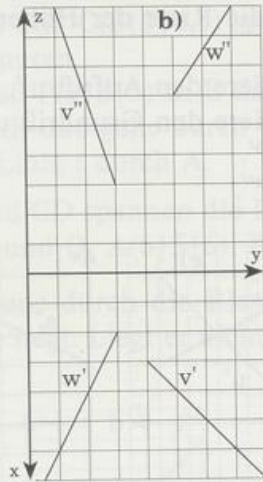
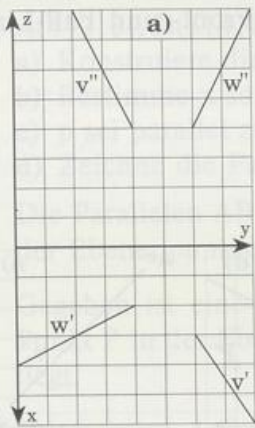
Wegen $l \perp h$ gilt $l' \perp h'$ und wegen $l \perp f$ gilt $l'' \perp f''$. Damit lassen sich die Risse des Lots l konstruieren.

Das Lot einer Ebene steht senkrecht auf einer Frontlinie f und einer Höhenlinie h .

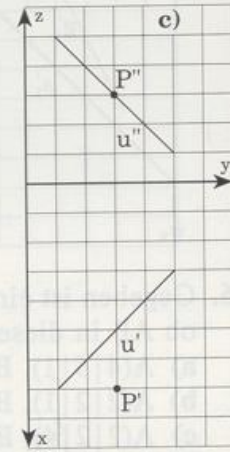
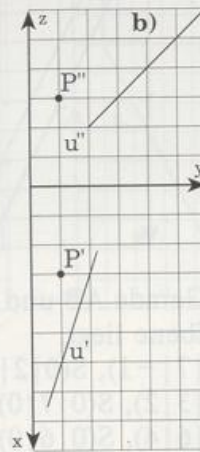
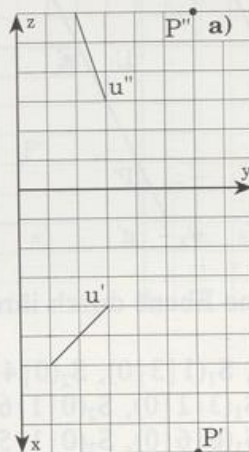


Aufgaben

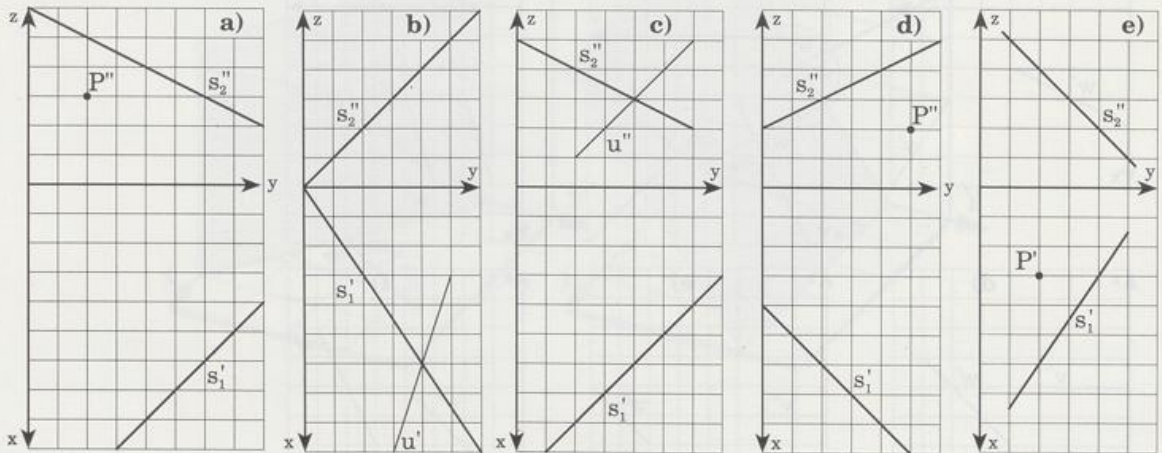
1. Gegeben sind die Risse zweier Geraden v und w . Konstruiere für den Fall, daß u und v eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.



