Katechismus der Ebenen und der räumlichen Geometrie

Zetzsche, Karl Eduard

Leipzig, 1892

2. Das Dreieck

VI. Für die n-Eckpunkte des n-ecks würden daher n-mal (n—3) Diagonalen möglich sein, wenn dabei nicht jede zweimal vorkäme. Deshalb hat das n-eck nur $\frac{1}{2}$ n (n—3) Diagonalen.

Das Viereck	hat	somit	$\frac{1}{2} . 4 . 1 = 2$	Diagonalen,	
„ Fünfeck	„	„	$\frac{1}{2} . 5 . 2 = 5$	„	
„ Sechseck	„	„	$\frac{1}{2} . 6 . 3 = 9$	„	u. s. w.

Zweites Kapitel.

Das Dreieck.

66. Worin können zwei Figuren übereinstimmen?

I. Zwei Figuren können nicht bloß in Bezug auf ihre Größe, sondern auch rücksichtlich ihrer Gestalt übereinstimmen, oder verschieden sein.

II. Zwei Dreiecke und überhaupt zwei Figuren, bezw. Körper sind an Gestalt und Größe gleich (kongruent $\cong$), wenn sie sich decken, bezw. zum Decken bringen lassen. — Vergl. 21 I. und III.

III. Haben zwei Figuren oder Körper bloß gleiche Gestalt, so nennt man sie ähnlich ($\sim$);

IV. haben sie bloß gleiche Größe, so heißen sie inhaltsgleich, oder kurzweg gleich ($=$).

67. Was gilt von kongruenten Figuren?

I. In zwei kongruenten Vielecken, also namentlich auch in zwei kongruenten Dreiecken, müssen alle Stücke (d. s. Seiten und Winkel) der Reihe nach sich decken und demnach gleich sein.

II. Daher sind in kongruenten Dreiecken die Gegenseiten gleicher Winkel und die Gegenwinkel gleicher Seiten gleich, d. h. diejenigen Seiten und Winkel, welche beziehungsweise gleichen Winkeln und gleichen Seiten gegenüberliegen.

III. Kongruente Figuren, z. B. Dreiecke, in gleicher Weise aneinandergesetzt, geben kongruente Figuren.

IV. Umgekehrt lassen sich kongruente Figuren in gleicher Weise in kongruente Teile zerlegen.

V. Es ist daher nicht notwendig, die Kongruenz von mehr als dreiseitigen Figuren eingehend zu untersuchen, da sich dieselbe auf die Kongruenz der Dreiecke zurückführen läßt.

VI. Um die Kongruenz zweier Figuren (oder Körper) darzuthun, braucht man nicht immer die Gleichheit aller Winkel und Seiten nachzuweisen. Etwas Ähnliches zeigte sich schon in Fr. 21 I. und III., Fr. 31 und 52.

VII. Zwei Dreiecke*) z. B. müssen schon kongruent sein, wenn sie in zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Bringt man die beiden übereinstimmenden Winkel zum Decken (Fr. 31) und sorgt man dafür, daß die paarweise gleichen Seiten auf denselben Schenkel fallen, so müssen diese zwei Seitenpaare (Fr. 22 V.) sich decken und wegen Fr. 22 III. auch das dritte Seitenpaar; demnach müssen die Dreiecke kongruent sein (Fr. 66 II.).

VIII. Ebenso sind (nach Fr. 66 II.) zwei Dreiecke kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden Winkeln übereinstimmen, welche an dieser Seite liegen.

Legt man nämlich die Dreiecke mit den beiden übereinstimmenden Seiten auf einander (Fr. 22 V.), und zwar so, daß die Scheitel der paarweise gleichen Winkel auf den nämlichen Endpunkt zu liegen kommen, so decken sich diese beiden Winkelpaare (Fr. 31), ihre anderen Schenkel müssen sich daher paarweise decken und in demselben Punkte schneiden (Fr. 26); dieser Punkt ist der dritte Eckpunkt beider Dreiecke und letztere decken sich also.

---

*) Zwei kongruente Dreiecke pflegt man so zu benennen, daß die Buchstaben an den gleichen Winkeln sich in gleicher Weise folgen; ist z. B. $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$, so schreibt man: $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ und weiß dann zugleich, daß $A_1B_1 = A_2B_2$ 2c.

Zweckmäßig bezeichnet man ferner die Seiten der Dreiecke mit kleinen Buchstaben und die Winkel mit denselben großen Buchstaben, so daß z. B. die Seite $a = BC$ dem $\angle A = \angle BAC$ gegenüberliegt. Vergl. Fr. 64 II.

68. Wie groß ist die Summe der drei Winkel eines Dreiecks?

I. Verlängert man zwei Seiten CB und AB eines Dreiecks ABC (Fig. 44) über ihren Schnittpunkt B hinaus nach E und D und zieht man durch B eine Gerade NF so, daß sie mit BE einen eben so großen Winkel einschließt, wie CA mit AB, daß also $\angle$ v $=$ $\angle$ A ist, dann sind NF und CA parallel (Fr. 61 I. 1.). Nun kann aber die Gerade NF zunächst weder mit BC, noch mit BA zusammenfallen, weil sie dabei (gegen Fr. 26) die ihr parallele AC schneiden müßte. Träte ferner die unbegrenzte Gerade NF bei B in das Dreieck ABC hinein, so müßte sie auch irgendwo wieder aus demselben herauskommen (Fr. 28 IV.); nun kann aber NF weder die ihr parallele Seite AC schneiden (Fr. 26), noch zum zweiten Male die von ihr schon in B geschnittenen Seiten AB und BC (Fr. 21 II.). Demnach kann NF nicht in das Dreieck laufen, auch kann deshalb weder NB, noch deren Verlängerung BF in den $\angle$ w eintreten (Fr. 27 II.), sondern sie muß innerhalb der beiden Winkel EBC und DBA liegen, wie es Fig. 44 zeigt. Weil nun aber NF und CA parallel sind, muß $\angle$ u $=$ $\angle$ C sein; da ferner auch $\angle$ w $=$ $\angle$ B (Fr. 42 II.) ist und $\angle$ v $=$ $\angle$ A gemacht wurde, so ist die Summe der drei Winkel A, B und C so groß wie die Summe der drei Winkel u, w und v, d. h. $=$ 2 R (Fr. 34 III.).

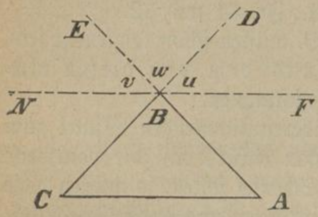

Fig. 44.

II. Es beträgt also die Summe der drei Winkel eines Dreiecks stets 180° oder 2 R.

69. Welche Folgerungen ergeben sich aus Fr. 68?

I. Ist in einem Dreiecke die Summe zweier Winkel so groß wie die Summe zweier Winkel eines zweiten Dreiecks, so sind die dritten Winkel der beiden Dreiecke gleich (Fr. 20 VIII.).

II. Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel überein, so ist die Summe der beiden anderen Winkel in beiden Dreiecken gleich groß (Fr. 20 VIII.).

