Anschauliche Geometrie

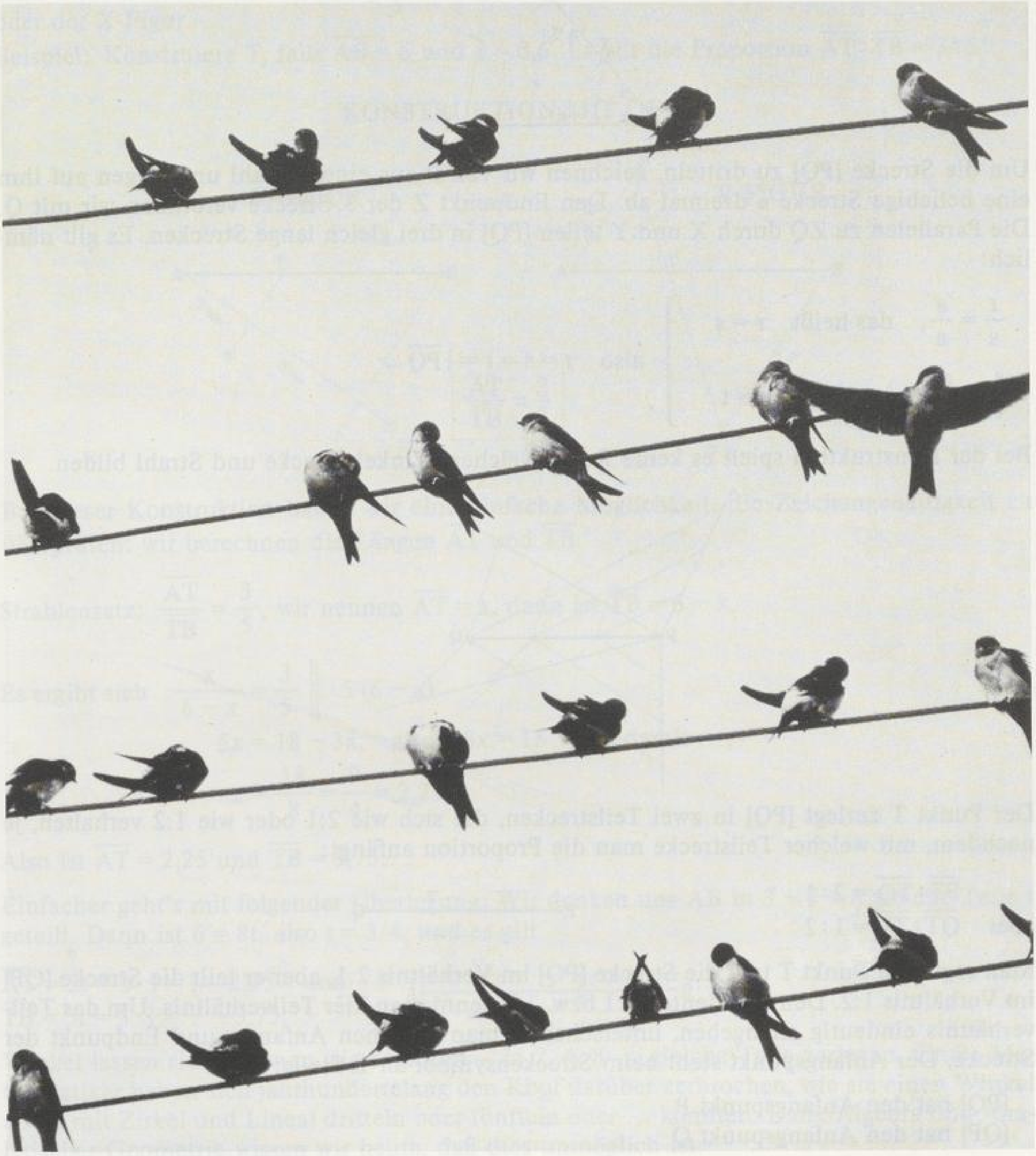
Barth, Friedrich

München, 1995

2. Kapitel: Teilung einer Strecke

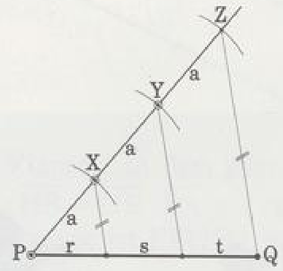
urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

2. Kapitel
Teilung einer Strecke



2.1 Teilverhältnis

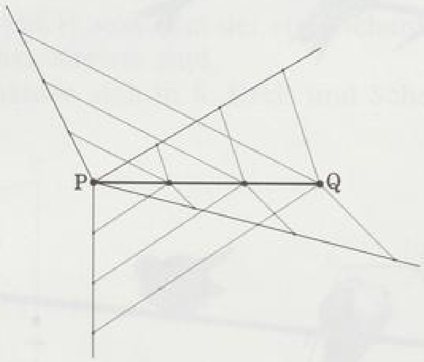
Eine der einfachsten Konstruktionen ist die Halbierung einer Strecke. Damit lassen sich Strecken auch in 4, 8, 16 ... gleiche Teile zerlegen. Wie aber teilt man eine Strecke mit Zirkel und Lineal in 3 oder 5 oder gar 37 gleiche Stücke? Die Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes hilft uns weiter.



Um die Strecke [PQ] zu dritteln, zeichnen wir von P aus einen Strahl und tragen auf ihm eine beliebige Strecke a dreimal ab. Den Endpunkt Z der 3. Strecke verbinden wir mit Q. Die Parallelen zu ZQ durch X und Y teilen [PQ] in drei gleich lange Strecken. Es gilt nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{r}{s} = \frac{a}{a}, & \text{das heißt} \quad r = s \\ \frac{s}{t} = \frac{a}{a}, & \text{das heißt} \quad s = t \end{array}\right\} \text{ also } \quad r = s = t = \tfrac{1}{3}\overline{PQ}$$

Bei der Konstruktion spielt es keine Rolle, welchen Winkel Strecke und Strahl bilden.



Der Punkt T zerlegt [PQ] in zwei Teilstrecken, die sich wie 2:1 oder wie 1:2 verhalten, je nachdem, mit welcher Teilstrecke man die Proportion anfängt:

$\overline{PT} : \overline{TQ} = 2 : 1,$

aber $\overline{QT} : \overline{TP} = 1 : 2$

Man sagt: Der Punkt T teilt die Strecke [PQ] im Verhältnis 2:1, aber er teilt die Strecke [QP] im Verhältnis 1:2. Den Quotienten 2:1 bzw. 1:2 nennt man hier Teilverhältnis. Um das Teilverhältnis eindeutig anzugeben, unterscheidet man zwischen Anfangs- und Endpunkt der Strecke. Der Anfangspunkt steht beim Streckensymbol an 1. Stelle:

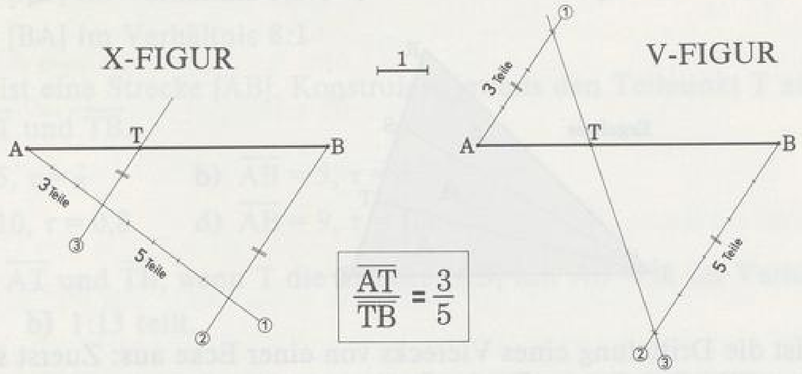
[PQ] hat den Anfangspunkt P
[QP] hat den Anfangspunkt Q

Definition:

> Liegt der Punkt $T \neq Q$ auf der Strecke [PQ] und wählt man P als Anfangspunkt,
>
> 
>
>
> dann heißt $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$ **Teilverhältnis** von T bezüglich [PQ].

Sind Strecke und Teilverhältnis gegeben, so findet man den Teilpunkt T mit der V-Figur oder der X-Figur.
Beispiel: Konstruiere T, falls $\overline{AB} = 6$ und $\tau = 0{,}6$. Es gilt die Proportion $\overline{AT} : \overline{TB} = 3 : 5$.

KONSTRUKTION MIT DER



Bei dieser Konstruktion haben wir eine einfache Möglichkeit, die Zeichengenauigkeit zu überprüfen: wir berechnen die Längen $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$.

Strahlensatz: $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \dfrac{3}{5}$, wir nennen $\overline{AT} = x$, dann ist $\overline{TB} = 6 - x$.

Es ergibt sich $\dfrac{x}{6-x} = \dfrac{3}{5} \;\Big\|\; \cdot 5\,(6-x)$

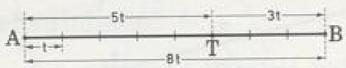
$$5x = 18 - 3x, \quad \text{also} \quad 8x = 18 \quad \text{und damit}$$

$$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Also ist $\overline{AT} = 2{,}25$ und $\overline{TB} = 3{,}75$.

