Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

13. Der Kegel

Dreizehntes Kapitel.

Der Kegel.

233. Was ist eine Kegelfläche und ein Kegel?

I. Bewegt sich ein an seinem Endpunkte O (Fig. 212) festgehaltener Strahl OS (die Erzeugende) an einem als Leitlinie L dienenden Kreise hin, dessen Ebene (die Grundfläche F) nicht durch den festen Endpunkt O geht, so beschreibt der Strahl eine (Kreis=)Kegelfläche, deren Spitze oder Mittelpunkt der feste Punkt O ist.

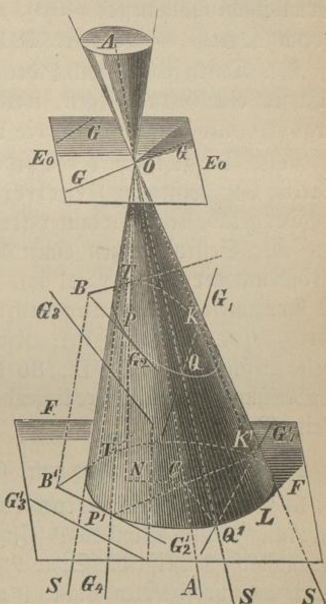

Fig. 212.

II. Bewegt sich anstatt des Strahles OS eine unbegrenzte Gerade in derselben Weise, so beschreibt sie eine aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Doppelkegelfläche.

III. Der von der Kegelfläche umschlossene halbbegrenzte Raum heißt ein kegelförmiger oder konischer Raum.

IV. Der Körper zwischen Spitze O, Grundfläche F und dem zwischenliegenden Kegelflächenstück (dem Mantel) heißt ein Kegel. — Vergl. auch Fr. 236 XIV. und XV.

V. Die durch die Spitze und den Mittelpunkt C der Grundfläche F gelegte Gerade OC heißt die Axe der Kegelfläche.

Jenachdem die Axe auf der Grundfläche normal, oder schief steht, heißen die Kegelfläche und der Kegel selbst gerade, oder schief. Die Höhe H des Kegels ist die Normale ON von der Spitze O auf die Grundfläche F.

VI. Die Kegelfläche hat als äußerste Fälle einerseits die Cylinderfläche (wenn OS // OA), oder die Gerade (wenn der Grundflächenhalbmesser = 0), anderseits aber die Ebene (wenn $\angle$ AOS = 90°; Fr. 181 XIV.).

VII. Durch jeden Punkt P der Kegelfläche und die Spitze O läßt sich eine Gerade legen, welche ganz in der Kegelfläche liegt (I.), also (in P') durch die Leitlinie geht.

VIII. Die zwischen der Spitze und der Leitlinie gelegene Strecke OP' heißt eine Kegelseite.

Der gerade Kegel hat lauter gleiche Seiten (Fr. 190 VI.), und alle Seiten machen einen Winkel von der nämlichen Größe mit der Axe (Fr. 81 I.).

Der schiefe Kegel ist ungleichseitig (Fr. 193 und 78 II., oder 170 I., IV. und V.); seine Seiten sind nur paarweise gleich (Fr. 193 VII., 80 II.), mit Ausnahme der in der Neigungsebene der Axe liegenden kleinsten und größten Seite (Fr. 192 III.).

234. Was versteht man unter Central-Projektion?

I. Central-Projektion (oder hier kurzweg „Projektion“) eines Punktes P (Fig. 212 und 213) auf die Grundfläche F heißt die Spur P' (Fr. 184 III.), worin die durch den projizierten Punkt P und die Spitze O gelegte Gerade OP die Grundfläche F durchdringt. OP' ist die Projizierende.

II. Die Spitze O ist dann streng genommen nicht projizierbar (Fr. 24 I.).

III. Alle anderen Punkte der durch die Spitze parallel zur Grundfläche F gelegten Ebene E_0 haben keine Projektion in endlicher Entfernung von C in Fig. 212 (Fr. 26; 205 I.).