III. Jeder Winkel eines Dreiecks ist hohl (Fr. 35 I.).

IV. Die Summe zweier (inneren) Winkel eines Dreiecks ist kleiner als 180° (Fr. 20 III.).

V. Verlängert man eine Seite AB (Fig. 44) eines Dreiecks ABC nach E, so entsteht zwischen der Verlängerung BE und der anderen durch denselben Endpunkt B gehenden Seite BC der Außenwinkel EBC.

Da nun dieser Außenwinkel EBC mit dem innern Winkel CBA zusammen ebenfalls 180° ausmacht (Fr. 39 IV.), so muß $\angle$ EBC $=$ $\angle$ A $+$ $\angle$ C sein (Fr. 20 V.), oder:

VI. Jeder Außenwinkel gleicht der Summe der beiden inneren Gegenwinkel.

VII. Daher ist jeder Außenwinkel größer, als jeder seiner inneren Gegenwinkel.

VIII. Sind die drei Winkel eines Dreiecks unter sich gleich, so ist jeder $= 60° = \frac{2}{3}$ R.

IX. Zu Fr. 62 IV. 3. läßt sich jetzt noch ergänzend bemerken: wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel von 180° abweicht, dann liegt der Schnittpunkt jener beiden Geraden auf derjenigen Seite der dritten, wo die Summe der inneren Winkel kleiner als 180° ist.

70. Wieviel Arten Dreiecke giebt es rücksichtlich der Winkel?

I. In einem Dreiecke kann nicht mehr als ein Winkel ein rechter, bezw. ein stumpfer sein, und ebensowenig kann in einem Dreiecke ein rechter und ein stumpfer zugleich vorkommen (Fr. 69 IV.), vielmehr müssen stets wenigstens zwei Winkel eines Dreiecks spitz sein.

II. Daher giebt es rücksichtlich der Winkel nur drei Arten Dreiecke:
das rechtwinkelige Dreieck mit einem rechten Winkel,
das stumpfwinkelige Dreieck mit einem stumpfen Winkel,
das spitzwinkelige Dreieck mit drei spitzen Winkeln.

III. Im rechtwinkeligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse, die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten.

71. Was ist noch über die Winkel der rechtwinkeligen und der stumpfwinkeligen Dreiecke zu bemerken?

I. Im rechtwinkeligen oder stumpfwinkeligen Dreieck ist der rechte oder stumpfe Winkel der größte (Fr. 37 III.).

II. Im rechtwinkeligen Dreieck ist der rechte Winkel gleich der (nach Fr. 68 II. 90° betragenden) Summe der beiden spitzen.

III. Ein Dreieck ist rechtwinkelig, wenn der eine Winkel desselben gleich der Summe der beiden anderen ist; denn dann ist jener Winkel die Hälfte von 2 R (Fr. 68 II.).

IV. Sind in einem rechtwinkeligen Dreieck die beiden spitzen Winkel gleich, so ist jeder $= 45° = \frac{1}{2}$ R.

V. Machen zwei Gerade SF und KE (Fig. 45) schiefe Winkel, so kann die von einem Punkte P der einen SF auf die andere KE herabgelassene Senkrechte PQ nur auf die Seite des spitzen Winkels SFK fallen, weil sonst das Dreieck PFQ einen stumpfen und einen rechten Winkel haben müßte, was aber Fr. 70 I. widerspräche.

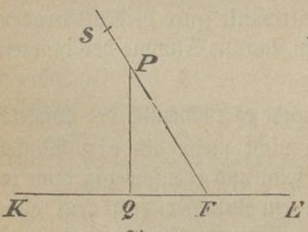

Fig. 45.

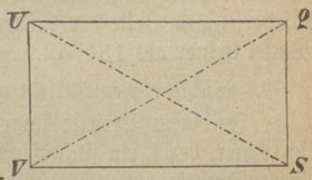

Fig. 46.

VI. Die Normalen auf den Schenkeln eines hohlen Winkels schneiden sich stets (Fr. 62 IV.), und zwar unter einem ebenso großen Winkel als die Schenkel selbst.

Ist nämlich der hohle Winkel ein rechter, wie QSV in Fig. 46, und ist UQ ⊥ SQ, UV ⊥ SV, so ist UQ // SV

(Nr. 62 II. 3.), und deshalb schneiden sich VU und UQ (Nr. 60 II.), und zwar unter einem rechten Winkel QUV (Nr. 62 V.).

Wäre dagegen der hohle Winkel ein schiefer, so ist entweder er selbst, oder sein Nebenwinkel ein spitzer, z. B. w in Fig. 47; errichtet man nun im Punkte E des Schenkels BC eine Senkrechte EZ, so muß diese die Gerade DBN, in welcher der andere Schenkel (entweder BD, oder BN) des hohlen Winkels liegt, in einem von B aus nach D hin liegenden Punkte F schneiden (Nr. 69 IX.), und dabei ist ∠ EFB = DFM spitz; errichtet man daher in einem von F aus nach D,

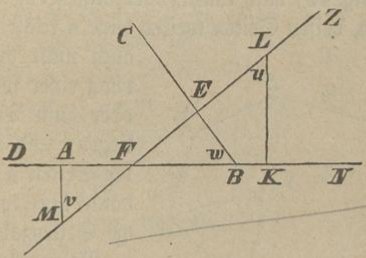

Fig. 47.

oder nach N hin liegenden Punkte A, oder K der Geraden DN eine Senkrechte AM oder KL, so muß diese die auf BC senkrechte EF in M, oder in L schneiden (Nr. 62 IV. 3.), und dabei stimmen die Dreiecke MAF und LKF mit dem △ BEF in dem Winkel bei F und in dem rechten Winkel (bei A, K, E) überein, weshalb die spitzen Winkel v, u und w (Nr. 69 I.) und auch deren stumpfe Nebenwinkel (Nr. 39 I.) unter sich gleiche Größe haben.

Liegt der Schnittpunkt der Normalen KL mit EZ im Winkelraume von w, so ist der gegen w hin gekehrte Schnittwinkel (wie in Fig. 47 der ∠KLZ) = 180° — w (Nr. 39 IV.).

Anm. Ein kürzerer Beweis ließe sich aus Nr. 72 III. herleiten.

72. Wie groß ist die Winkelsumme des Vielecks?

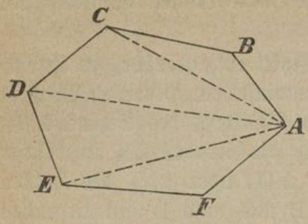

Fig. 48.

I. Das n-eck ABCDEF läßt sich nach Fig. 48 aus n—2 von außen, oder innen aneinandergelegten Dreiecken, die paarweise eine ganze Seite gemein haben, zusammensetzen und auch wieder in n—2 solche Dreiecke zerlegen.

II. Fügt man an die Seite AB oder CD eines Vielecks ABCDEF (Fig. 49) nach innen, oder außen ein Dreieck ASB, oder CQD an, dessen Seiten weiter keine n-ecksseite schneiden, auch nicht die Verlängerung einer solchen bilden, oder zum Teil auf ihr liegen, und nimmt man die Seiten AB, bezw. CD dann hinweg, so wächst die Seitenzahl um 1.