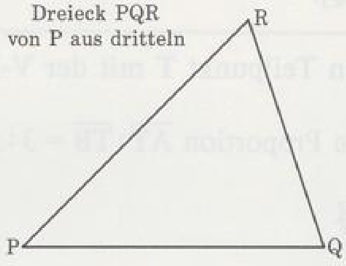
Einfacher geht's mit folgender Überlegung: Wir denken uns AB in $3 + 5 = 8$ gleiche Teile t geteilt. Dann ist $6 = 8t$, also $t = 3/4$, und es gilt

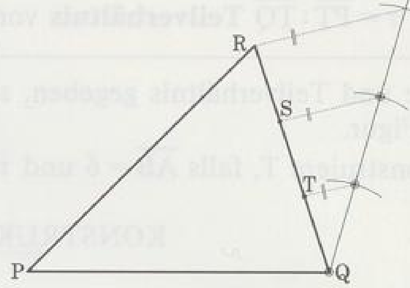
$\overline{AT} = 3t = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ und
$\overline{TB} = 5t = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75.$

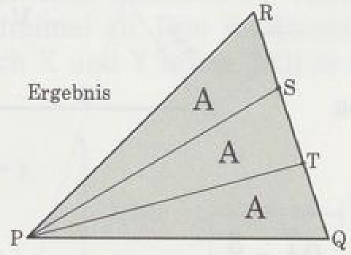


Winkel lassen sich – genau wie Strecken – in 2, 4, 8 … gleiche Teile zerlegen. Große Mathematiker haben sich jahrhundertelang den Kopf darüber zerbrochen, wie sie einen Winkel allein mit Zirkel und Lineal dritteln oder fünfteln oder … könnten. Dank Algebra und Analytischer Geometrie wissen wir heute, daß dies unmöglich ist.

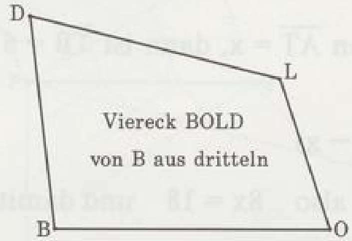
Vielecke dagegen lassen sich von einer Ecke aus (mit Zirkel und Lineal) in beliebig viele flächengleiche Teile zerlegen. Am einfachsten geht's beim Dreieck: hier müssen wir bloß die gegenüberliegende Seite in gleich lange Strecken teilen. Das Bild zeigt eine Drittelung von P aus. Die Teildreiecke haben gleich lange Grundseiten und dieselbe Höhe, also denselben Flächeninhalt.

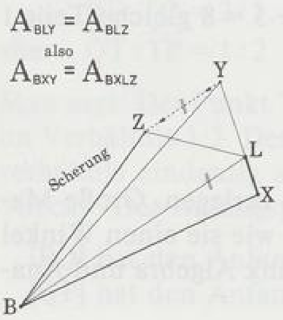


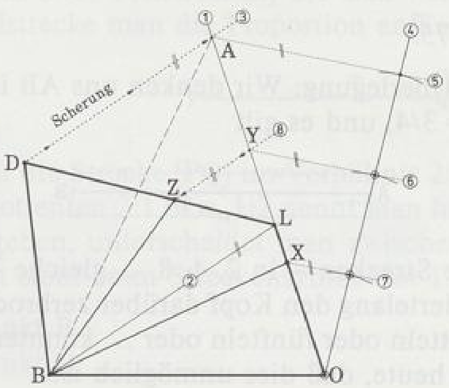


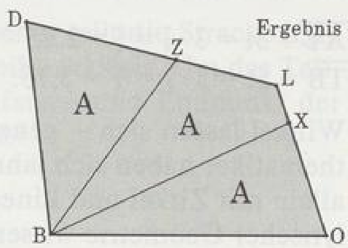


Etwas vertrackt ist die Drittelung eines Vierecks von einer Ecke aus: Zuerst scheren wir das Viereck BOLD zum Dreieck BOA: ① bis ③. Dann dritteln wir das Dreieck BOA von der Ecke B aus: ④ bis ⑦. Schließlich scheren wir Y aufs Viereck BOLD zurück: ⑧.









Aufgaben

1. Zeichne eine Strecke [AB] mit der Länge a = 9 und konstruiere die Strecke [AC] mit

a) $\overline{AC} = \frac{3}{4}a$ **b)** $\overline{AC} = \frac{2}{5}a$ **c)** $\overline{AC} = \frac{3}{7}a$

d) $\overline{AC} = \frac{11}{9}a$ **e)** $\overline{AC} = 1{,}4\,a$.

2. Zeichne die Strecke [AB] mit A(1 | 1) und B(8 | 1). In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AB]?

a) T(2,5 | 1) **b)** T(7 | 1) **c)** T(3 | 2)

3. Zeichne die Strecke [AB] mit A(1 | 2) und B(10 | 6,5).
Konstruiere den Teilpunkt T und gib seine Koordinaten an.

a) T teilt [AB] im Verhältnis 1:2

b) T teilt [AB] im Verhältnis 3,5:1

c) T teilt [BA] im Verhältnis 8:1

4. Gegeben ist eine Strecke [AB]. Konstruiere jeweils den Teilpunkt T auf [AB] und berechne $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$.

a) $\overline{AB} = 5$, $\tau = \frac{7}{3}$ **b)** $\overline{AB} = 5$, $\tau = \frac{3}{7}$

c) $\overline{AB} = 10$, $\tau = 0{,}8$ **d)** $\overline{AB} = 9$, $\tau = 1{,}2$

5. Berechne $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$, wenn T die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 11$ im Verhältnis

a) 5:7 **b)** 1:13 teilt.

6. Zeichne das Dreieck ABC mit A(2 | 1), B(9,5 | 3,5) und C(5,5 | 9,5). Konstruiere Punkt T auf dem Dreieck und gib seine Koordinaten an:

a) AT zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, deren Flächen sich verhalten wie 3:1.

b) CT zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, deren Flächen sich verhalten wie 3:2.

7. In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Umfang u = 17 verhalten sich die Schenkel zur Basis wie 2:1.
Konstruiere das Dreieck.

8. Das Dreieck ABC hat den Umfang u = 16.
Konstruiere das Dreieck, wenn a : b : c = 5 : 6 : 7 ist. (Diese Schreibweise für a : b = 5 : 6 und b : c = 6 : 7 und a : c = 5 : 7.)

9. Zeichne ein Rechteck mit $\overline{AB} = 7$ und $\overline{AD} = 5$.

a) Konstruiere das Viereck A'B'C'D' mit $\overline{A'B'} = \frac{4}{5}\,\overline{AB}$ und $\overline{A'D'} = \frac{2}{3}\,\overline{AD}$.

b) Wie verhalten sich die Flächeninhalte?

10. Geobold schlägt ein Verfahren vor, wie man Winkel halbieren, dritteln, vierteln usw. kann. Er zeichnet um den Scheitel einen Kreis und halbiert, drittelt, viertelt usw. die Sehne, die der Winkel aus dem Kreis ausschneidet.
Halbiere, drittle und viertle einen 120°-Winkel nach Geobolds Vorschlag und miß die Teilwinkel.

•11. Zeichne das Rechteck BERN mit B(3|0), E(0|0), R(0|−5) und zerlege es von R aus in
a) drei **b)** vier **c)** fünf flächengleiche Teile.

•12. Zeichne das Viereck ROMA mit R(0|11), O(0|0), M(8,5|−1) und A(6|9) und zerlege es von O aus in
a) drei flächengleiche Teile
b) in zwei Flächenstücke, deren Inhalte sich verhalten wie 2:7 (zwei Möglichkeiten).

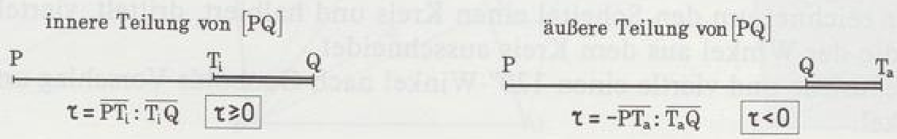
2.2 Innere und äußere Teilung

Für einen Punkt T auf [PQ], der [PQ] im Verhältnis $\tau = 2{:}1$ teilt, gilt $\overline{PT} : \overline{TQ} = 2:1$.

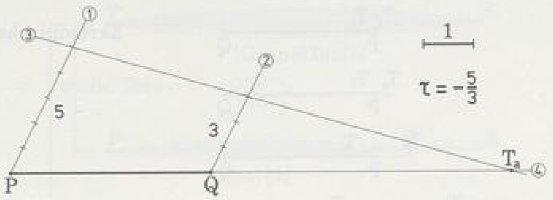
Wenn wir nur fordern, daß T auf der Gerade PQ liegt, dann gibt es noch einen zweiten Punkt T*, der die Gleichung $\overline{PT^*} : \overline{T^*Q} = 2:1$ erfüllt. Weil T* nicht auf der Strecke [PQ] liegt, teilt er sie unserm Gefühl nach auch nicht. Aber die Mathematiker erweitern den Begriff »Teilung einer Strecke« so, daß er auch für solche Fälle gilt: Man nennt T* äußeren Teilpunkt und ordnet ihm das Teilverhältnis $\tau = -2$ zu. Um T und T* deutlicher zu unterscheiden, bezeichnet man T als inneren Teilpunkt; für T ist $\tau = +2$.

Definition:

Der Punkt $T_i \neq Q$ auf [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **innen** im Verhältnis $\tau = \overline{PT_i} : \overline{T_iQ}$ ($\tau \geq 0$). Der Punkt $T_a \neq Q$ auf PQ (außerhalb [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **außen** im Verhältnis $\lvert\tau\rvert$ mit $\tau = -\overline{PT_a} : \overline{T_aQ}$ ($\tau < 0$).



