Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

1.2 Die X-Figur

50. Im Trapez ABCD gilt a = 54, b = 36, c = 18 und d = 28. BC und AD schneiden sich in T.

a) Berechne $\overline{CT}$ und $\overline{DT}$.

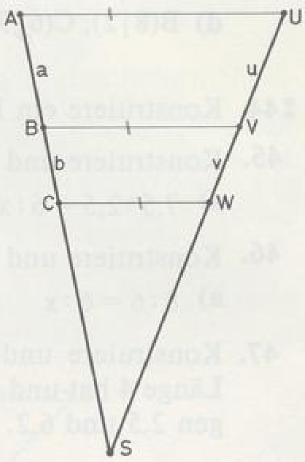
b) Die Parallele zu AD durch C schneidet AB in E und BD in F.
Berechne $\overline{CF} : \overline{FE}$.

51. *Flächenbeweis des 1. Strahlensatzes*

a) Zeige: Die Flächen der Dreiecke ABV und CBV verhalten sich wie a : b.
Die Flächen der Dreiecke UVB und WVB verhalten sich wie u : v.

b) Zeige: Die Dreiecke ABV und UBV sind flächengleich, ebenso die Dreiecke CBV und WBV.

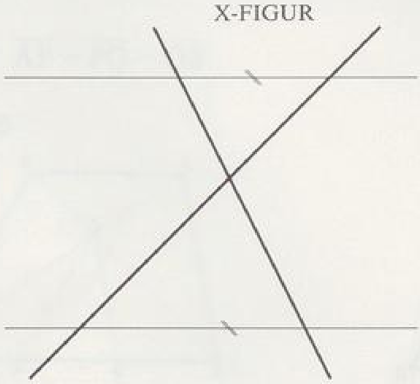
c) Folgere aus **a)** und **b)** die Proportion a : b = u : v.

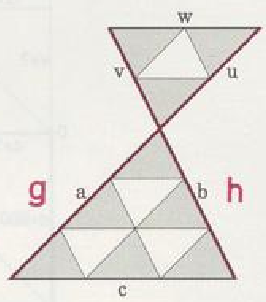


1.2 Die X-Figur

Die Strahlensätze gelten auch bei der »X-Figur« – darunter verstehen wir eine Geradenkreuzung, die von zwei Parallelen so geschnitten wird, daß der Kreuzpunkt dazwischen liegt. Auch diese X-Figur pflastern wir wieder mit kongruenten Dreiecken aus. Wie bei der V-Figur lesen wir die Strahlensätze direkt ab.

X-FIGUR





Kommen in den Proportionen die parallelen Querstrecken nicht vor, so spricht man wieder vom 1. Strahlensatz.

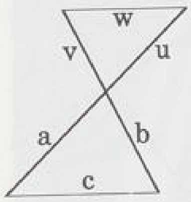
1. Strahlensatz

$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{u} = \dfrac{b}{v} & \text{oder auch} \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{u}{v};\ h = v + b \\[2ex] \dfrac{g}{u} = \dfrac{h}{v} & \text{oder auch} \quad \dfrac{g}{h} = \dfrac{u}{v};\ g = a + u \end{cases}$$

Kommen in den Proportionen die parallelen Querstrecken vor, so spricht man wieder vom 2. Strahlensatz.

2. Strahlensatz

$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{w} = \dfrac{a}{u} & \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{w}{u} \\[2ex] \dfrac{c}{w} = \dfrac{b}{v} & \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{b} = \dfrac{w}{v} \end{cases}$$