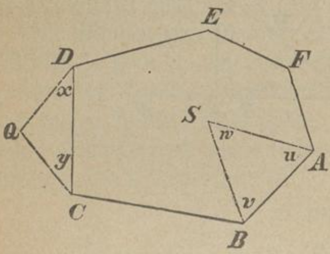

Fig. 49.

Beim Anfügen nach außen wächst die Winkelsumme des Vielecks um $\angle x + \angle y + \angle Q = 180°$ (Fr. 68 II.).

Im andern Falle vermindert sich die Winkelsumme um $\angle u + \angle v$ und vermehrt sich gleichzeitig um den überstumpfen Winkel $(360° - w)$ bei S, wächst also überhaupt um $(360° - w) - u - v = 360° - (w + u + v) = 360° - 180° = 180°$.

In jedem der beiden Fälle wächst also die Winkelsumme um 2 R, wenn die Seitenzahl um 1 wächst.

III. Daher beträgt in Fortsetzung von Fr. 68 II. die Winkelsumme:

im Viereck	$2 \,.\, 2\,\mathfrak{R} = 4\,\mathfrak{R}$,
„ Fünfeck	$3 \,.\, 2\,\mathfrak{R} = 6\,\mathfrak{R}$,
„ Sechseck	$4 \,.\, 2\,\mathfrak{R} = 8\,\mathfrak{R}$,
. . . .	. . . .
„ n-eck	$(n-2)\, 2\,\mathfrak{R} = (2\,n-4)\,\mathfrak{R}$.

IV. Das n-eck kann höchstens n—3 überstumpfe Winkel oder einspringende Ecken haben (Fr. 72 III.); denn n—2 überstumpfe Winkel würden ja schon mehr als $(n-2)\,2\,\mathfrak{R}$ betragen (Fr. 35 I.).

V. Stehen zwei Seiten UV und QS, Fig. 50, eines Vierecks UVSQ auf der dritten Seite VS senkrecht, so beträgt die Summe der beiden Winkel U und Q an der vierten Seite UQ $2\,\mathfrak{R}$ (III.). Legt man nun das Viereck auf VS um, so fällt SQ auf VU (Fr. 39 III., 31).

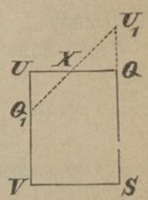

Fig. 50.

Ist dann noch $Q = \mathfrak{R}$, so ist auch $U = \mathfrak{R}$, und beim Umlegen muß Q auf U fallen; denn fiele Q nach Q_1, so müßte $\angle\, U = \mathfrak{R}$ (Fr. 72 III.) und $\angle\, UQ_1X = \mathfrak{R}$ (Fr. 37 I.) sein, was Fr. 70 I. widerspricht. Daher:

VI. sind in einem Viereck mit drei rechten Winkeln V, S und Q je zwei einander gegenüberliegende Seiten nicht bloß parallel (Fr. 62 II. 3.), sondern auch gleich (V.).

VII. Ist umgekehrt bei $\angle\, V = \mathfrak{R} = \angle\, S$ auch $UV = QS$, so decken sich U und Q beim Umlegen auf VS, und es ist nicht nur $\angle\, U = \angle\, Q = \mathfrak{R}$ (III.), sondern es sind weiter nach VI. auch die Gegenseiten paarweise parallel und gleich.

73. Ist durch die Gleichheit, oder Ungleichheit zweier Winkel, bezw. Seiten eines Dreiecks auch die Gleichheit, oder Ungleichheit der Gegenseiten, bezw. der Gegenwinkel derselben bedingt?

I. Halbiert man in dem $\triangle\, ABC$ (Fig. 51 S. 62), in welchem $\angle\, A = \angle\, C$ sei, den Winkel an der Spitze B, macht man also $\angle m = \angle n$, so ist auch $\angle p = \angle q$ (Fr. 69 I.); demnach stimmen die beiden Dreiecke ABD und CBD in der Seite BD (Fr. 20 I.) und den beiden anliegenden Winkeln überein, sind also kongruent (Fr. 67 VIII.), und deshalb ist AB = CB (Fr. 67 II.).

Die Gleichheit der Winkel A und C bedingt also die Gleichheit ihrer Gegenseiten CB und AB.

II. Halbiert man in dem $\triangle$ ABC (Fig. 51), in welchem AB=CB sei, den Winkel an der Spitze B, so stimmen, weil auch BD=BD ist (Fr. 20 I.), die beiden Dreiecke ABD und CBD in den Winkeln m und n und deren einschließenden Seiten überein, sind also kongruent (Fr. 67 VII.), und deshalb ist auch $\angle A = \angle C$ (Fr. 67 II.).

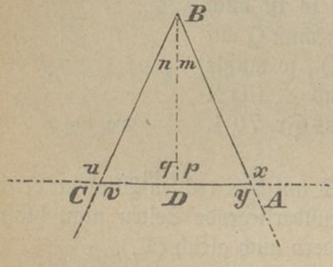

Fig. 51.

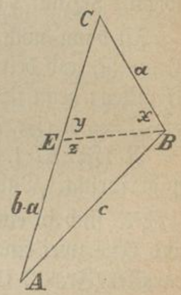

Fig. 52.

Die Gleichheit der Seiten AB und CB zieht demnach die Gleichheit ihrer Gegenwinkel C und A nach sich.

III. Ist in Fig. 52 CA $>$ CB, so kann man von C aus auf CA ein Stück CE abschneiden, welches CB gleicht; zieht man dann die Strecke BE, so ist $\angle x = \angle y$ (II.). Weil ferner $\angle CBA > \angle x$ ist (Fr. 20 III.), so muß auch $\angle B > \angle y$ sein, und da wieder $\angle y > \angle A$ ist (Fr. 69 VII.), so ist um so mehr $\angle B > \angle A$ (Fr. 20 VII.).

Der größeren Seite AC = b eines Dreiecks steht also auch der größere Winkel B gegenüber.

IV. Sind zwei Winkel B und C eines Dreiecks ABC ungleich, so ist die dem größeren $\angle$ B gegenüberliegende Seite AC = b größer als die Gegenseite AB = c des kleineren Winkels C.

Es muß offenbar entweder $b = c$, oder $b > c$, oder $b < c$ sein.

Wäre $b = c$, so müßte $\angle B = \angle C$ sein (II.); wäre $b < c$, so wäre auch $\angle B < \angle C$ (III.); da aber beides der Voraussetzung ($\angle B > \angle C$) widerspricht, so muß $b > c$ sein.

V. Halbiert man den $\angle$ B (Fig. 53) eines $\triangle$ ABC, in welchem BC > BA ist, durch die Gerade BX, so schneidet BX in N die Seite AC so, daß NC > NA ist. Vergl. Fr. 148 IV.