IV. Die Projektion eines Punktes der Grundfläche F fällt mit dem projizierten Punkte selbst zusammen.

V. Die Punkte innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche aus O haben ihre Projektion innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie L.

235. **Wie kann eine Gerade gegen eine Kegelfläche liegen?**

I. Jede Gerade G in der durch die Spitze O, Fig. 212, parallel zur Grundfläche F gelegten Ebene E_0 hat mit der Kegelfläche nur die Spitze, oder gar nichts gemein und hat keine Projektion in endlicher Entfernung von C (Fr. 234 II., III.).

II. Jede durch die Spitze O gehende und der Grundfläche F nicht parallele Gerade G_4 hat als Projektion nur einen Punkt P' (Fr. 184 IV., 21 II.). Liegt dieser Punkt P' innerhalb, auf, oder außerhalb der Leitlinie, so liegt die Gerade G_4 innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche (Fr. 234 V.).

III. Jeder Punkt P' der Grundfläche F kann als die Projektion einer durch die Spitze O gehenden Geraden G_4 gelten, welche innerhalb, auf, oder außerhalb der Kegelfläche liegt (II.).

IV. Die Projektion G' einer weder durch die Spitze O gehenden (II.), noch in der durch O parallel zu F gelegten Ebene E_0 liegenden (I.) Geraden G_1, G_2 oder G_3 ist wieder eine Gerade; denn alle Projizierenden liegen in der durch O und die Gerade G_1, G_2, oder G_3 bestimmten Ebene (Fr. 182 II.), diese aber schneidet F nur in einer Geraden G' (Fr. 185 II.).

V. Wenn in IV. die Projektion die Leitlinie schneidet wie G_1', oder berührt wie G_2', oder wie G_3' gar nicht trifft, so wird die Kegelfläche von der Geraden G_1, G_2, oder G_3 in zwei Punkten K und Q geschnitten, in einem Punkte P berührt, oder in keinem Punkte getroffen (Fr. 234 I. und V.).

In der durch den Berührungspunkt, oder einen Schnittpunkt zwischen Projektion und Leitlinie gelegten Projizierenden kann nämlich wegen Fr. 21 I. nur ein Punkt der berührenden, oder schneidenden Geraden liegen.

VI. Wird eine Gerade durch einen von der Spitze O verschiedenen Punkt P der Kegelfläche gelegt, so kann sie nach I., II. und V. nur dann ganz in der Kegelfläche liegen, wenn sie auch durch die Spitze geht. Vergl. Fr. 233 I.

VII. Die Kegelfläche ist also krumm (Fr. 16 I. und 12 I.), da sich durch jeden ihrer (von der Spitze verschiedenen) Punkte nur eine Gerade (II. und VI.) ziehen läßt, welche ganz in der Kegelfläche liegt.

VIII. Schneidet die in IV. besprochene Gerade G, Fig. 213, die Grundfläche F in D, die durch O parallel zu F gelegte Ebene E_0 in D_0, und schneidet die durch O gelegte Parallele OQ zu G die Grundfläche in Q, so liegt Q in der durch O und G gelegten, E_0 in G_0 schneidenden Ebene, also in der Projektion G' von G (Fr. 186 VI., XV.). Zugleich werden G und G' durch D_0 und Q in je zwei Strahlen D_0DY und D_0X, QDY' und QX' zerlegt; D_0Y und QY' schneiden sich in D; dabei ist QX' die Projektion von XD_0, QY' die Projektion von YD_0, und zwar QD die von YD und DY' die von DD_0.

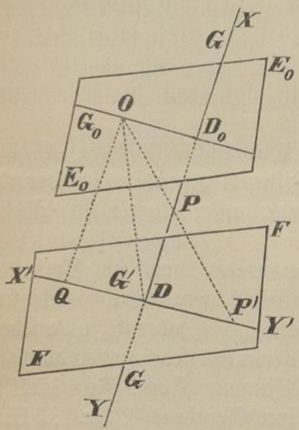

Fig. 213.

IX. Die zwei Punkte Q und K, Fig. 212, in denen eine Gerade G_1 die Kegelfläche schneidet, können entweder auf derselben oder auf verschiedenen Hälften der Doppelkegelfläche liegen.