Den äußeren Teilpunkt konstruiert man mit der V-Figur. Ein Beispiel mit $\overline{PQ} = 4$ und $\tau = -5/3$ sehen wir im Bild. Wieder überprüfen wir die Zeichengenauigkeit. Wir berechnen die Streckenlängen $\overline{PT_a}$ und $\overline{T_aQ}$. Nennen wir $\overline{T_aQ} = x$, dann ist $\overline{PT_a} = x + 4$.



Strahlensatz: $\frac{x+4}{x} = \frac{5}{3}$ ‖ kreuzweise multiplizieren

$$3x + 12 = 5x$$
$$12 = 2x, \quad \text{also} \quad x = 6.$$

Es ergibt sich $\overline{T_aQ} = 6$ und $\overline{PT_a} = 10$.

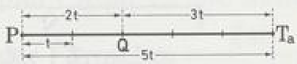
Einfacher geht's wieder mit folgender Überlegung:

Setzen wir $\overline{PT_a} = 5t$ und $\overline{T_aQ} = 3t$, dann ist $\overline{PQ} = 2t$

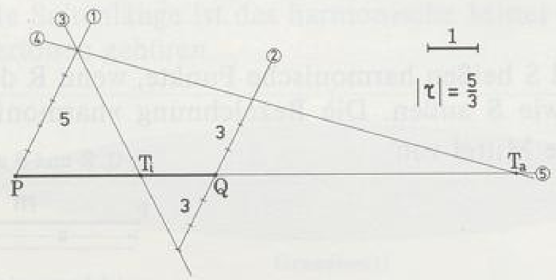
$$4 = 2t, \text{ also } t = 2,$$

und es gilt $\overline{PT_a} = 5t = 5 \cdot 2 = 10$

$\overline{T_aQ} = 3t = 3 \cdot 2 = 6$



Wenn T_i und T_a die Strecke [PQ] innen und außen im selben Verhältnis teilen, sagt man: T_i und T_a teilen die Strecke [PQ] **harmonisch.** Dann gilt $\frac{\overline{PT_i}}{\overline{T_iQ}} = \frac{\overline{PT_a}}{\overline{T_aQ}} = |\tau|$



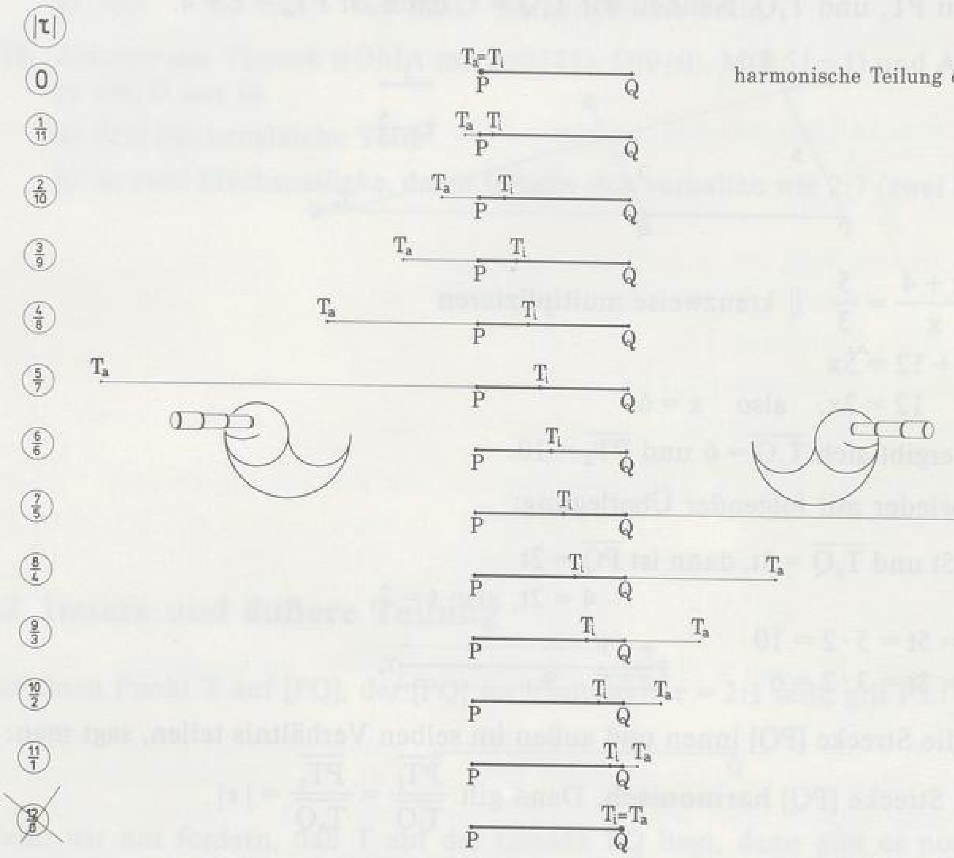
Durch eine einfache Umformung ergibt sich aus $\frac{\overline{PT_i}}{\overline{T_iQ}} = \frac{\overline{PT_a}}{\overline{T_aQ}} \;\Big\|\; \cdot \frac{\overline{T_iQ}}{\overline{PT_a}}$ die Gleichung

$\frac{\overline{PT_i}}{\overline{PT_a}} = \frac{\overline{T_iQ}}{\overline{T_aQ}}$ beziehungsweise $\frac{\overline{T_iP}}{\overline{PT_a}} = \frac{\overline{T_iQ}}{\overline{QT_a}}$

Q und P teilen $[T_iT_a]$ harmonisch $\boxed{\overline{T_iQ} : \overline{QT_a} = \overline{T_iP} : \overline{PT_a}}$

T_i und T_a teilen [PQ] harmonisch $\boxed{\overline{PT_i} : \overline{T_iQ} = \overline{PT_a} : \overline{T_aQ}}$

Die letzte Gleichung bedeutet aber: P und Q teilen die Strecke $[T_iT_a]$ außen und innen im Verhältnis $|\tau'|$, also harmonisch. Dabei gilt $\tau' \neq \tau$.



harmonische Teilung der Strecke [PQ]

Vier Punkte P, Q, R und S heißen harmonische Punkte, wenn R die Strecke [PQ] innen im selben Verhältnis teilt wie S außen. Die Bezeichnung »harmonisch« kommt daher, daß $\overline{PQ} = m$ das harmonische Mittel von $\overline{PR} = a$ und $\overline{PS} = b$ ist.

P, Q, R und S sind harmonische Punkte

m ist harmonisches Mittel von a und b

$$\boxed{m = \frac{2ab}{a+b}}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Beweis: $\dfrac{a}{m-a} = \dfrac{b}{b-m}$ $\|$ kreuzweise multiplizieren

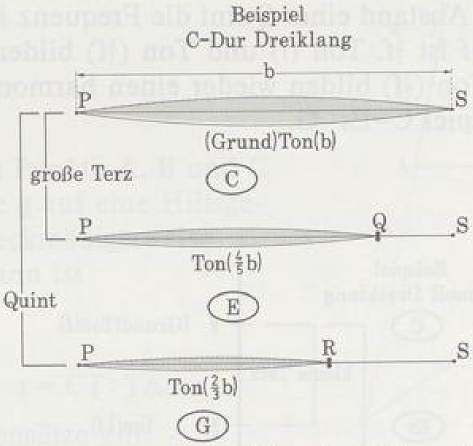
$$ab - am = bm - ab$$

$$2ab = m(a+b) \quad \| : (a+b)$$

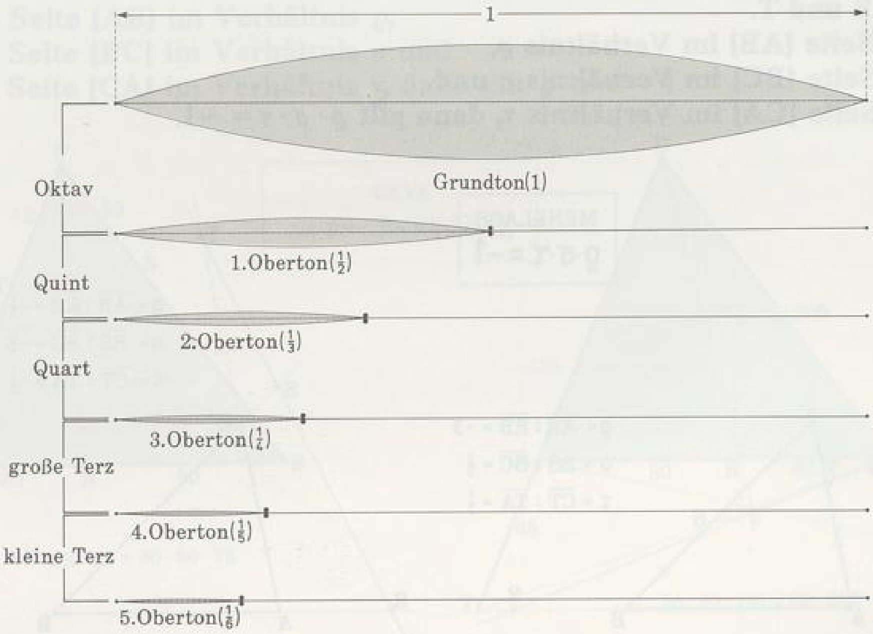
$\dfrac{2ab}{a+b} = m$, bildet man den Kehrwert, so ergibt sich

$$\frac{1}{m} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{2}$$

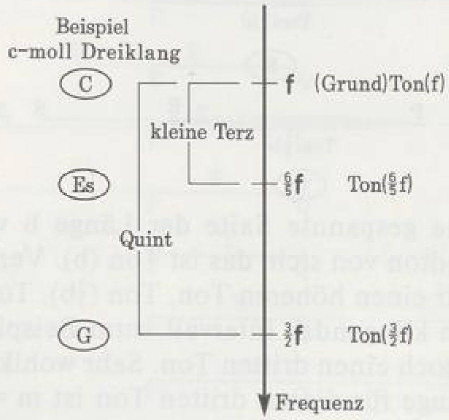
* *Was ist eigentlich so harmonisch am harmonischen Mittel?*