Der Winkel BNC ist ein stumpfer (Fr. 39 VII.), weil

$$\angle BAN > \angle BCN \text{ (III.)}$$
$$\angle BAN + \angle m > \angle BCN + \angle n \text{ (Vor. u. Fr. 20 IX.)}$$
$$\angle BNC > \angle BNA + \text{ (Fr. 69 VI.)}.$$

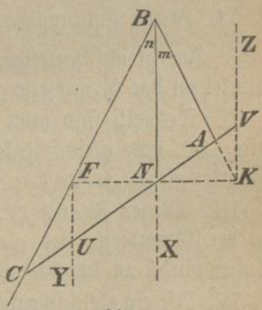

Fig. 53.

Errichtet man nun in N auf BX eine Senkrechte FK, so schneidet dieselbe die Strahlen BC und BA in F und K so, daß F innerhalb BC, K außerhalb BA liegt. Zieht man dann noch durch F und K zwei Parallelen FY und KZ zu BX, so schneiden diese die Gerade CA in U und V; dabei liegt U innerhalb CN, V außerhalb NA, denn es sind ja $\angle$ NFY und $\angle$ NKZ rechte (nach Konstr. und Fr. 62 V.), dagegen

$\angle$ CFN stumpf (Fr. 69 VII.) und $\angle$ BKN spitz (Fr. 70 I.). Deshalb ist weiter:

$$\frac{\triangle BNF \cong \triangle BNK \text{ (Fr. 67 VIII.)}}{FN = NK \text{ (Fr. 67 II.)}}$$

$$\angle NFY = \Re = \angle NKZ \text{ (Konstr. u. Fr. 62 V.)}$$

$$\frac{\angle FNU = \angle KNV \text{ (Fr. 42 II.)}}{\triangle FNU \cong \triangle KNV \text{ (Fr. 67 VIII.)}}$$

$$NU = NV \text{ (Fr. 67 II.)}$$

$$\frac{NC > NU \text{ (Fr. 20 III.)}; \quad NV > NA \text{ (Fr. 20 III.)}}{NC > NA \text{ (Fr. 20 IV., VII.)}.}$$

VI. Halbiert man in dem $\triangle$ ABC, Fig. 53, in welchem BC $>$ BA ist, die Seite AC, so kann nach V. die vom Halbierungspunkte H nach B gezogene Gerade HB den Winkel B nicht halbieren, und kann ferner

VII. die Mitte einer zwischen BC und BA normal zur Winkelhalbierenden BX gezogenen Strecke FK nicht in der Geraden HB liegen,

VIII. endlich aber kann die Gerade HB nach VI. und Fr. 31 die auf ihr zwischen BC und BA errichteten Normalen nicht halbieren; es würde ja dies nach Fr. 67 VIII. bedingen, daß $\angle$ HBC $=$ $\angle$ HBA wäre.

74. Welche Folgerungen ergeben sich aus Fr. 73?

I. Im gleichschenkeligen Dreieck (Fr. 64 III.) sind die Winkel an der Grundseite gleich (Fr. 73 II.).

II. Deshalb sind auch die Außenwinkel an der Grundseite AC des gleichschenkeligen Dreiecks ABC (Fig. 51) einander gleich (Fr. 39 I.); $\angle u = \angle v = \angle x = \angle y$.

III. Wegen Fr. 69 IV. sind die beiden gleichen Winkel an der Grundseite des gleichschenkeligen Dreiecks spitz, die Außenwinkel an der Grundseite aber stumpf (Fr. 39 IV.).

IV. Ist ein gleichschenkeliges Dreieck rechtwinkelig, so mißt jeder Winkel an der Grundseite 45° (Fr. 68). — Vergl. Fr. 71 IV.

V. Im gleichseitigen Dreieck (Fr. 64 III.) folgt aus der Gleichheit der Seiten $a = b$ und $b = c$, daß Winkel $A = B$ und $B = C$; daher ist $\angle A = \angle B = \angle C$ (Fr. 20 V.), und jeder Winkel ist $= 60° = \frac{2}{3}$ R (Fr. 69 VIII.)

VI. Die Gegenseiten zweier gleichen Winkel desselben Dreiecks sind gleich (Fr. 73 I.), das Dreieck also gleichschenkelig; ist aber

VII. das Dreieck gleichwinkelig, so ist es wegen Fr. 73 I. und Fr. 20 V. auch gleichseitig.

VIII. Aus Fr. 73 IV. folgt wegen Fr. 71 I., daß im rechtwinkeligen und im stumpfwinkeligen Dreieck die dem rechten oder stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite des Dreiecks ist. Deshalb ist auch

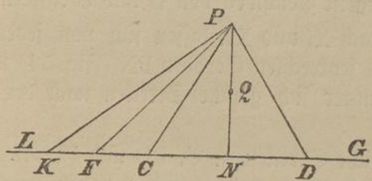

Fig. 54.

IX. die von einem Punkte P (Fig. 54) auf eine nicht durch P gehende Gerade G herabgefällte Senkrechte PN kürzer als jede von diesem Punkte P nach einem beliebigen Punkte C in dieser Geraden G gezogene Strecke PC.

Diese Senkrechte PN heißt der **Abstand** oder die **Entfernung** des Punktes P von der Geraden G.

X. Die von einem Punkte P (Fig. 54) nach verschiedenen, in einer nicht durch P gehenden Geraden G liegenden Punkten C, F, K ꝛc. gezogenen Strecken PC, PF, PK ꝛc. werden (wegen VIII.) um so länger, je weiter diese Punkte C, F, K ꝛc. vom Fußpunkte N der von P auf G herabgefällten Senkrechten PN abstehen. Die Winkel PCF, PFK ꝛc. sind nämlich stumpf (Fr. 69 VII.), da ja

$$\angle PNL = 90°.$$

Lägen die Punkte, wie F und D, auf verschiedenen Seiten von N, so klappe man die Ebene um NP um.

Umgekehrt rückt F um so weiter von N hinweg, je größer PF wird.

XI. Sind die beiden Punkte C und D (Fig. 54) einer Geraden G gleich weit entfernt von dem Fußpunkte N der von einem Punkte P auf G gefällten Senkrechten PN, so stehen D und C auch von P gleich weit ab. Die beiden Dreiecke PNC und PND stimmen ja in den rechten Winkeln (Fr. 39 III.) bei N und deren einschließenden Seiten überein, sind also kongruent (Fr. 67 VII.), und deshalb ist CP=DP (Fr. 67 II.).

XII. Auch jeder andere Punkt, z. B. Q, in NP und seiner Verlängerung ist gleichweit von D und C entfernt.

XIII. Nach X. und XI. lassen sich von jedem Punkte P in der auf G senkrechten Geraden PN (Fig. 54) nicht mehr als zwei unter sich gleiche Strecken nach der Geraden G ziehen.

Zwei gleiche Strecken, z. B. PD und PC, liegen auf verschiedenen Seiten von PN; D und C haben gleichen Abstand von N.

XIV. Im gleichschenkligen Dreiecke DPC, Fig. 54, ist nach X. jede Strecke, welche von der Spitze P nach einem Punkte der Grundseite CD gezogen wird, kleiner als die Schenkel DP und CP,

XV. und jede Strecke PF nach einem Punkte F in der Verlängerung der Grundseite CD größer als DP und CP.

XVI. Jeder Punkt S (Fig. 55) außerhalb der von dem Punkte P auf die Gerade G herabgefällten Senkrechten PN hat ungleiche Entfernung von zwei in G liegenden und von N gleichweit abstehenden Punkten D und C.