Im ersteren Falle hat das innerhalb der Kegelfläche liegende, begrenzte Stück QK der Geraden G_1 eine endliche Projektion Q'K'; im anderen Falle (vergl. Fig. 216 S. 296) hat das außerhalb der Kegelfläche liegende, begrenzte Stück QK der Geraden zwei (unendliche) Strahlen Q'X' und K'Y' als Projektion, während die Strecke Q'K' die Projektion der beiden innerhalb der Kegelfläche gelegenen Strahlen QX und KY ist.

X. Durch jeden Punkt P der Kegelfläche lassen sich unzählige **Berührungslinien** oder **Tangenten** an den Kegel legen (V.); dieselben liegen aber in der Ebene, welche sich durch OPP' (Fig. 212) und die durch P' gehende Tangente G_2' der Leitlinie legen läßt (Fr. 182 III.).

XI. Von jedem Punkte B außerhalb der Kegelfläche lassen sich **zwei Scharen von Berührungslinien** an die Kegelfläche legen (V.), weil sich von der Projektion B' des Punktes B zwei Tangenten B'P' und B'T' an die Leitlinie legen lassen (Fr. 103 II.). Jede Schar liegt aber in einer durch P', bezw. T' und durch BB' gehenden Ebene.

236. **Wie kann eine Ebene gegen eine Kegelfläche liegen?**

I. Jede durch die Spitze O, Fig. 212, gelegte, die Grundfläche F in einer Geraden G' schneidende Ebene E **schneidet** entweder die Kegelfläche in **zwei Geraden** OQ' und OK', oder **berührt** dieselbe in **einer Geraden** OP', oder hat **bloß die Spitze** O mit der Kegelfläche gemein, wenn die (als Projektion von E aufzufassende) Spur G' die Leitlinie in Q' und K' schneidet, in P' berührt, oder gar nicht trifft (Fr. 83).

II. Jeder die Axe A enthaltende ebene Schnitt P'OK' (**Hauptschnitt**) besteht aus zwei Kegelseiten, welche durch die zwei Endpunkte P' und K' desselben Grundflächendurchmessers P'K' gehen (Fr. 48 II.).

III. Durch jeden Punkt P in der Kegelfläche kann man **eine**, durch jeden Punkt B außerhalb der Kegelfläche **zwei Berührungsebenen** an die Kegelfläche legen (Fr. 235 X.

und XI.). Die Projektion jeder Berührungsebene berührt die Leitlinie (I.).

IV. Die durch die Spitze O gehende, der Grundfläche F parallele **Ebene** E_0 besitzt **keine Projektion** in endlicher Entfernung von C und hat mit der Kegelfläche **nur die Spitze** O gemein (Fr. 234 II., III.).

V. Jede nicht durch die Spitze O gehende, der Grundfläche F parallele **Ebene** E_1 (Fig. 214) schneidet die Erzeugende in allen Lagen derselben; ihr Schnitt mit der Kegelfläche ist also eine geschlossene Linie und liegt in einer und derselben Hälfte des Doppelkegels. Alle Punkte P des Schnittes sind in gleicher Entfernung von dem Punkte C_1, worin die Schnittebene die Axe A trifft; denn weil $C_1P \parallel CP'$ (Fr. 205 II.), so ist $C_1P : C_1O = CP' : CO$ (Fr. 148 I.); die Größe der Strecke C_1P ist also nicht von der Lage des Punktes P abhängig, da ja C_1O, CP' und CO für alle Punkte P dieselbe Länge haben.

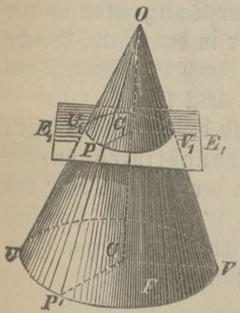

Fig. 214.

Daher ist der Schnitt ein **Kreis** (Fr. 47 II.). Der Halbmesser C_1P dieses Kreises verhält sich zum Halbmesser CP' der Grundfläche, wie der durch die Schnittebene E_1 erzeugte obere Abschnitt OP, OC_1, oder ON_1 einer Kegelseite OP′, der Axe OC, oder der Höhe ON zur ganzen Kegelseite, Axe, oder Höhe (Fr. 148 I.).