Stellen wir uns unter [PS] eine gespannte Saite der Länge b vor. Reißen wir sie an, so schwingt sie und gibt den Grundton von sich, das ist Ton (b). Verkürzen wir den schwingenden Teil auf $a = \frac{2}{3}b$, so hören wir einen höheren Ton, Ton ($\frac{2}{3}$b). Ton (b) und Ton ($\frac{2}{3}$b) bestimmen eine Quint, ein angenehm klingendes Intervall, zum Beispiel die Töne C und G. Für einen Dreiklang brauchen wir noch einen dritten Ton. Sehr wohlklingend (= harmonisch) ist der Durdreiklang. Die Saitenlänge für diesen dritten Ton ist $m = \frac{4}{5}b$. Ton (b) und Ton ($\frac{4}{5}$b) bestimmen eine große Terz, zum Beispiel C und E. Die Saitenlänge m für diesen mittleren harmonischen Ton errechnet sich aus der Formel $m = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2 \cdot \frac{2}{3}b \cdot b}{b+b} = \dfrac{4b}{2+3} = \dfrac{4}{5}b$. Weil die Formel einen (musikalisch harmonischen) Mittelwert liefert, nennt man den Mittelwert harmonisches Mittel. $\frac{4}{5}$ ist das harmonische Mittel von 1 und $\frac{2}{3}$.
Das harmonische Mittel taucht auch bei den Obertönen auf. Die Obertöne eines Grundtons ergeben sich durch Halbieren, Dritteln, Vierteln usw. ein und derselben Saite. Jede zu einem Oberton gehörende Saitenlänge ist das harmonische Mittel der Saitenlängen, die zu den beiden Nachbar-Obertönen gehören.



Ein Maß für die Höhe eines Tons ist seine Frequenz f. Hat der Grundton die Frequenz f, das ist Ton (f), so hat der Ton im Abstand einer Quint die Frequenz $\frac{3}{2}$f, das ist Ton ($\frac{3}{2}$f). Das harmonische Mittel von f und $\frac{3}{2}$f ist $\frac{6}{5}$f. Ton (f) und Ton ($\frac{6}{5}$f) bilden das Intervall der kleinen Terz. Ton (f), Ton ($\frac{6}{5}$f) und Ton ($\frac{3}{2}$f) bilden wieder einen harmonischen Dreiklang, diesmal den Molldreiklang, zum Beispiel C–Es–G.



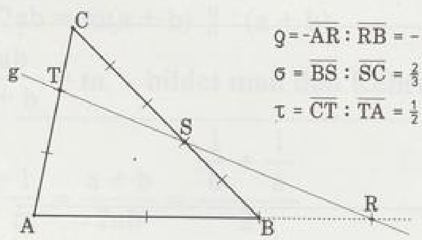
Übrigens läßt sich der mittlere Ton beim Molldreiklang auch noch anders erzeugen: man wählt für den mittleren Ton das arithmetische Mittel der Saitenlängen, die zu den beiden andern Tönen gehören.

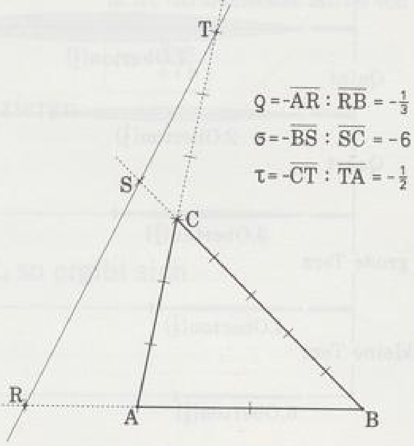
* Zwei verblüffende Eigenschaften von Teilverhältnissen am Dreieck

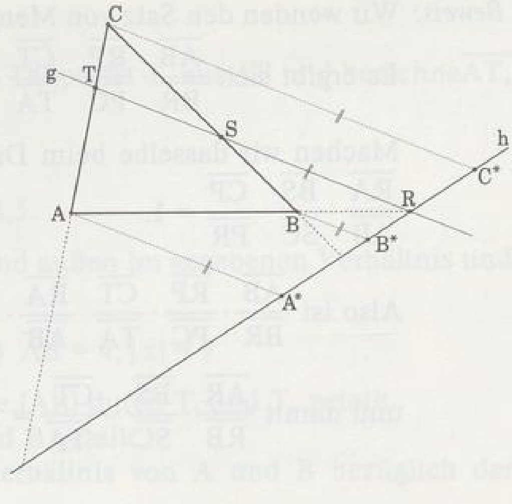
1. Der Satz von Menelaos (Alexandria, um 100 n. Chr.)

Eine Gerade g schneide die Seiten eines Dreiecks bzw. deren Verlängerungen in den Punkten R, S und T.
Teilt R die Seite [AB] im Verhältnis ϱ,
S die Seite [BC] im Verhältnis σ und
T die Seite [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1$.

MENELAOS
$$\boxed{\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1}$$







Beweis: Wir projizieren die Punkte A, B und C parallel zur Gerade g auf eine Hilfsgerade h (die wir zweckmäßigerweise durch R legen). Dann ist

$\varrho = -\overline{AR} : \overline{RB}$,

$\sigma = \overline{BS} : \overline{SC}$ und $\tau = \overline{CT} : \overline{TA}$.

Wegen der Strahlensätze gilt:

$\overline{AR} : \overline{RB} = \overline{A^*R} : \overline{RB^*}$, $\overline{BS} : \overline{SC} = \overline{B^*R} : \overline{RC^*}$ und $\overline{CT} : \overline{TA} = \overline{C^*R} : \overline{RA^*}$.

Dann ist

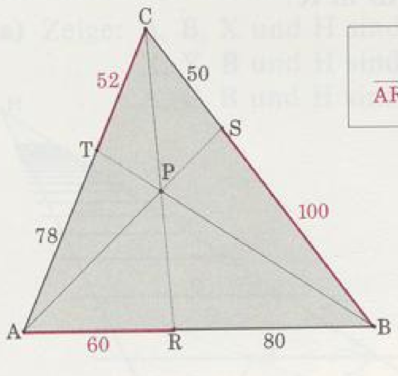
$$\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -\frac{\overline{A^*R}}{\overline{RB^*}} \cdot \frac{\overline{B^*R}}{\overline{RC^*}} \cdot \frac{\overline{C^*R}}{\overline{RA^*}} = -1 \quad \text{q. e. d.}$$

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung: Wählt man R auf AB, S auf BC und T auf CA, so daß $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1$ ist, dann liegen R, S und T auf einer Gerade.

Beweis: RS und AC schneiden sich in T'. Nach Menelaos gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau' = -1$, folglich ist $\tau' = \tau$ und deshalb T' = T, q. e. d.

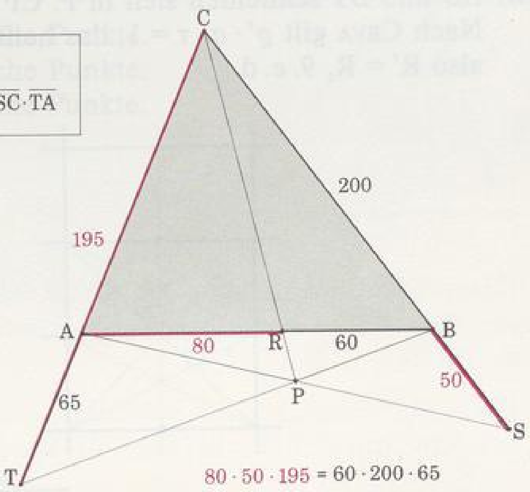
2. Der Satz von Ceva (Giovanni Ceva, Mantua, 1647 bis 1734)

Irgendein Punkt P sei mit den Ecken A, B und C eines Dreiecks verbunden. AP schneide BC in S, BP schneide AC in T, und CP schneide AB in R.
Teilt R die Seite [AB] im Verhältnis ϱ,
S die Seite [BC] im Verhältnis σ und
T die Seite [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1$.



$60 \cdot 100 \cdot 52 = 80 \cdot 50 \cdot 78$

CEVA
$\overline{AR} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CT} = \overline{RB} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{TA}$



$80 \cdot 50 \cdot 195 = 60 \cdot 200 \cdot 65$

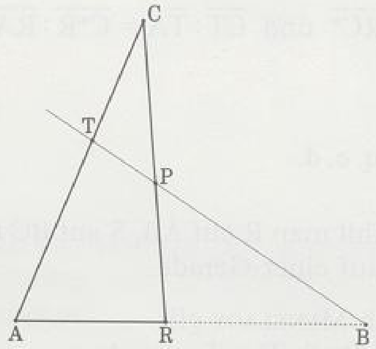
Beweis: Wir wenden den Satz von Menelaos aufs Dreieck ARC mit der Schnittgerade TP an.