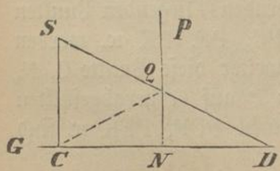

Fig. 55.

SD (oder SC) muß nämlich nach Fr. 28 I. die Senkrechte NP in Q schneiden; zieht man nun noch die Strecke QC, so ist:

$$\frac{\frac{\frac{DQ = CQ \text{ (XI.)}}{\angle QCD = \angle QDC \text{ (Fr. 73 II.)}}}{\angle SCD > \angle QCD \text{ (Fr. 20 III.)}}}{\angle SCD > \angle QDC \text{ (Fr. 20 VI.)}}$$

$$SD > SC \text{ (Fr. 73 IV.)}.$$

XVII. Daher muß jeder Punkt Q (Fig. 55), welcher von den beiden Punkten D und C der Geraden G gleichweit entfernt ist, in der Geraden NP liegen, welche in der Mitte N zwischen D und C auf G senkrecht steht; wenn nämlich Q außer PN läge, so könnte nach XVI. nicht QC = QD sein.

Kürzer spricht man diesen Satz so aus: Die **Senkrechte PN ist der geometrische Ort** eines von den Punkten D und C gleichweit entfernten Punktes *).

XVIII. Fällt man von einem Punkte T (Fig. 56) der Halbierungslinie BX eines (hohlen) Winkels ABC Senkrechte TU und TV auf die Winkelschenkel AB und BC und klappt man den $\angle y$ um BT auf den $\angle x$, so müssen sich beide decken (Fr. 31). Da nun T auf sich selbst liegen geblieben ist, so müssen auch TV und TU sich decken (Fr. 57 IV.); deshalb ist also auch

BU = BV und ebenso

TV = TU (Fr. 22 IV.),

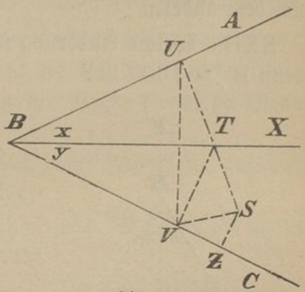

Fig. 56.

d. h. jeder Punkt T der Halbierungslinie BX ist von den Schenkeln AB und CB gleichweit entfernt (vergl. IX.).

---

*) Vergl. Fr. 134 IV. — Über andere geometrische Örter vergleiche XX., Fr. 96 IX., Fr. 98 III., Fr. 108 XIII., Fr. 133 VIII., Fr. 148 VII., Fr. 166 X und XI., Fr. 170 XI., Fr. 206 III., Fr. 240 IV.

XIX. Fällt man von dem nicht in der Halbierungslinie BX (Fig. 56) gelegenen Punkte S des hohlen Winkels ABC die Senkrechten SU und SZ auf die Schenkel AB und CB, so wird die eine Senkrechte SU die Halbierungslinie BX in T schneiden (Fr. 28 I.). Zieht man nun $TV \perp BC$, dann UV und SV, so ist $UT = VT$ (XVIII.), $\angle TUV = \angle TVU$ (Fr. 73 II.), $\angle TVU < \angle SVU$ (Fr. 20 III.), daher $\angle TUV < \angle SVU$ (Fr. 20 IV.) und $SU > SV$ (Fr. 73 IV.); da aber $\angle SZV = 90°$ gemacht wurde, muß $SV > SZ$ sein (VIII.) und deshalb $SU > SZ$ (Fr. 20 VII.),

d. h. jeder Punkt S außerhalb der Halbierungslinie BX ist von den Schenkeln AB und BC ungleichweit entfernt.

XX. Daher ist die Halbierungslinie BX (Fig. 56) des hohlen Winkels B der geometrische Ort eines innerhalb B liegenden und von den Schenkeln AB und CB gleichweit entfernten Punktes T,

XXI. dagegen liegt jeder innerhalb B gelegene Punkt S außerhalb der Halbierungslinie BX des hohlen Winkels B, sobald er von dem einen Schenkel weiter entfernt liegt, als von dem andern.

XXII. Welche Änderung in XVIII. bis XXI. wird nötig, wenn $B > 180°$ ist?

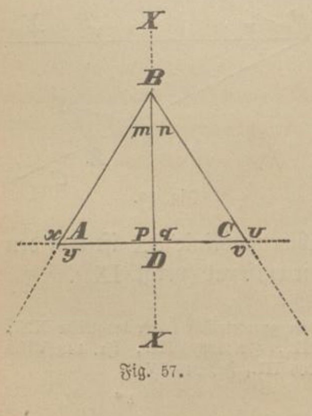

Fig. 57.

75. Was ist vom symmetrischen Dreieck zu bemerken?

I. Die Symmetrieaxe XX (Fr. 64 IV.) eines symmetrischen Dreiecks ABC, Fig. 57, kann nur durch einen Eckpunkt B laufen.

II. Im symmetrischen Dreiecke ABC, Fig. 57, werde die von der Symmetrieaxe geschnittene Seite AC die **Grundseite** oder **Basis**, ihr Gegenwinkel die Spitze, die anderen beiden Seiten AB und CB die Schenkel genannt; die zwischen Spitze und Basis gelegene Strecke CD der Symmetrieaxe heiße Symmetriestrecke. Vergl. Fr. 64 III.

III. Da △ BDC beim Umklappen das △ BDA deckt (Fr. 64 IV.), so ist BA = BC, d. h. das symmetrische Dreieck ist entweder gleichschenkelig, oder gleichseitig (Fr. 64 III.).

Von ihm gelten daher die Sätze in Fr. 74 I. bis VII., XIV. und XV.

IV. Zugleich ist $\angle m = \angle n$,
$\angle p = \Re = \angle q$,
und $AD = CD$;

d. h. die Symmetrieaxe XX halbiert den Winkel B an der Spitze, halbiert die Grundseite AC und steht auf der Grundseite senkrecht.

Daher gelten vom symmetrischen Dreiecke auch die Sätze in Fr. 74 X. bis XIII., XVI. bis XXI. Vergl. Fr. 73 V.

V. Das gleichschenkelige Dreieck ist symmetrisch gegen die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze (Fr. 73 II.), das gleichseitige gegen die Halbierungslinie jedes Winkels.

VI. In dem symmetrischen Dreiecke fallen zusammen:
1. die Halbierungslinie des Winkels B an der Spitze;
2. die Senkrechte von der Spitze B auf die Grundseite AC;
3. die in der Mitte D der Grundseite auf dieser errichtete Senkrechte;
4. die durch die Spitze B und die Mitte der Grundseite gezogene Gerade.

VII. Ein Dreieck ABC, Fig. 57, ist symmetrisch gegen XX:
1. wenn $\angle m = \angle n$ und $\angle p = \angle q = \Re$;
2. wenn $AD = CD$ und $BD \perp AC$;
3. wenn $\angle m = \angle n$ und $AD = CD$.