VI. Jede durch irgend zwei Kegelseiten gelegte Ebene E schneidet jene Parallelschnittebene E_1 und die Grundfläche in zwei parallelen (Fr. 205 II.) Sehnen (bezw. nach II. in zwei parallelen Durchmessern), welche sich (Fr. 148 I.) ebenfalls wie die Halbmesser des Parallelschnitts und der Grundfläche (V.) verhalten.

VII. Schneidet eine **nicht** durch die Spitze O gehende Ebene E_2 (Fig. 215 und 216) die Grundfläche F in der Spur G', so sind nur die drei Fälle zu unterscheiden, ob eine zu E_2 parallel durch die Spitze O gelegte Ebene E bloß die Spitze, bloß eine Gerade OP', oder zwei Gerade OJ und OZ mit der Kegelfläche gemein hat (I.).

VIII. Im **ersteren** Falle in VII. schneidet die Schnittebene E_2 alle Kegelseiten (Fr. 206 IV.), und zwar alle in derselben Hälfte des Doppelkegels, weil die andere Hälfte ganz auf der E_2 entgegengesetzten Seite der Ebene E liegt; der Schnitt ist also eine geschlossene Linie TPQK (in Fig. 215) und erweist sich bei weiterer Untersuchung als eine **Ellipse** (vergl. Fr. 224 VIII.).

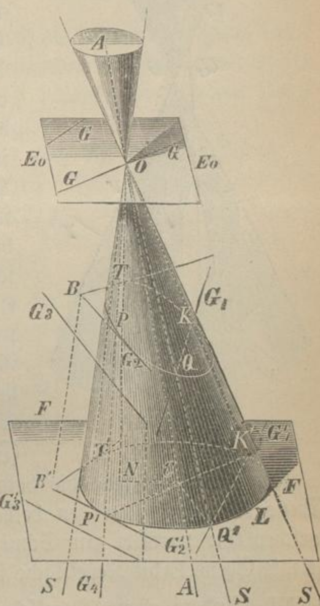

Fig. 215.

IX. Im **zweiten** Falle in VII. ist die Schnittebene E_2 zu einer Berührungsebene parallel (I.), also auch zu der betreffenden Berührungslinie OP' (Fr. 205 I.), aber bloß dieser einen Kegelseite; alle anderen Kegelseiten werden geschnitten und wieder alle auf der nämlichen Seite von E, d. h. in derselben Kegelhälfte (Fr. 206 IV.), der Schnitt AUB (Fig. 216 S. 296) ist aber keine geschlossene Linie, sondern erweist sich als eine **Parabel** (vergl. Katechismus der Raumberechnung. 3. Aufl. S. 55; Katech. d. analytischen Geometrie, S. 167). Die Grundfläche F wird hier von E_2 in einer Geraden AB geschnitten, welche zur Tangente des Punktes P' der Leitlinie parallel ist (I. und Fr. 205 II.).

X. Im dritten Falle in VII. endlich ist die Schnittebene E_2 zu zwei Kegelseiten OJ und OZ, Fig. 216, parallel, schneidet wieder alle anderen Kegelseiten (Fr. 206 IV.), aber einige in der einen, die anderen in der zweiten Kegelflächenhälfte, jenachdem die von O aus der Grundfläche zugewandte Hälfte der Seite mit der Schnittebene E_2 auf derselben, oder auf entgegengesetzten Seiten jener durch die Spitze gelegten Parallelebene E zur Schnittfläche E_2 liegt; der Schnitt besteht aus zwei sich nicht schließenden Zweigen CVD und $C_1V_1D_1$, und heißt eine Hyperbel (vgl. Katech. d. analyt. Geometrie, S. 152). Die Spur der Ebene ZOJ in F ist zu der Spur CD von E_2 in F parallel (Fr. 205 II.).