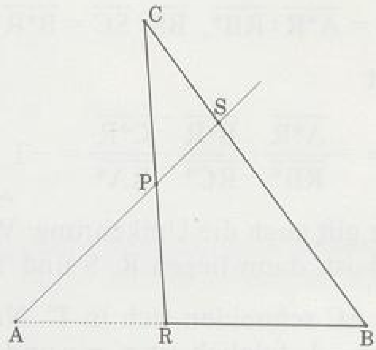
Es ergibt sich $\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = 1.$

Machen wir dasselbe beim Dreieck RBC mit der Schnittgerade SP, so ergibt sich $\frac{\overline{RA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PR}} = 1.$

Also ist $\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PR}} = 1 \cdot 1$

und damit $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = 1,$ also $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1.$





Der Satz gilt auch dann, wenn P außerhalb des Dreiecks liegt.
Besonders einprägsam ist die Deutung dieses Satzes in der Produktform:
$\overline{AR} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CT} = \overline{RB} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{TA}.$

Auch hier gilt die Umkehrung: Wählt man R auf AB, S auf BC und T auf CA, so daß $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1$ ist, so schneiden sich die Geraden CR, AS und BT in einem Punkt oder sie sind parallel.

Beweis: AS und BT schneiden sich in P. CP schneide AB in R′.
Nach Ceva gilt $\varrho' \cdot \sigma \cdot \tau = 1$, das heißt $\varrho' = \varrho$,
also R′ = R, 9. e. d.

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Strecke [AB]. Konstruiere den Teilpunkt T_a auf AB und berechne $\overline{AT_a}$ und $\overline{T_aB}$.

   a) $\overline{AB} = 5, \tau = -1{,}5$ **b)** $\overline{AB} = 7, \tau = -\frac{2}{5}$

   c) $\overline{AB} = 2{,}5, \tau = -0{,}8$ **d)** $\overline{AB} = 3{,}5, \tau = -4{,}5.$

2. Gegeben ist die Strecke [AB]. Teile sie innen und außen im gegebenen Verhältnis und berechne $\overline{AT_i}$, $\overline{T_iB}$, $\overline{AT_a}$ und $\overline{T_aB}$.

   a) $\overline{AB} = 6, |\tau| = \frac{1}{3}$ **b)** $\overline{AB} = 7, |\tau| = \frac{7}{3}$ **c)** $\overline{AB} = 4, |\tau| = \frac{3}{5}$

3. Bei den Beispielen in Aufgabe **2** ist die Strecke [AB] durch T_i und T_a geteilt. Umgekehrt wird die Strecke $[T_iT_a]$ durch A und B geteilt. Berechne für **a), b)** und **c)** jeweils das Teilverhältnis von A und B bezüglich der Strecke $[T_iT_a]$.

• 4. Zeichne ein Dreieck ABC. P teilt [AB] innen im Verhältnis 2:1. Konstruiere Q auf AC so, daß CB die Strecke [PQ] halbiert. In welchem Verhältnis teilt Q die Strecke [AC]?

• 5. Die inneren und äußeren gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 schneiden M_1M_2 in T bzw. in S.
Zeige: M_1, M_2, T und S sind harmonische Punkte.

6. Teile die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 6$ harmonisch im Verhältnis

   a) 1:3 **b)** 5:1 Berechne jeweils $\overline{AT_i}$ und $\overline{AT_a}$.

• 7. Die Strecke [AB] wird innen von P und außen von Q harmonisch im Verhältnis $|\tau|$ geteilt. Dann teilen A und B die Strecke [PQ] auch harmonisch, aber im Verhältnis $|\tau'|$. Berechne τ' in Abhängigkeit von τ.

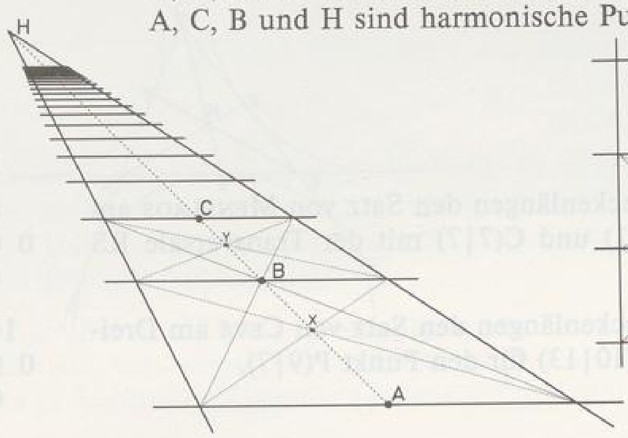
8. $X(x|0)$ und $T(t|0)$ teilen [AB] mit $A(-3|0)$ und $B(3|0)$ harmonisch.

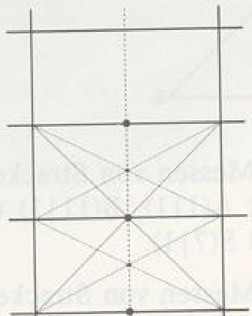
   a) Konstruiere T für $x = -2$, $x = -1$ und $x = 1{,}5$.

   b) Berechne t allgemein in Abhängigkeit von x.

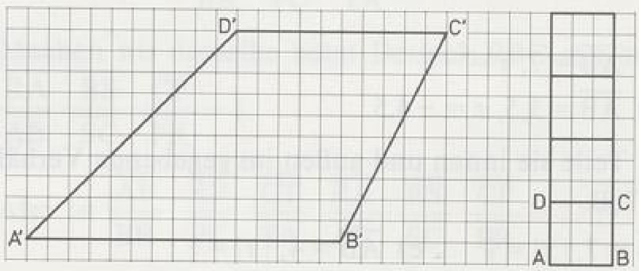
: 9. PERSPEKTIVE
Das Bild zeigt, wie man ein Gleis, eine Leiter oder einen Zaun perspektivisch darstellt.

   a) Zeige: A, B, X und H sind harmonische Punkte.
   X, Y, B und H sind harmonische Punkte.
   A, C, B und H sind harmonische Punkte.

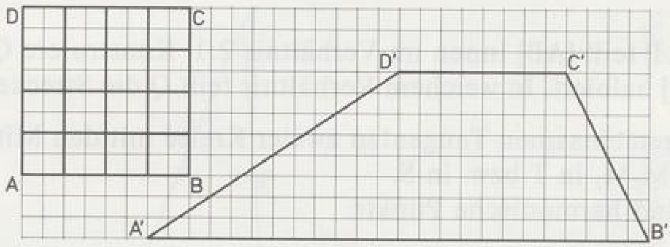




b) Zeichne das Trapez A′B′C′D′ ab und konstruiere das perspektive Bild eines Wegs mit mindestens vier quadratischen Platten.

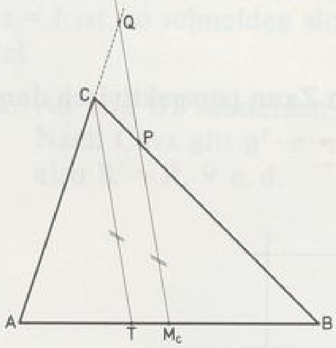


c) Zeichne das Trapez A′B′C′D′ ab und fülle es so aus, daß das perspektive Bild des quadratischen Gitters ABCD entsteht.



10. Eine Saite ist 60 cm lang. Zupft man sie, dann hört man ihren Grundton. Berechne und konstruiere die Saitenlänge der Töne, die mit dem Grundton eine Quint bzw. eine große Terz bilden.

11. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt T auf c. Die Parallele zu CT durch M_c schneidet eine Seite in P und die Verlängerung der andern Seite in Q. Zeige: $\overline{CT}$ ist das harmonische Mittel von $\overline{PM_c}$ und $\overline{QM_c}$.



12. Überprüfe durch Messen von Streckenlängen den Satz von MENELAOS am Dreieck ABC mit A(1|1), B(11|1) und C(7|7) mit der Transversale RS durch R(3|3) und S(7|1).

8
0 0 14
4

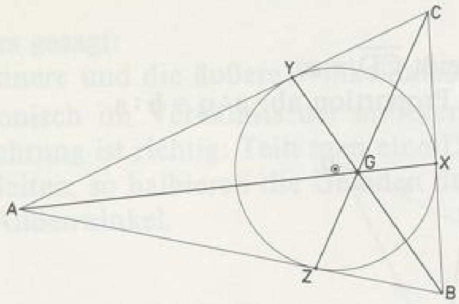
13. Überprüfe durch Messen von Streckenlängen den Satz von CEVA am Dreieck ABC mit A(1|1), B(15|1), C(10|13) für den Punkt P(9|7).

14
0 0 16
0

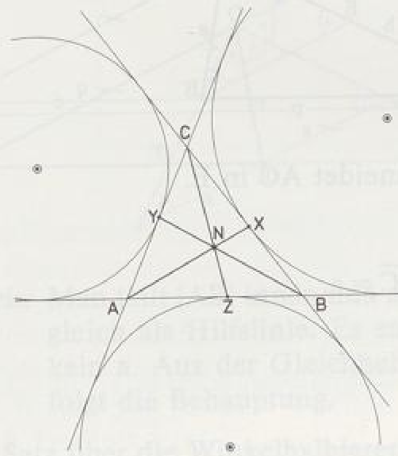
14. Beweise mit dem Satz von CEVA:
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

15. Zeichne ein Dreieck ABC. Wähle E auf [AC] und D auf [BC] so, daß $\overline{AE} = kb$ und $\overline{BD} = ka$ ist. Zeige mit dem Satz von CEVA:
AD, BE und s_c treffen sich in einem Punkt.