Der Beweis zu 1. und 2. stützt sich auf Fr. 67 VII. und VIII., der zu 3. auf V. in Verbindung mit Fr. 73 VI.

76. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Seiten des Dreiecks?

I. In jedem Dreieck ist die Summe $a + b$ zweier Seiten größer als die dritte Seite c.

Verlängert man die Seite $AC = b$ (Fig 58) um ein Stück $CD = CB = a$ und zieht DB, so ist $\angle CBD = \angle CDB$ (Fr. 74 I.); da nun $\angle ABD > \angle CBD$ (Fr. 20 III.), so ist auch $\angle ABD > \angle CDB$ (Fr. 20 IV.), deshalb $AD > AB$ (Fr. 73 IV.) oder $a + b > c$ (Fr. 20 II.).

II. In jedem Dreieck ist die Differenz $b - a$ zweier Seiten kleiner als die dritte Seite c.

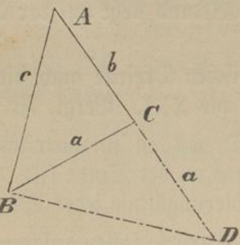

Fig. 58.

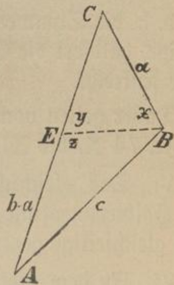

Fig. 59.

Trägt man auf der (größern) Seite $CA = b$ (Fig. 59) von C aus ein Stück $CE = CB = a$ ab und zieht man die Strecke BE, so ist $\angle z > 90°$ (Fr. 74 III.) und deswegen $EA < AB$ (Fr. 74 VIII.) oder $b - a < c$ (Fr. 20 II.).

77. Welche Folgerungen lassen sich aus Fr. 76 ziehen?

I. In Fig. 60 muß nach Fr. 76 I. der Reihe nach

$$CD + DA > CA$$
$$DE + EA > DA \text{ 2c. sein.}$$

Daher ist auch

$$AB < BC + CA$$
$$AB < BC + CD + DA$$
$$AB < BC + CD + DE + EA \text{ 2c.,}$$

d. h. die Strecke AB ist kürzer als jede zwischen den Punkten A und B gezogene gebrochene Linie.

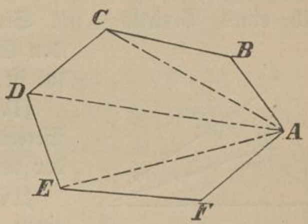

Fig. 60.

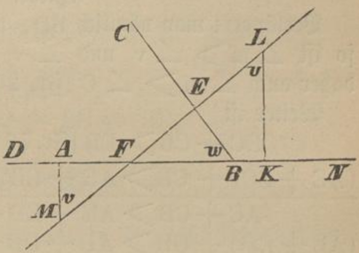

Fig. 61.

Auch wenn die gebrochene Linie, z. B. BEMA in Fig. 61, die Strecke AB schneidet, hört der Satz I. nicht auf zu gelten, da

BE + EF > BF

FM + MA > FA.

Selbst wenn die gebrochene Linie nicht in einer und derselben Ebene liegt, gilt der Satz I. noch, da dann in Fig. 60 nur jedes der auf einander folgenden Dreiecke ABC, ACD ꝛc. in einer andern Ebene liegt.

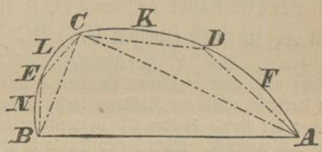

Fig. 62.

II. In Fig. 62 schmiegt sich die gebrochene Linie ADCEB weit mehr an die zwischen A und B gezogene krumme Linie AFDKCLENB an, als die gebrochene ACB. Setzt man daher das in Fig. 62 angedeutete Verfahren weiter fort, so wird man eine sich um so genauer an die krumme Linie anschmiegende gebrochene erhalten, je mehr Zwischenpunkte man in der krummen wählt; um so weniger werden sich auch die einzelnen Teile der krummen in ihrer Länge von den einzelnen Strecken der gebrochenen unterscheiden, und wie die gebrochene, so wird auch die krumme größer sein als die Strecke $\overline{AB}$.

III. Die Strecke $\overline{AB}$ ist also die **kürzeste Linie** zwischen den zwei Punkten A und B. Vergl. Fr. 22 VIII.

IV. Zieht man von einem Punkte D (Fig. 63) innerhalb eines Dreiecks ABC Strecken DA und DB nach den Endpunkten einer Seite AB, so ist

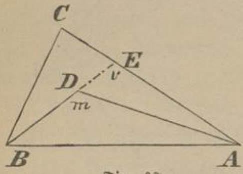

Fig. 63.

(IV a) die Summe dieser Strecken kleiner als die Summe der beiden anderen Dreiecksseiten,

(IV b) erstere schließen aber einen größern Winkel ein als letztere.

Verlängert man nämlich BD, bis sie AC in E schneidet, so ist $\angle m > \angle v$ und $\angle v > \angle C$ (Fr. 69 VII.), daher auch $\angle m > \angle C$ (Fr. 20 VII.).

Weiter ist

$$\begin{array}{rl} EC + CB > EB & \text{(Fr. 76 I.)} \\ (AE + EC) + CB > AE + EB & \text{(Fr. 20 IX.)} \\ \hline AC + CB > AE + ED + DB & \text{(Fr. 20 II.)} \\ (AE + ED) + DB > AD + DB & \text{(Fr. 76 I. und Fr. 20 IX.)} \\ \hline AC + CB > AD + DB & \text{(Fr. 20 VII.).} \end{array}$$

V. Ist dabei $AC = AD$, d. h. liegen C und D im Kreise um A, so muß (wegen IV.) $BC > BD$ sein.

Anm. Aus IV. ist ersichtlich, daß der Winkel zwischen zwei Geraden, welche von zwei gegebenen Punkten A und B (Fig. 63) auslaufen, also auch die Verschiedenheit der Richtung dieser beiden Geraden um so kleiner wird, je weiter der Punkt D oder C, in welchem die beiden Geraden zusammenlaufen, von AB wegrückt. Rückt dieser Punkt in **unendliche Entfernung** von AB, d. h. schneiden sich die beiden Geraden gar nicht mehr, sondern sind sie parallel, so wird die Richtungsverschiedenheit = 0. Vergl. Fr. 56 IV.

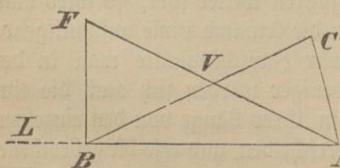

Fig. 64.