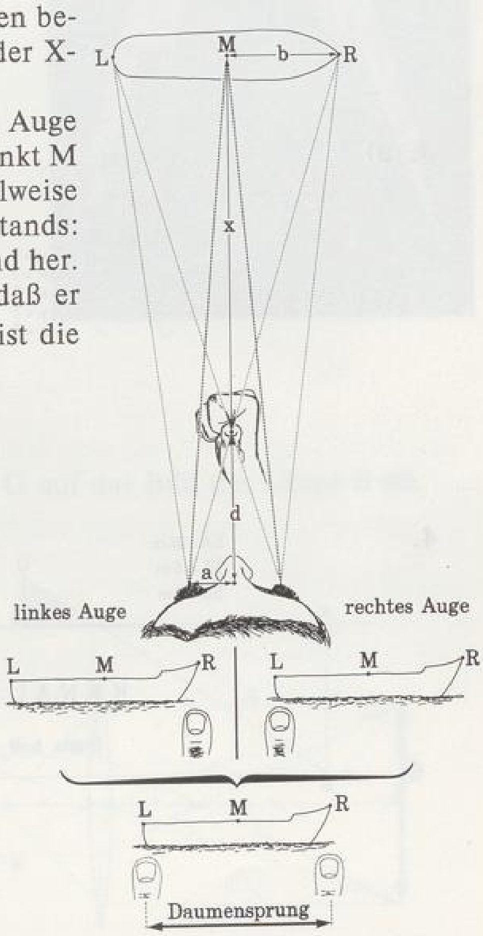


Ein einfaches Verfahren zur Schätzung von Entfernungen beruht auf dem »Daumensprung«. Die Strahlensätze an der X-Figur erklären, wie es funktioniert.
Schaut man abwechselnd mit dem linken und rechten Auge über seinen ausgestreckten Daumen auf einen festen Punkt M eines Gegenstands, so deckt sich der Daumen wechselweise mit zwei verschiedenen Punkten L und R des Gegenstands: der Daumen springt scheinbar zwischen L und R hin und her. Hält man den Daumen gerade so weit vor die Nase, daß er eine Strecke von bekannter Länge $\overline{LR}$ überspringt, so ist die Entfernung x des Gegenstands im Nu bestimmt.
Beispiel:

Schifflänge (= Daumensprung): $\overline{LR} = 240$ m
Abstand Daumen–Stirn: $d = 550$ mm
Augenabstand: $2a = 66$ mm

Proportion an der X-Figur: $\dfrac{x}{120\text{ m}} = \dfrac{550\text{ mm}}{33\text{ mm}}$, also

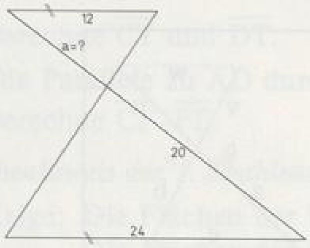
$$x = \frac{50}{3} \cdot 120\text{ m} = 2\,000\text{ m}$$



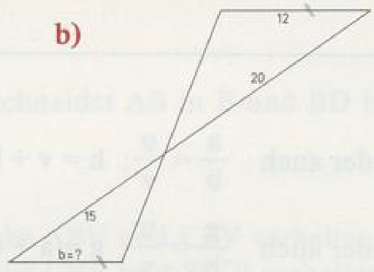
Übern Daumen gepeilt ist das Schiff 2 km weit weg.

Aufgaben

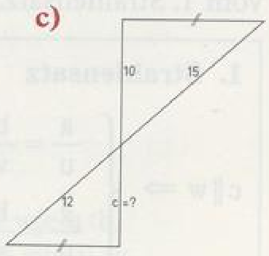
1. a)



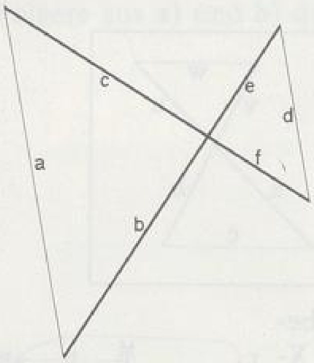
b)



c)

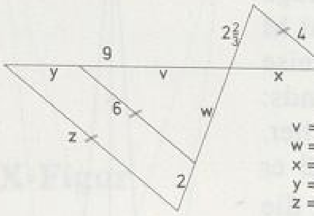


2.

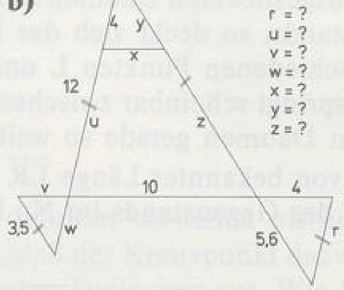


	Streckenlängen								
	a	b	c	d	e	f	c+f	b+e	e+f+d
a)	4,5	7,5	?	?	5	4			
b)		3,5	2		?	4,8			
c)	4,5			3	?			12,5	
d)	4,5	?	?	6	?	?	7	10	
●e)	3	4	5	?	?	?			18

3. a)