•16. GERGONNE-PUNKT (nach dem französischen Mathematiker Joseph Diaz GERGONNE 1771 bis 1859).
Der Inkreis eines Dreiecks berührt die Seiten in X, Y und Z.
Beweise mit dem Satz von CEVA:
AX, BY und CZ treffen sich in einem Punkt G.
G heißt Gergonne-Punkt des Dreiecks.
(*Tip:* gleich lange Tangentenabschnitte!)

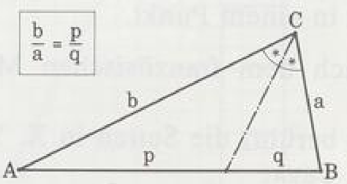


•17. NAGEL-PUNKT (1836 gefunden von dem deutschen Mathematiker Heinrich von NAGEL)
Die Ankreise eines Dreiecks berühren die Seiten in X, Y und Z.
Beweise mit dem Satz von CEVA:
AX, BY und CZ treffen sich in einem Punkt N.
N heißt Nagel-Punkt des Dreiecks.
(*Tip:* gleich lange Tangentenabschnitte!)



* 2.3 Der Apollonioskreis

Jede Winkelhalbierende im Dreieck hat eine überraschende Eigenschaft: sie teilt eine Seite des Dreiecks im Verhältnis der beiden andern.



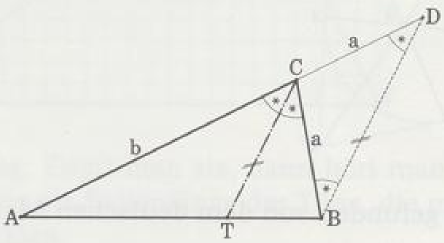
Man sieht das leicht ein, wenn man die Figur zu einer V-Figur ausbaut:

Die Parallele zur Winkelhalbierenden von γ schneidet AC in D.

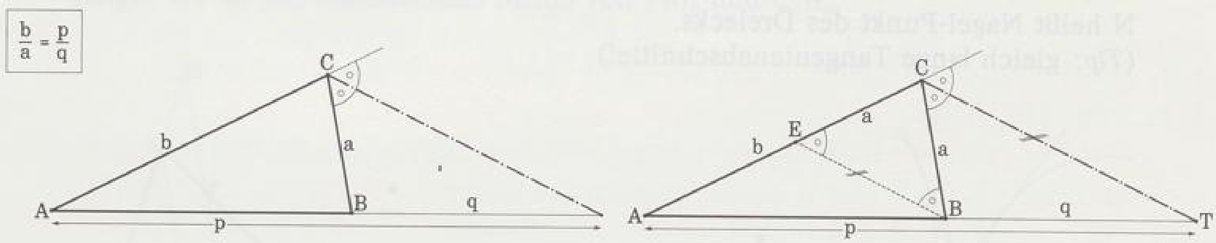
Es gilt $\sphericalangle$ TCB = $\sphericalangle$ CBD (Z-Winkel),
$\sphericalangle$ ACT = $\sphericalangle$ CDB (F-Winkel).

Also ist das Dreieck CBD gleichschenklig, das heißt $\overline{CD} = a$.

In der V-Figur ATBDC lesen wir die behauptete Proportion ab: $p : q = b : a$.



Die Außenwinkelhalbierende hat eine ähnliche Eigenschaft, so gilt zum Beispiel (Bild!) $b : a = p : q$. Wieder machen wir uns das an einer V-Figur klar:



Die Parallele zur Außenwinkelhalbierenden von γ schneidet AC in E.

Es gilt $\sphericalangle$ EBC = $\sphericalangle$ BCT (Z-Winkel)
$\sphericalangle$ CEB = $\sphericalangle$ (AC, CT) (F-Winkel)

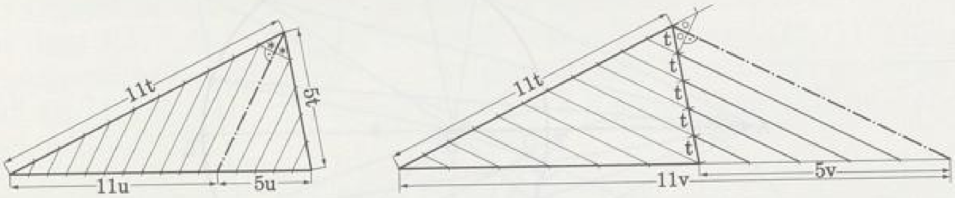
Also ist das Dreieck EBC gleichschenklig, das heißt $\overline{EC} = a$.

In der V-Figur ABTCE lesen wir die Behauptung ab:

$b : a = p : q$.

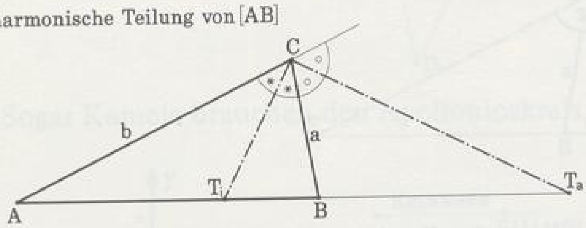
Wir fassen zusammen:

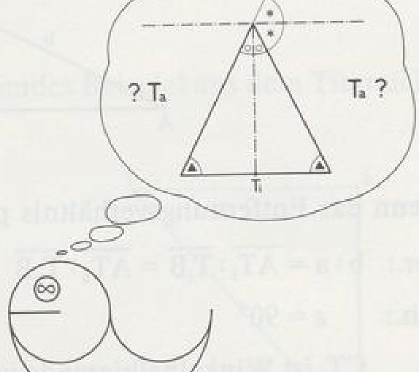
Satz:
Jede Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.
Jede Winkelhalbierende eines Außenwinkels am Dreieck teilt die Gegenseite außen im Verhältnis der anliegenden Seiten. (Ausnahme: gleichschenkliges Dreieck)

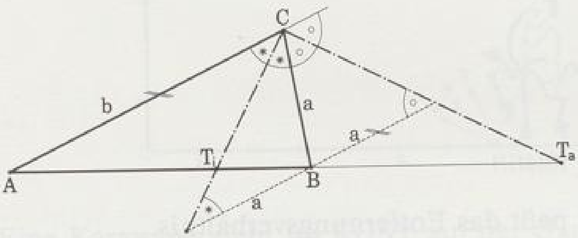


Anders gesagt:
Die innere und die äußere Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten: $\overline{AT_i} : \overline{T_iB} = b : a = \overline{AT_a} : \overline{T_aB}$. Auch die Umkehrung ist richtig: Teilt man eine Dreieckseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten, so halbieren die Geraden durch die Teilpunkte und die Gegenecke den Innen- und Außenwinkel.

harmonische Teilung von [AB]



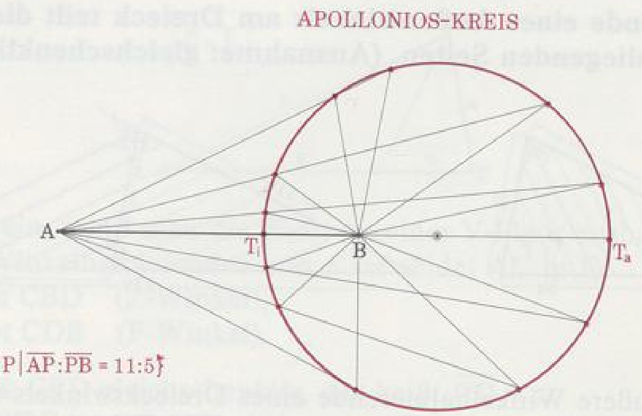




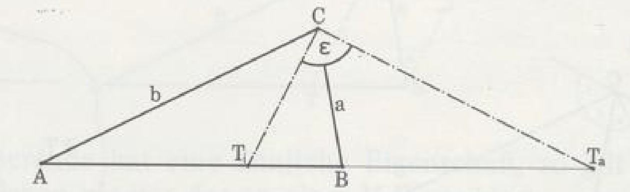
Beweis: Man teilt [AB] innen und außen im Verhältnis b:a und verwendet die Dreieckseite b gleich als Hilfslinie. Es entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke mit den Schenkeln a. Aus der Gleichheit der Basiswinkel und aus dem Satz über die Z-Winkel folgt die Behauptung.

Der Satz über die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ist die Grundlage für einen berühmten Satz der Antike. Um 200 v. Chr. hat der griechische Mathematiker und Astronom Apollonios in Alexandria folgende Entdeckung gemacht:

Satz:
Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein festes Verhältnis b:a haben, ist der Kreis mit dem Durchmesser $[T_iT_a]$. T_i und T_a teilen [AB] harmonisch im Verhältnis b:a.



Apollonios zu Ehren heißt dieser Kreis Apollonioskreis.
Der Apollonioskreis ist nichts anderes als der Thaleskreis über $[T_iT_a]$. Weil er ein geometrischer Ort ist, müssen wir zwei Sätze beweisen:



① Wenn das Entfernungsverhältnis paßt, dann liegt der Punkt auf dem Kreis.

Vor.: $b : a = \overline{AT_i} : \overline{T_iB} = \overline{AT_a} : \overline{T_aB}$

Beh.: $\varepsilon = 90°$

Bew.: $\left.\begin{array}{l} CT_i \text{ ist Winkelhalbierende von } \gamma \\ CT_a \text{ ist Winkelhalbierende von } \gamma^* \end{array}\right\}$

also ist $CT_i \perp CT_a$, das heißt $\varepsilon = 90°$.