VI. Zieht man von einem im Außenwinkel CBL (Fig. 64) des Winkels B eines Dreiecks ABC (aber nicht im Scheitelwinkel von C) gelegenen Punkte F

Strecken FA und FB nach den Endpunkten der Seite AB, so muß die eine Strecke FA die eine Seite CB in V schneiden (Nr. 28 I.). Dabei ist die Summe dieser sich schneidenden Strecke und Seite größer als die Summe der sich nicht schneidenden; denn es ist:

$$\frac{AC < AV + VC; \; BF < BV + VF \text{ (Nr. 76 I.)}}{AC + BF < AV + VF + VC + BV \text{ (Nr. 20 X.)}}$$

$$AC + BF < AF + BC \text{ (Nr. 20 II.)}.$$

VII. Ist dabei $AC = AF$, d. h. liegen C und F im Kreise um A, so muß wegen VI.

$$BF < BC$$

sein.

VIII. Ist dabei $AC = BC$, so ist $BF < AF$ (VI.). Vergl. Nr. 74 XVI.

IX. Daher kann in V. nicht

$$AC = AD = BC = BD,$$

und in VII. nicht

$$AC = AF = BF = BC$$

sein.

X. In verwandter Weise wie in IV. läßt sich auch der allgemeinere Satz beweisen, daß der Umfang eines Vielecks mit lauter hohlen Winkeln kleiner ist, als der Umfang eines dasselbe umschließenden Vielecks.

XI. Daß die Sätze IV., VI. und IX. nicht zu gelten aufhören, wenn der Punkt D, bezw. F in die Seite BC rückt und beide sich in V begegnen, ist aus Nr. 76 I. leicht nachzuweisen.

78. In welcher Weise ändert sich ein Winkel, bezw. eine Seite eines Dreiecks zugleich mit seiner Gegenseite und ihrem Gegenwinkel?

I. Legt man die zwei Dreiecke AB_1C und AB_2C (Fig. 65), in denen $AC = AC$ und $AB_1 = AB_2$, aber $\angle B_1AC > \angle B_2AC$ ist, mit den gleichen

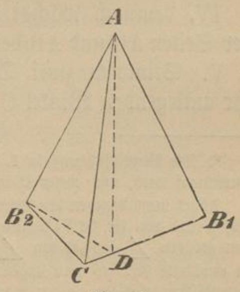

Fig. 65.

Seiten AC an einander, so fällt die Halbierungslinie AD des Winkels B_1AB_2*) zwischen AB_1 und AC und schneidet die Seite B_1C etwa in D (Fr. 28 III. und Fr. 26). Zieht man nun noch DB_2, so ist

$$\triangle B_1AD \cong \triangle B_2AD \text{ (Fr. 67 VII.)}$$
$$B_1D = B_2D \text{ (Fr. 67 II.)}$$
$$B_1C = B_1D + DC = B_2D + DC \text{ (Fr. 20 II. und IV.)}$$
$$B_2D + DC > B_2C \text{ (Fr. 76 I.)}$$
$$B_1C > B_2C \text{ (Fr. 20 IV.)}.$$

II. Läßt man also in einem Dreiecke ABC (Fig. 66) zwei Seiten AC und AB ungeändert, so wächst die dritte Seite CB mit dem von jenen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel A. Vergl. Fr. 77 V. und VII.

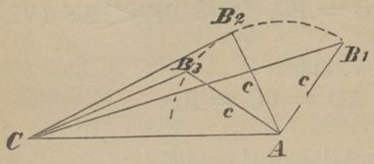

Fig. 66.

III. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten ($a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$) überein, während die dritten Seiten ungleich sind ($c_1 > c_2$), so können die von jenen Seitenpaaren eingeschlossenen Winkel C_1 und C_2 nicht gleich sein, weil sonst die Dreiecke kongruent wären (Fr. 67 VII.) und $c_1 = c_2$ sein müßte. Ebensowenig kann $C_1 < C_2$ sein, weil ja dann auch $c_1 < c_2$ sein müßte (II.). Daher kann nur $C_1 > C_2$ sein, und

IV. demnach wächst in Fig. 66 bei ungeänderter Länge der Seiten AC und AB der Winkel A mit der dritten Seite BC.

V. Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite a und einem ihr anliegenden Winkel C überein, so wächst auch der zweite

---

*) Die Beweisführung in I. ändert sich weder, wenn $\angle B_1AB_2$ flach, oder überstumpf wird, noch wenn C in $\overline{B_1B_2}$, oder im Dreieck B_1AB_2 liegt.

Führt man dagegen den Beweis zu III. ebenfalls unmittelbar mit Fig. 65 (auf Grund von Fr. 73 III. und Fr. 67 VII., indem man B_1B_2 zieht und von dem größern $\angle B_1B_2C$ den $\angle B_1B_2D = \angle B_2B_1C$ abschneidet), so macht die erwähnte Größen- und Lagenverschiedenheit eine kleine Abänderung in der Beweisführung nötig, sofern man nicht (in Fig. 65) $AC > AB$ voraussetzt.

dieser Seite a anliegende Winkel B, wenn seine Gegenseite b wächst, und umgekehrt. Fig. 59 vermag dies unmittelbar anschaulich zu machen.

79. **Durch welche Stücke ist ein Dreieck bestimmt?** s. auch Frage 67

I. Ein Dreieck ist bestimmt, wenn man von ihm so viel Stücke (d. h. Winkel und Seiten) kennt, daß sich aus ihnen bloß ein Dreieck zeichnen läßt.

II. Durch ein Stück ist ein Dreieck noch nicht bestimmt, weder durch einen Winkel, noch durch eine Seite.

In Fig. 67 stimmen die Dreiecke AVB, ACB, AFB in der Seite AB, in Fig. 68 die Dreiecke AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 2c. in dem Winkel A überein, sind aber trotzdem an Größe und Gestalt verschieden.

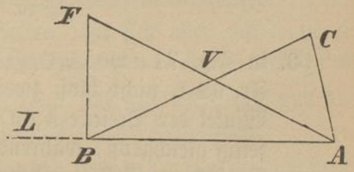

Fig. 67.

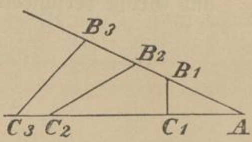

Fig. 68.

III. Auch zwei Stücke reichen zur Bestimmung eines Dreiecks nicht aus. Denn:

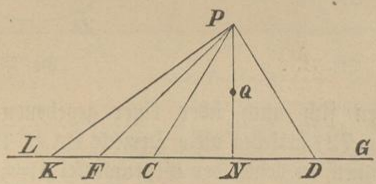

Fig. 69.

1. in Fig. 69 stimmen die Dreiecke DPN, DPC, DPF in der Seite DP und dem anliegenden Winkel D überein;

2. in Fig. 70 enthalten die Dreiecke ACB_1, ACB_2, ACB_3 zwei gleiche Seiten AC und $AB_1 = AB_2 = AB_3$;

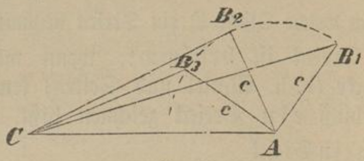

Fig. 70.

3. in Fig. 71, wo $A_1C_1 \parallel A_2C_2 \parallel A_3C_3$, sind nach Fr. 62 I. nicht bloß zwei, sondern sogar alle drei Winkel der Dreiecke A_1BC_1, A_2BC_2, A_3BC_3 gegenseitig gleichgroß, während in jedem dieser Fälle die Dreiecke an Gestalt, oder an Größe, oder an Gestalt und Größe verschieden sind. Endlich

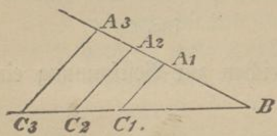

Fig. 71.