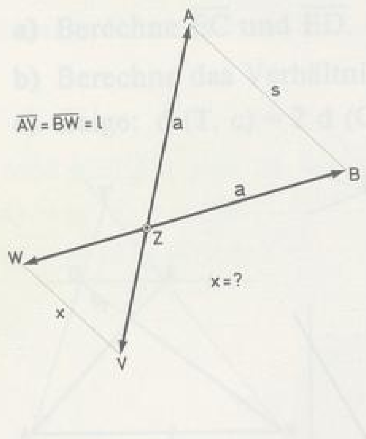


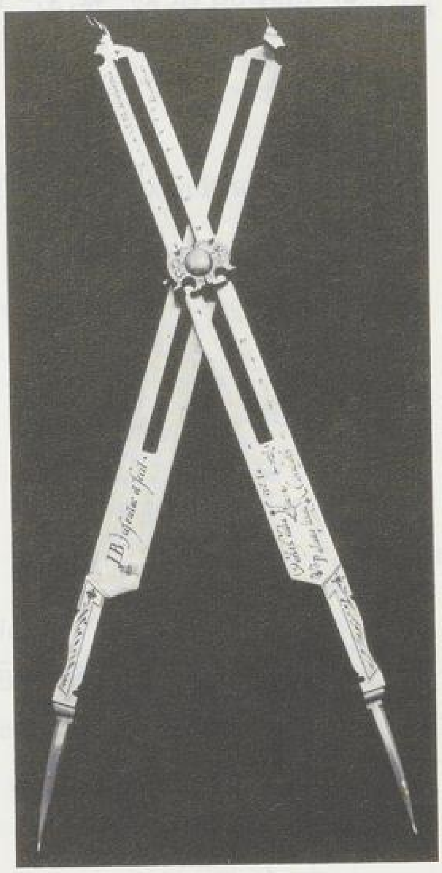
b)



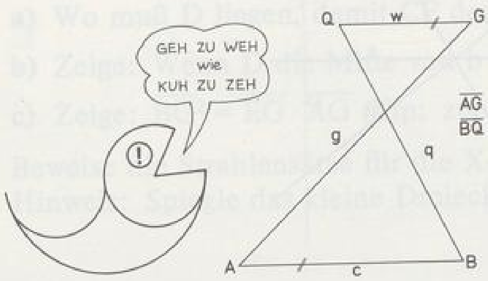
4.

5. Der Reduktionszirkel von Jobst BÜRGI (1552 bis 1632) dient dazu, Strecken alle im selben Maßstab zu verkleinern (reduzieren) oder zu vergrößern. Zwei gleich lange Stangen der Länge l sind in einem Punkt Z drehbar so miteinander verbunden, daß $\overline{ZA} = \overline{ZB} = a$ ist. An einer Figur greift man mit den Spitzen A und B eine Strecke der Länge s ab.
Bestimme x in Abhängigkeit von l, a und s.





6. Schreibe Geobolds weitreichende Erkenntnis als Proportion. Hat er recht? Warum?

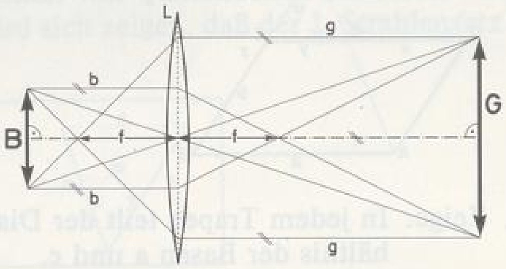


7. LINSENFORMELN
Eine Linse L bildet einen Gegenstand der Länge G auf das Bild der Länge B ab. Leite die Abbildungsformeln her:

a) $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$

b) $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$.

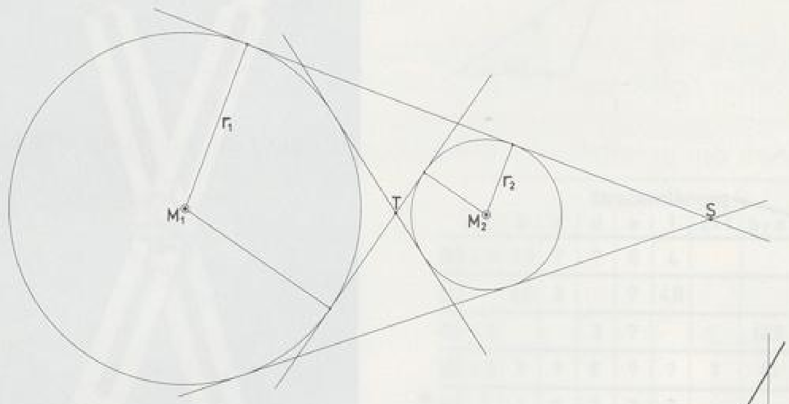
c) Berechne G.
Im Bild ist B = 4, b = 6 und f = 4.