② Wenn der Punkt auf dem Kreis liegt, dann paßt das Entfernungsverhältnis.

Vor.: $\sphericalangle T_iCT_a = 90°$

Beh.: $b : a = \overline{AT_i} : \overline{T_iB}$

Bew.: Die Parallele zu CB durch A schneidet die Winkelhalbierenden in D_1 und D_2.

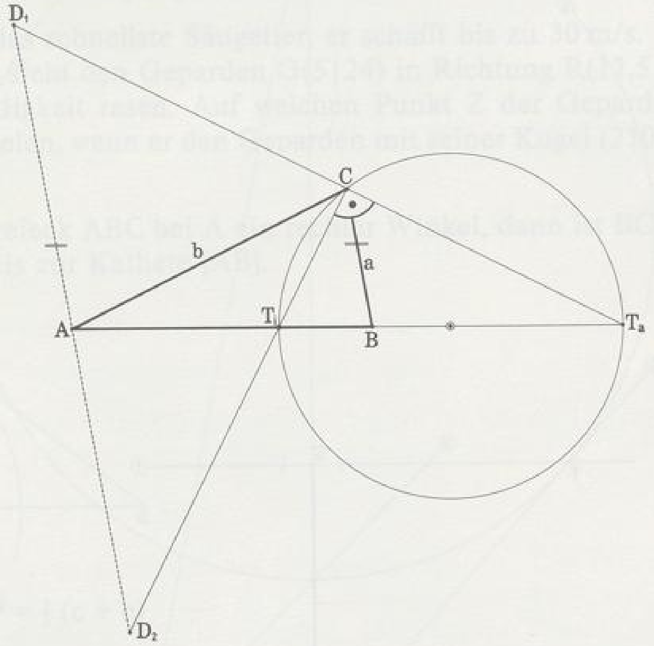
a) $\frac{\overline{AD_2}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AT_i}}{\overline{T_iB}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{T_aB}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{CB}}$

also ist A Mittelpunkt von $[D_1 D_2]$.

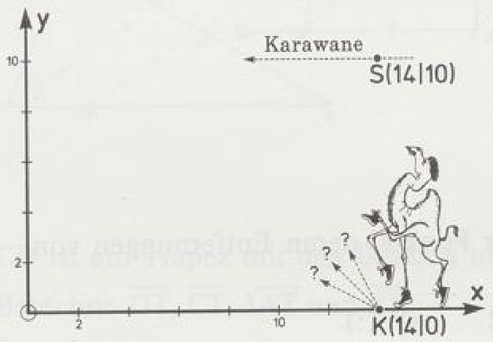
b) Weil das Dreieck $D_1 D_2 C$ bei C einen rechten Winkel hat, liegt C auf dem Thaleskreis über $[D_1 D_2]$. Wegen **a)** ist A Mittelpunkt dieses Kreises, das heißt

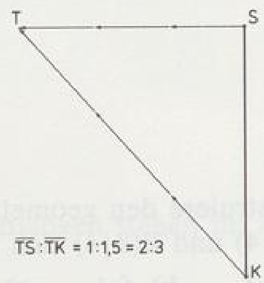
$\overline{AD_2} = \overline{AC}$ und damit

$\frac{b}{a} = \frac{\overline{AT_1}}{\overline{T_1B}}$, q. e. d.



Sogar Kamele brauchen den Apollonioskreis, wie folgendes Beispiel aus dem Tierreich lehrt:



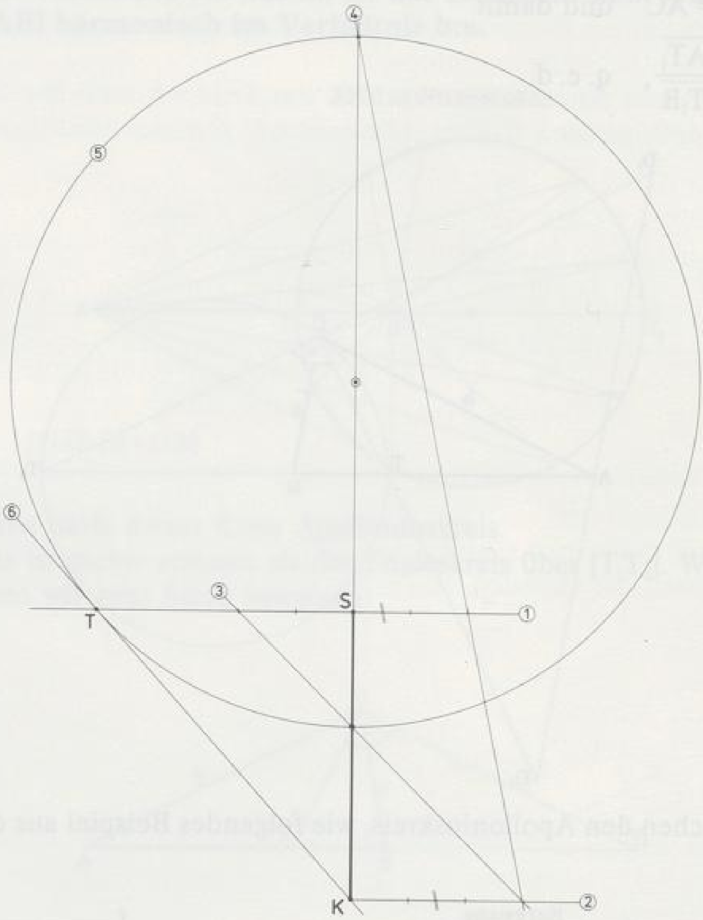


Eine Karawane zieht im KOSY auf der Gerade $y = 10$ nach links. Im Punkt K(14|0) steht ein einsames Kamel, das sich der Karawane anschließen will. Es sieht die Karawane im Punkt S(14|10). Welchen Punkt T der Karawanenbahn muß das Kamel ansteuern, um die Karawane zu treffen, wenn es eineinhalbmal so schnell läuft wie die Karawane und vorher Apollonios fragt?

Die Weglängen bis zum Treffpunkt T verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, also wie 1:1,5. Deshalb liegt T

1) auf der Karawanenbahn und
2) auf dem Apollonioskreis zu [SK] zum Verhältnis 1:1,5.

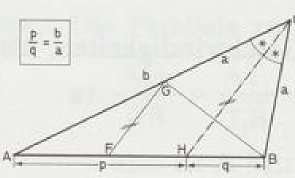
Der Zeichnung entnimmt man, daß die Karawane eine Strecke der Länge 9 zurücklegt. Der exakte Wert der Streckenlänge ist aber $\sqrt{80}$. Wie man ihn berechnet, erfahren wir im **5.** Kapitel.

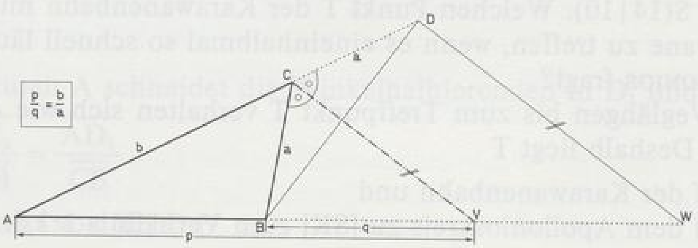


Aufgaben

1. Konstruiere den geometrischen Ort der Punkte, deren Entfernungen von A(2 | 4) und B(8 | 4) sich verhalten wie 8
4 0 14
a) 2:1 **b)** 5:1 **c)** 1:2 **d)** 6:2 **e)** 1:1 0

• **2.** Beweise die Sätze über die Teilungs-Eigenschaften der inneren bzw. äußeren Winkelhalbierenden mit dem 1. Strahlensatz anhand der beiden Bilder.

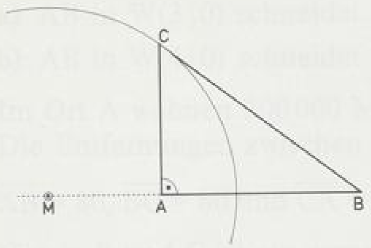




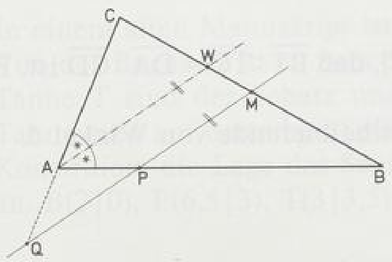
3. Zeichne die Strecke [AB] mit A(4 | 1), B(8 | 5) und dem Teilpunkt T(6,5 | 3,5). 13
0 0 16
Von wo aus sieht man die Teilstrecke [AT] unter dem gleichen Winkel wie [TB]? 0
Konstruiere die Menge dieser Punkte.
Falls du den Umfangswinkel-Satz kennst, konstruiere die Punkte, von denen aus man die Strecke [AB] unter 45° sieht.

• **4.** Der Gepard ist das schnellste Säugetier, er schafft bis zu 30 m/s. 28
Ein Jäger J(5 | 0) sieht den Geparden G(5 | 24) in Richtung R(12,5 | 18) mit 0 0 13
Höchstgeschwindigkeit rasen. Auf welchen Punkt Z der Geparden-Bahn 0
muß der Jäger zielen, wenn er den Geparden mit seiner Kugel (210 m/s) erlegen will?