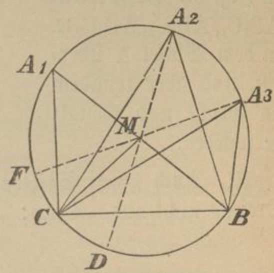

Fig. 72.

4. lassen sich auch über einer gegebenen Seite BC (Fig. 72) beliebig viele Dreiecke BA_1C, BA_2C, BA_3C zeichnen, in denen der Gegenwinkel $A_1 = A_2 = A_3$ der Seite BC die nämliche Größe A hat; denn man braucht (wegen Fr. 68 II.) dazu nur $\angle CA_1B + \angle BA_1C = \angle CA_2B + \angle BA_2C = \angle CA_3B + \angle BA_3C = 180° - A$ zu machen. Vergl. Fr. 98 III.

IV. Auch die für ein Dreieck gegebenen drei Winkel bestimmen, wie Fig. 71 zeigt (vergl. III. 3.), das Dreieck noch nicht, selbst wenn sie der in Nr. 68 II. enthaltenen Bedingung genügen; eben dieser Bedingung wegen sind ja die drei Winkel nicht unabhängig von einander.

V. Durch die drei Seiten ist das Dreieck bestimmt; denn in zwei Dreiecken, welche in den drei Seiten übereinstimmen, müssen auch die Winkel der Reihe nach gleich groß sein, weil sonst die Seiten verschieden sein müßten (Nr. 78 II.).

Aus drei gegebenen Seiten läßt sich aber nur dann ein Dreieck zeichnen, wenn die Bedingungen in Nr. 76 erfüllt sind.

VI. Aus Nr. 67 VII. folgt, daß zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel das Dreieck bestimmen.

VII. Auch zwei Winkel und eine Seite bestimmen das Dreieck. Denn sind in zwei Dreiecken zwei Winkel paarweise gleich, so sind es wegen Nr. 69 I. auch die dritten Winkel; aus Nr. 67 VIII. ergiebt sich daher stets die Kongruenz der Dreiecke.

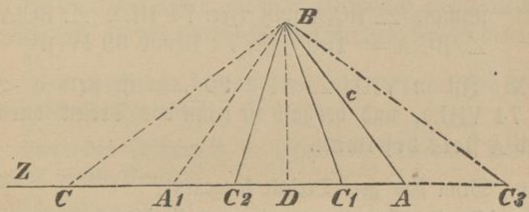

Fig. 73.

VIII. Sind zu einem Dreieck ein Winkel ZAB = A (Fig. 73), eine diesem Winkel anliegende Seite AB = c und dessen Gegenseite a gegeben, so ist zunächst zu unterscheiden, ob a größer, gleich, oder kleiner ist als die von B auf AZ gefällte Senkrechte BD = h.

1. Ist a < h, so ist aus a, c und A kein Dreieck möglich (Nr. 74 IX.).

2. Ist $a = h$, so läßt sich aus a, c und A nur ein Dreieck ABD zeichnen (Fr. 74 IX.), und dieses ist bei D rechtwinkelig.

Ist endlich $a > h$, so kann a wieder entweder größer, oder gleich, oder kleiner als c sein.

Macht man nun $DA_1 = DA$, also $BA_1 = BA$ (Fr. 74 XI.), so fällt

3. bei $c = a > h$*) der dritte Eckpunkt des einzigen möglichen (gleichschenkeligen) Dreiecks ABA_1 auf A_1 (Fr. 74 XIII.).

4. Bei $c < a > h$ dagegen giebt es zwar zwei von B um die Strecke a entfernte Punkte C und C_3 in AZ (Fr. 74 XIII.), aber nur das eine $\triangle ABC$ enthält c, A und a zugleich, während das $\triangle ABC_3$ zwar a und c, aber nicht A, sondern $\angle BAC_3 = 180° - A$ enthält.

5. Bei $c > a > h$ endlich giebt es zwei Dreiecke ABC_1 und ABC_2, in denen c, a und A vorkommen; dabei ist $DC_1 = DC_2$ (Fr. 74 XIII.); $\angle BC_1A$ ist stumpf, $\angle BC_2A$ spitz (Fr. 74 III.), $\angle BC_1A + \angle BC_2A = 180°$ (Fr. 74 I. und 39 IV.).

IX. Ist in VIII. $\angle A \geq 90°$, so ist stets $c < a$ (Fr. 74 VIII.), und deshalb ist dann das Dreieck durch c, a und A stets bestimmt.

80. **Wenn sind zwei Dreiecke kongruent?**

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen:

I. in den drei Seiten (Fr. 79 V.);

II. in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel (Fr. 79 VI.);

III. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren dieser beiden Seiten (Fr. 79 VIII. 4. und IX.);

IV. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen dieser Seiten, während die Gegenwinkel der zweiten dieser Seiten

---

*) Eigentlich sind hier zwei Seiten ($c = a$) und zwei Winkel ($C = A$; Fr. 73 II.) gegeben.

beide stumpf, oder beide spitz sind, oder während die Summe der letzteren beiden Gegenwinkel von 180° verschieden ist (Fr. 79 VIII. 5.);

V. in einer Seite und zwei Winkeln (Fr. 79 VII.).

81. **Wenn sind zwei rechtwinkelige Dreiecke kongruent?**

Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind kongruent, wenn sie (außer im rechten Winkel; Fr. 39 III.) noch übereinstimmen:

I. in zwei Seiten (Fr. 80 II., oder III.);

II. in einem Winkel und einer Seite (Fr. 80 V.).

Drittes Kapitel.

Der Kreis und die Gerade. Zwei Kreise.

82. **Welche Lagen kann ein Punkt gegen einen Kreis haben?**

Ein Punkt in der Ebene eines Kreises liegt entweder auf dem Kreise, oder innerhalb, oder außerhalb des Kreises, jenachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte gleich, kleiner, oder größer ist, als der Halbmesser des Kreises (Fr. 47 bis 49).

83. **Wie viel Punkte hat ein Kreis mit einer in seiner Ebene liegenden Geraden gemein?**

I. Liegt der Fußpunkt N_1 (Fig. 74) der vom Mittelpunkte M eines Kreises vom Halbmesser r auf die Gerade G_1 gefällten Senkrechten MN_1 außerhalb dieses Kreises, ist also $MN_1 > r$, so liegen alle anderen Punkte der Geraden G_1 ebenfalls außerhalb des Kreises (Fr. 74 IX.).

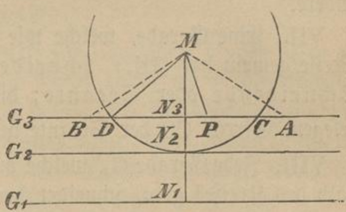

Fig. 74.

G_1 hat also keinen Punkt mit dem Kreise gemein.