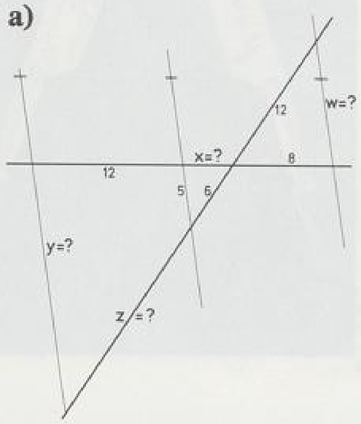
8. a) Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 und die Zentrale $z = \overline{M_1M_2}$. Berechne $x = \overline{M_1T}$ und $y = \overline{M_1S}$.

b) Was ergibt sich, wenn die Kreise gleich groß sind, wenn sie sich berühren (von außen) und wenn sie sich schneiden.

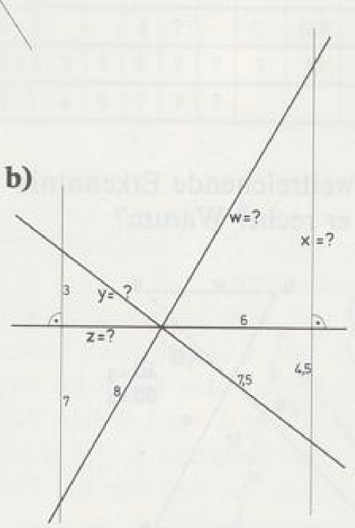
c) Im Bild ist $x = 42$, $y = 105$ und $z = 60$. Berechne das Verhältnis der Radien.



9. a)

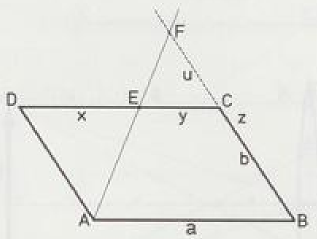


b)



10. E liegt irgendwo auf der Seite [DC] des Parallelogramms ABCD mit den Seiten a und b.

Zeige: Das Produkt von $x = \overline{DE}$ und $z = \overline{BF}$ hängt nicht von der Lage von E ab. Wie groß ist es?



11. Zeige: In jedem Trapez teilt der Diagonalen-Schnittpunkt S die Diagonalen im Verhältnis der Basen a und c.

12. Ein Trapez ABCD hat die Grundseiten $a = 16$, $c = 12$ und die Höhe $h = 9$. Die verlängerten Schenkel schneiden sich in T, die Diagonalen in S.

a) Berechne die Abstände d (T, a) und d (T, c) des Punkts T von a bzw. c.

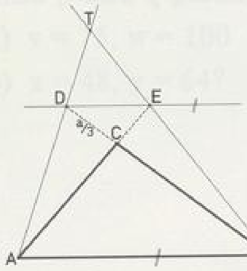
b) Berechne die Abstände d (S, a) und d (S, c).

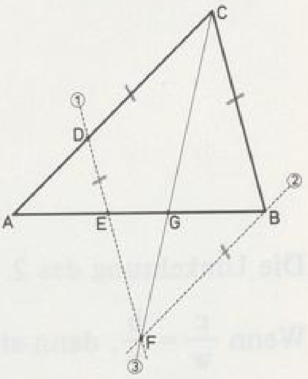
•**13.** Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 7{,}5$, $b = 6$ und $c = 10$. Ergänze die Figur wie im Bild.

a) Berechne $\overline{EC}$ und $\overline{ED}$.

b) Berechne das Verhältnis $\overline{TA} : \overline{TD}$.

c) Zeige: $d(T, c) = 2\,d(C, c)$, das heißt, von c ist T doppelt so weit weg wie C.





:**14.** D liegt irgendwo auf der Seite b des Dreiecks ABC.

a) Wo muß D liegen, damit CF den Winkel γ halbiert?

b) Zeige: Wenn D die Mitte von b ist, dann gilt $\overline{GB} = 2\,\overline{GE}$.

c) Zeige: $\overline{BG}^2 = \overline{EG} \cdot \overline{AG}$ (Tip: zuerst Proportion herstellen!)

15. Beweise die Strahlensätze für die X-Figur mit Hilfe der V-Figur.
Hinweis: Spiegle das kleine Dreieck am Scheitel.

1.3 Umkehrung der Strahlensätze

Bei den Strahlensätzen schließt man aus der Parallelität der Querstrecken auf bestimmte Streckenverhältnisse. Jetzt untersuchen wir, wann man aus der Gleichheit von Streckenverhältnissen, d. h. aus Proportionen, auf die Parallelität von Querstrecken schließen darf, ob man also die Strahlensätze umkehren kann. Es wird sich zeigen, daß der 1. Strahlensatz umkehrbar ist, nicht aber der zweite.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$$\frac{a}{u} = \frac{b}{v} \Rightarrow c \parallel w$$