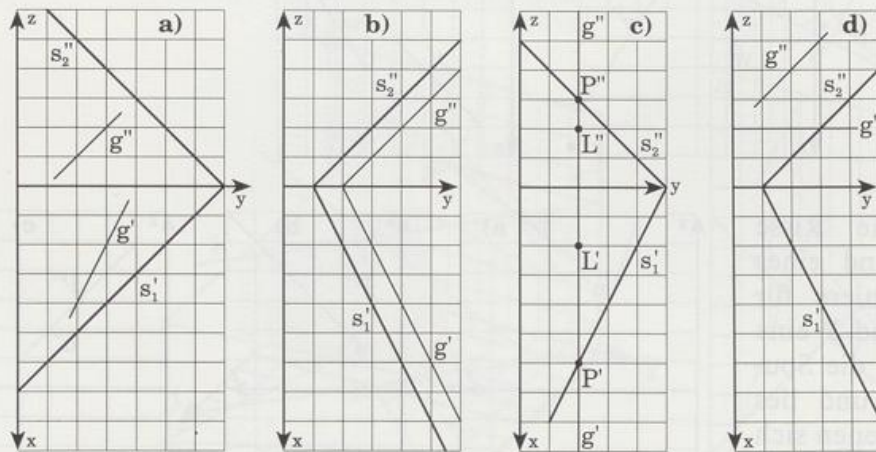
2. Gegeben sind die Risse einer Gerade u und eines Punktes P . Konstruiere für den Fall, daß u und P eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.



3. A, B und C spannen eine Ebene auf. Konstruiere die Spuren dieser Ebene.
- $A(3|2|6)$, $B(2|6|4)$, $C(1|4|8)$
 - $A(6|4|0,5)$, $B(1,5|2,5|2)$, $C(3|2|1)$
 - $A(2,5|1|1,5)$, $B(7,5|4|0,5)$, $C(1,5|2|2,5)$
4. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2 .
- P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere die Risse der Höhen-, Front- und Fall-Linie durch P.
 - u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Aufriß u'' .
 - u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Grundriß u' .
 - P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P' .
 - P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P'' .

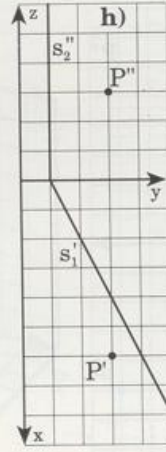
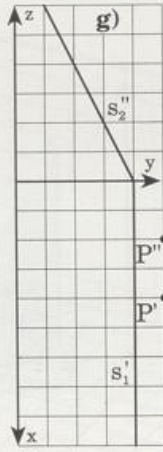
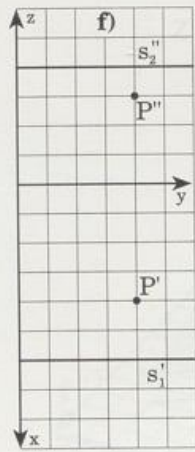
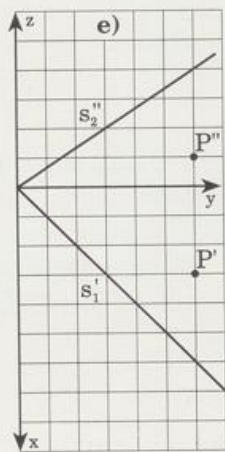
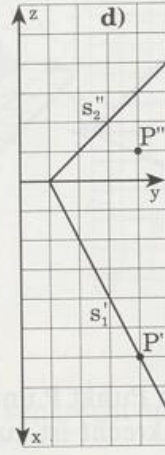
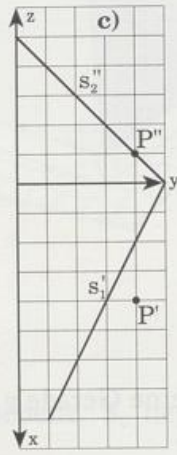
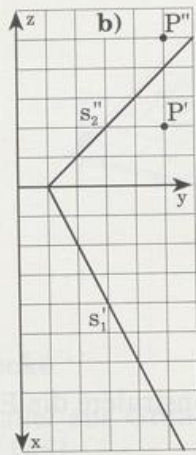
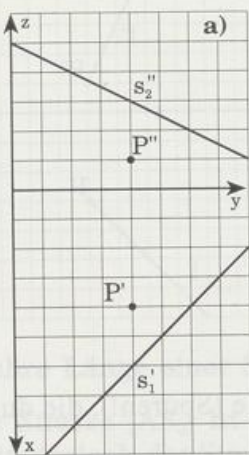