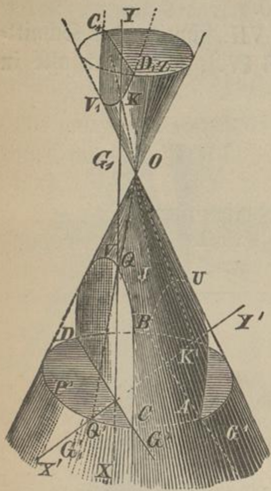

Fig. 216.

Umgekehrt ist jede die beiden Kegelhälften schneidende Ebene E_2 parallel zu den beiden Seiten OJ und OZ, in welchen eine parallel zur Schnittfläche E_2 durch die Spitze gelegte Ebene E die Kegelfläche schneidet.

XI. Andere ebene Kegelschnitte, als Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, giebt es nicht; diese Linien bilden eine abgeschlossene Gruppe. Die Parabel erscheint als Zwischenglied zwischen Ellipse und Hyperbel.

XII. Bei jeder schiefen Kreiskegelfläche ist ein (nicht durch die Spitze O gehender) Normalschnitt zur Axe eine Ellipse (VIII.).

Wegen Fr. 73 VIII. geht aber die Axe des schiefen Kreiskegels nicht durch den Mittelpunkt der Ellipse.

XIII. Jeder schiefe Kreiskegel läßt sich als ein gerader elliptischer Kegel auffassen.

Die Axe dieses elliptischen Kegels liegt in der Ebene des Neigungswinkels (Fr. 192 I.) der Axe des schiefen Kreiskegels gegen dessen Grundfläche und halbiert den Winkel, unter welchem sich die in dieser Ebene liegenden beiden Seiten schneiden (vgl. Fig. 53 S. 63).

XIV. Der Kegel entsteht durch die stetige Bewegung eines stets zu sich selbst parallel bleibenden Kreises, wenn dessen Mittelpunkt nicht aus der Axe A herausrückt und sein Halbmesser sich so, wie es V. verlangt, stetig ändert.

XV. Der gerade Kegel wird auch durch stetige Bewegung eines rechtwinkeligen Dreiecks OCP' (Fig. 217) um die eine Kathete OC erzeugt (Fr. 181 XIV).

237. Was ist ein Kegelstumpf?

I. Der Körper, welcher von der Grundfläche F, einem (in derselben Kegelflächenhälfte gelegenen) Parallelschnitte f zu ihr und dem zwischenliegenden Kegelflächenstück (dem Mantel) begrenzt wird, heißt ein abgestutzter Kegel oder ein Kegelstumpf; die Entfernung h seiner beiden parallelen Grundflächen F und f ist seine Höhe.

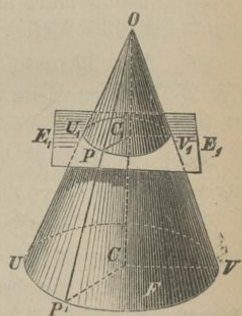

Fig. 217.

II. Der gerade Kegelstumpf (Fig. 217) kann durch die Umdrehung eines Trapezes PC_1CP' entstehen, dessen Parallelseiten C_1P und CP' auf der Seite CC_1, um welche die Umdrehung erfolgt, senkrecht stehen (Fr. 181 XIV.).

III. Hat der Kegelstumpf, dessen Grundfläche F und Abstutzungsfläche f Kreise vom Halbmesser r_1 und r_0 und den

Umfängen u_1 und u_0 sind, die Höhe h, während die abgeschnittene Spitze die Höhe z hatte, ist ferner r der Halbmesser und u der Umfang des in der Mitte der Höhe h (also in der Entfernung $z_m = z + \frac{1}{2} h$ von der Spitze O) gelegten Parallelschnittes, so findet sich aus Fr. 236 V. zunächst $r_0 : r_1 = z : (h + z)$ und $r : r_1 = (\frac{1}{2} h + z) : (h + z)$; hieraus ergiebt sich leicht:

$$r_1 + r_0 = r_1 + \frac{zr_1}{h+z} = \frac{r_1(h+2z)}{h+z} = 2r.$$

Dann ist aber $u = 2\pi r = \pi(r_1 + r_0) = \frac{1}{2}(u_1 + u_0)$.