5. Zeige: Ist im Dreieck ABC bei A ein rechter Winkel, dann ist BC Tangente am Apolloniuskreis zur Kathete [AB].



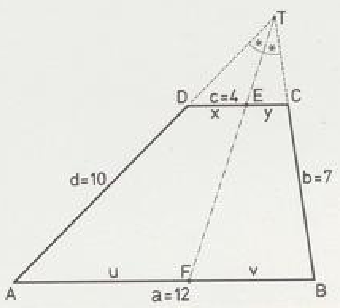
6. Zeige: $\overline{CQ} = \overline{BP} = \frac{1}{2}(c + b)$



7. ABCD ist ein Trapez mit den Basen a und c. Die Seitenlängen stehen im Bild.

a) Berechne $\overline{DT}$, $\overline{CT}$, $3\overline{AT}$ und $\overline{BT}$.

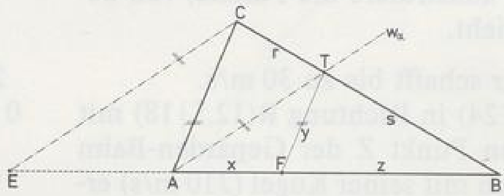
b) Berechne x, y, u und v.



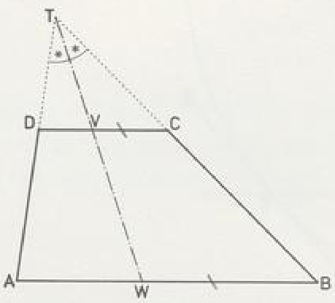
8. Bekannt sind die Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC.
Bestimme aus a, b und c

a) die Teilstreckenlänge r und s

b) die Teilstreckenlängen x, y und z.

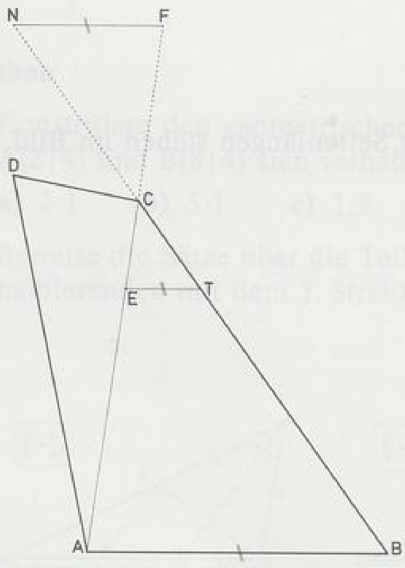


9. Zeige: $\overline{AW} : \overline{WB} = \overline{DV} : \overline{VC} = d : b$



10. Im Dreieck ABC liegt T so auf [AB], daß $\overline{AT} : \overline{TB} = b : a$ ist.
Begründe: CT halbiert γ

•11. ABCD ist ein beliebiges Viereck. T liegt so auf [BC], daß $\overline{BT} : \overline{TC} = \overline{DA} : \overline{CD}$ ist. B, T, C und N sind harmonische Punkte.
Zeige: DB und DF sind innere und äußere Winkelhalbierende von Winkel δ.



:12. [AB] ist Durchmesser eines Kreises und [CD] eine dazu senkrechte Sehne. P sei ein beliebiger Kreispunkt. AP schneidet CD in E, BP schneidet CD in F.
Zeige: C, D, E und F sind harmonische Punkte.
(*Tip:* Umfangswinkelsatz!)

13. Konstruiere ein Dreieck ABC mit

a) $c = 5$, $b : a = 2 : 1$, $w_\gamma = 3{,}5$ **b)** $b = 6$, $a : c = 2 : 5$, $s_b = 4{,}5$

c) $a = 7$, $b : c = 1 : 3$, $h_a = 2$ **•d)** $b = 5$, $c : a = 2 : 1$, $h_a = 3$.

14. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6$, $b : a = 5 : 2$ und $h_c = 2{,}5$.
Wieviel verschiedene Lösungen gibt es?

b) Berechne, bei welcher Länge von h_c nur eine Lösung existiert, falls $c = 6$ und $b : a = 5 : 2$ ist.

15. Vom Dreieck ABC sind bekannt $A(0\,|\,0)$ und $B(6\,|\,0)$.
Konstruiere das Dreieck, wenn w_γ

a) AB in $W(3\,|\,0)$ schneidet und die Länge 5 hat,

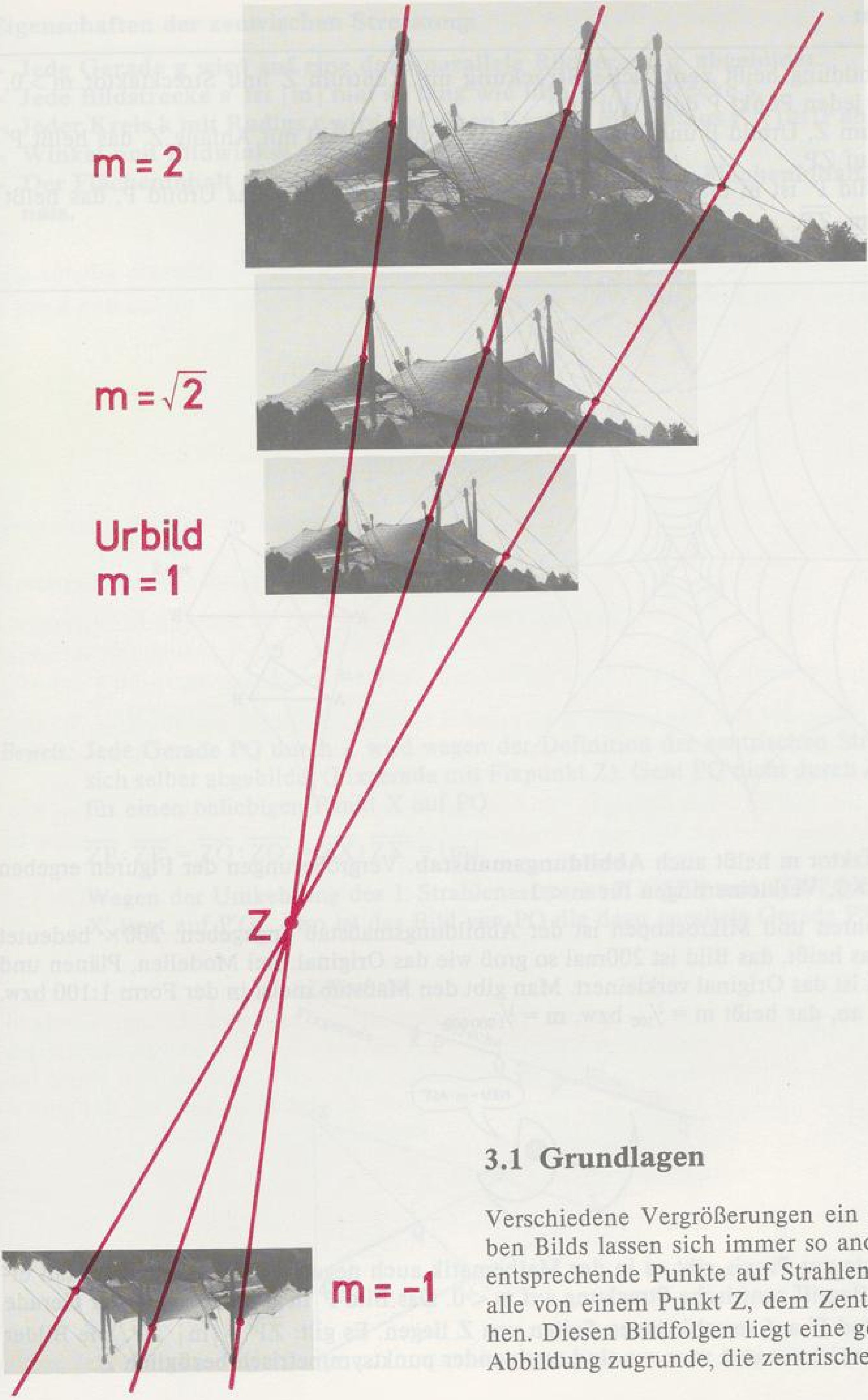
b) AB in $W(4\,|\,0)$ schneidet und die Länge 7 hat.

:16. Im Ort A wohnen 300 000 Menschen, im Ort B 100 000 und im Ort C 200 000.
Die Entfernungen zwischen den Orten sind in km:

$\overline{AB} = 80$, $\overline{BC} = 60$ und $\overline{CA} = 50$.

Für A, B und C ist ein gemeinsamer Flughafen geplant. Das Produkt von Einwohnerzahl und Entfernung vom Flughafen soll für jeden Ort gleich sein.
Wo muß der Flughafen gebaut werden?

17. In einem alten Manuskript ist die Lage eines Schatzes S beschrieben:
Von der Buche B ist es zum Schatz S doppelt so weit wie von der Eiche E. Von der Tanne T sind der Schatz und die Buche gleich weit entfernt. Der Schatz und die Tanne sind auf derselben Seite der Gerade BE.
Konstruiere die Lage des Schatzes und gib seine Koordinaten so genau wie möglich an. $B(2\,|\,0)$, $E(6{,}5\,|\,3)$, $T(3\,|\,3{,}5)$.



3.1 Grundlagen

Verschiedene Vergrößerungen ein und desselben Bilds lassen sich immer so anordnen, daß entsprechende Punkte auf Strahlen liegen, die alle von einem Punkt Z, dem Zentrum, ausgehen. Diesen Bildfolgen liegt eine geometrische Abbildung zugrunde, die zentrische Streckung.