5. Gegeben sind eine Ebene und eine Gerade g durch die Risse ihrer Spuren. Untersuche, ob die Gerade in der Ebene liegt.



6. Gegeben ist eine Gerade AB und eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 . Entscheide, ob AB in dieser Ebene liegt.
- $A(4|5|1)$, $B(0|7|-1)$, $S(0|2|0)$, $S_1(1|3|0)$, $S_2(0|4|1)$
 - $A(2|2|1)$, $B(1|3|2)$, $S(0|7|0)$, $S_1(3|1|0)$, $S_2(0|1|6)$
 - $A(2|2|4)$, $B(2|6|4)$, $S(0|6|0)$, $S_1(6|6|0)$, $S_2(0|1|5)$

7. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie einer ihrer Punkte P . Konstruiere die Höhenlinie h , die Frontlinie f und die Fall-Linie t , die durch P geht.
- a) $P(3|5|?)$, $S(0|4|0)$, $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|6|1)$
 b) $P(?|4|2)$, $S(0|8|0)$, $S_1(5|3|0)$, $S_2(0|2|3)$
 c) $P(?|4|2)$, $S(0|6|0)$, $S_1(5|1|0)$, $S_2(0|6|6)$
8. $A(4|2|3)$, $B(3|4|1,5)$ und $C(2|3|4,5)$ spannen die Ebene E auf.
 a) Konstruiere die Spuren.
 b) Bestimme x so, daß $P(x|5|3)$ in E liegt, und zeichne die Höhenlinie h durch P .
 c) p sei parallel zu AB und gehe durch C . Zeichne p .
 d) Zeichne die Fall-Linie t durch A .
9. Die Parallelen AB und CD spannen die Ebene auf. Ermittle die fehlenden Koordinaten der Ebenenpunkte P und Q . $A(6|5|6)$, $B(2|1|4)$, $C(4|1|6)$, $P(p|-1|4)$, $Q(2|3|q)$
10. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2 . Untersuche, ob der Punkt P in der Ebene liegt. Liegt er nicht drin, so entscheide, ob er drunter oder drüber liegt.



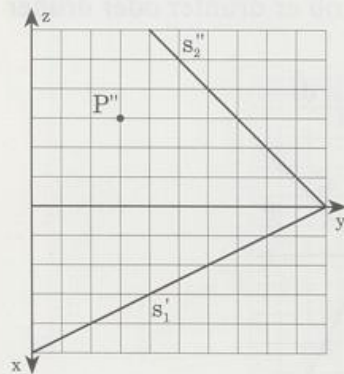
11. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie ein Punkt P in ihr. Prüfe, ob die Gerade AB und KL parallel zur Ebene sind, indem du durch P eine Parallele zu AB und KL legst.

$$S(0|0|0), S_1(9|6|0), S_2(0|6|6), P(1,5|5|4), \\ A(6|0|0), B(3|2|4), K(0|3|0), L(3|5|2)$$

12. Gegeben ist eine Ebene durch die Punkte A , B und C sowie ein Punkt P in ihr: $A(9|1|4)$, $B(7|8|1,5)$, $C(1|5|6)$, $P(5|4|?)$.

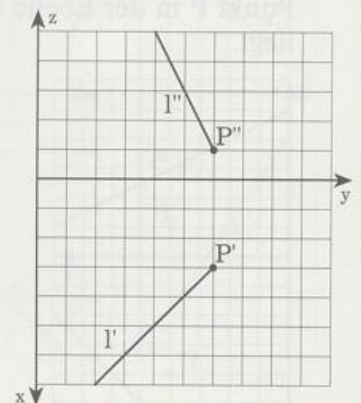
Konstruiere das Lot von E durch P ; in welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene?

13. Gegeben sind die Spuren einer Ebene sowie ein Ebenenpunkt P . Konstruiere das Lot von E durch P . In welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene, in welchem Punkt R die Grundrißebene?



Zu 13.

Zu 14.



15. Gegeben ist ein Punkt P und eine Gerade g . Konstruiere die Ebene (Spuren!), die durch P geht und senkrecht ist zu g .