238. Wie groß ist der Kegelmantel?

I. Auch der Kegelmantel M läßt sich (wegen Fr. 236 III.) auf einer Ebene abwickeln. — Vgl. Fr. 225 I.

II. Beim geraden Kegel vom Halbmesser CU = R und der Höhe OC = H, Fig. 217, erhält man (Fr. 233 VIII.) einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser der Kegelseite OU $= s = \sqrt{R^2 + H^2}$ und dessen Bogen der Leitlinie $L = 2\pi R$ gleicht; daher ist nach Fr. 179 VIII. $M = \frac{1}{2}Ls = \pi Rs$. — Vgl. Fr. 230 II.

III. Der Mantel des schiefen Kegels ist kein Kreisausschnitt (Fr. 233 VIII.).

IV. Der Mantel M des geraden Kegelstumpfes (Fr. 237), dessen Seite $PP' = s = OP' - OP = s_1 - s_0$ ist, hat den Inhalt $M = \frac{1}{2}u_1s_1 - \frac{1}{2}u_0s_0 = \pi(r_1s_1 - r_0s_0)$.

Nach Fr. 236 V. ist aber $s_0 : s_1 = r_0 : r_1$; daher auch $(s_1 - s_0) : s_1 = (r_1 - r_0) : r_1$ und (wegen Fr. 237 III.) weiter:

$$M = \pi s_1(r_1^2 - r_0^2) : r_1 = \pi s_1(r_1 + r_0)(r_1 - r_0) : r_1$$
$$= \pi(r_1 + r_0)(s_1 - s_0) = \frac{1}{2}(u_1 + u_0)s = us.$$

Es läßt sich also der Mantel dieses Stumpfes wie ein Trapez (Fr. 177 IX.) berechnen. Vgl. Fr. 179 XII.

239. Wie groß ist der Inhalt des Kegels?

I. Wegen Fr. 236 V. und 229 IV. ändern sich bei einem Kegel vom Halbmesser R die der Grundfläche $F = \pi R^2$

parallelen Querschnitte genau so wie bei einer Pyramide von der nämlichen Höhe H und einer gleichgroßen Grundfläche.

Nach Fr. 227 IV. hat daher der Kegel denselben Inhalt C wie diese Pyramide, d. h. nach Fr. 232 IV. ist:

$$C = \frac{1}{3}FH = \frac{1}{3}\pi HR^2.$$

II. Der Kegelstumpf (Fr. 237) hat nach Fr. 232 VI. den Inhalt $A = \frac{1}{3}h(F + \sqrt{Ff} + f)$, woraus sich nach Fr. 179 II. weiter ergiebt: $A = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)$.

Vierzehntes Kapitel.

Die Kugel.

240. Was ist eine Kugelfläche und eine Kugel?

I. Die Kugelfläche enthält alle Punkte P des Raumes, welche in gleichem Abstande von einem Punkte M (dem Mittelpunkte) liegen. Diese unveränderliche Entfernung MP = R heißt der Halbmesser der Kugel.

II. Zwei Halbmesser, deren jeder die Verlängerung des anderen bildet, geben einen Durchmesser D = 2R. Vgl. Fr. 48 II.

III. Daher sind alle Halbmesser und alle Durchmesser der Kugelfläche unter sich gleich.

IV. Wird ein Halbkreis FCP_2 (Fig. 218 S. 300) um seinen festliegenden Durchmesser FP_2 gedreht, bis er wieder in seine anfängliche Lage kommt, so beschreibt er wegen Fr. 47 II. eine volle Kugelfläche.

Die Kugelfläche ist demnach eine geschlossene Fläche; der Mittelpunkt M liegt innerhalb derselben.

Die Kugelfläche ist der geometrische Ort (vgl. Fr. 74 XVII.) eines Kreises von gegebenem Halbmesser und von vorgeschriebenem Mittelpunkte. Vergl. Fr. 242 VI.

V. Der von einer Kugelfläche umschlossene Körper heißt eine Kugel.