



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2002

Lösungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83986](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83986)

Aufgaben zu 1.1

- 11/1. a) $3,14 \cdot 10^6$ b) $3,14 \cdot 10^9$ c) $3,14 \cdot 10^2$ d) $1,00 \cdot 10^7$
 e) $1,23 \cdot 10^{10}$ f) $2,93 \cdot 10^9$ g) $1,11 \cdot 10^7$ h) $1,20 \cdot 10^{11}$
 i) $1,00 \cdot 10^2$
2. a) $4,01 \cdot 10^7$ km b) $3,16 \cdot 10^7$ s c) $5,98 \cdot 10^{24}$ kg
 d) $5,10 \cdot 10^{14}$ m² e) $1,08 \cdot 10^{21}$ m³ f) $4,50 \cdot 10^9$ a
3. a) $2,0 \cdot 10^{10}$ a b) $5,5 \cdot 10^7$ km c) $3,0875 \cdot 10^{13}$ km
 d) $1,39 \cdot 10^9$ m e) 1) 10^{14} Mark 2) 10^{29} Pengö
- 12/4. a) 3 Mio. b) 21 Mio. c) 320 Mio.
 d) 5000 Mio. e) 8 Millionen Mio. f) 100 000 Mio.
5. a) 10 Mio. m b) 100 000 Mio. m c) 100 000 Mio. m d) 0,1 Mio. m
6. $4 \cdot 10^{10}$ Sesterzen
- 13/7. a) $7,61 \cdot 10^6$ a b) $7,61 \cdot 10^{21}$ a
8. a) 10^7 km = 0,07 AE. 33 s b) 10^{22} km = $6,7 \cdot 10^{13}$ AE. 10^9 a
9. $\approx 1,4$ Mio. Dollar. Der Übersetzer hat das englische *billion* mit Billion statt mit Milliarde übersetzt.

Aufgaben zu 1.2

- 17/1. a) $2^3 = 8$ b) $3^5 = 243$ c) $(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$
 $3^2 = 9$ $5^3 = 125$ $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
- d) $(17 - 12)^2 = 5^2 = 25$ e) $(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$
 $17^2 - 12^2 = 289 - 144 = 145$ $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$
- f) $(12 : 4)^2 = 3^2 = 9$
 $12 : 4^2 = 12 : 16 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
2. a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2401}{625}$ d) $-\frac{1024}{243}$ e) 0,09
 f) -0,027 g) 0,0081 h) 0,0009 i) -6,25 j) 0,0625
3. a) 1 b) -1 c) 1 d) 1
 e) 1 f) -1 g) -1 h) 1
 i) -1 und +1. Bei geraden Exponenten ergibt sich +1, bei ungeraden -1.
4. a) $\frac{1}{12}$ b) $-\frac{5}{48}$ c) $\frac{5}{36}$ d) $\frac{1}{144}$ e) $\frac{25}{576}$ f) $\frac{25}{288}$
5. a) 0,01 b) 100 c) -0,001 d) -1000
 e) 0,0001 f) -0,000001 g) 10 000 h) -1000 000

- 17/6. a) $-x^2$ b) x^3 c) x^2 d) x^3 19/2
7. a) 6^3 b) $(-6)^3$ c) $0,6^3$ d) $0,5^2$ e) $(-0,5)^3$ 2
 f) $(-\frac{1}{2})^3$ g) $(-0,2)^3$ h) $(\frac{7}{3})^3$ i) 2^{10} j) 3^{10}
- 18/8. a) $8 \cdot 10^8$ b) $3 \cdot 10^{10}$ c) $2,7 \cdot 10^{12}$ d) 10^{16} e) $4,4979 \cdot 10^{11}$ 2
9. a) x^9 b) x^8 c) $(a+b)^8$ d) $-z^6$ e) $(ab)^8$ f) $(\frac{r}{s})$ 2
10. a) $2^6 = 64$; $2^8 = 256$ b) $2^6 = 64$; $2^9 = 512$ 2
 c) $3^6 = 729$; $3^8 = 6561$ d) $3^6 = 729$; $3^9 = 19683$ 2
11. a) x^6 ; x^8 b) x^6 ; x^8 c) x^6 ; $-x^9$ d) x^6 ; $-x^9$ 2
12. a) $x^3 y^3 z^3$ b) $x^8 y^4$ c) $y^{18} z^8$ 2
13. a) $8,1 \cdot 10^9$ b) $3,375 \cdot 10^{21}$ c) $-7,776 \cdot 10^{43}$ d) $6,25 \cdot 10^{14}$ Auf
 21/1
14. a) $8x^6$; $256x^8$ b) $2x^6$; $2x^8$ c) $4x^6$; $-512x^9$ d) $2x^6$; $-2x^9$ 2
15. a) $\frac{a^2 b^2}{c^2}$ b) $\frac{a^6}{b^3 c^3}$ c) $\frac{a^{10} b^5}{c^{15}}$ 2
 d) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 b^2}$ e) $\frac{a^2}{c^4}$ f) $\frac{1}{a^3 b^{20}}$ 22/2
16. a) $\frac{1}{a^2}$ b) a^2 c) 1 d) $\frac{1}{8}$ e) 81 f) $\frac{64}{125}$ g) $\frac{1}{49}$ h) $\frac{7}{8}$ 4
17. a) a^1 für $n = 1$ b) $\frac{1}{a^3 - m}$ für $m = 1; 2$ c) u^{m-n} für $m > n$ 4
 1 für $n = 2$ 1 für $m = 3$ 1 für $m = 1$
 $\frac{1}{a^{n-2}}$ für $n \geq 3$ a^{m-3} für $m \geq 4$ $\frac{1}{u^{n-m}}$ für $m < n$ 6
 d) v^{n-m+2} für $n+2 > m$ e) 3^{n-3} für $n > 3$ f) $\frac{1}{3^{n-3}}$ für $n > 3$ g) 1 für $n = 3$
 1 für $n+2 = m$ 1 für $n = 3$ 1 für $n = 3$
 $\frac{1}{v^{m-n-2}}$ für $n+2 < m$ $\frac{1}{3^{3-n}}$ für $n = 1; 2$ 3^{3-n} für $n = 1; 2$
18. a) $2 \cdot 10^4$ b) $4 \cdot 10^{13}$ c) und d) Gleitkommadarstellung mit positivem Exponenten der Zehnerpotenz nicht möglich. Auf
 26/;
 27/;
- 19/19. a) $2,3 \cdot 10^6$ b) $2,85 \cdot 10^4$ c) $-1,8 \cdot 10^7$ d) $-9,09 \cdot 10^3$
20. a) $\frac{1}{2^{3n-2}}$ b) $-\frac{1}{2^{2n+1}}$ c) $\frac{8a^9}{b^9}$ d) $(-4)^k \frac{14xz^{k+1}}{5y^{k+2}}$

19/21. a) $a^6 - 1$ b) $a^8 - 1$ c) $a^6 + b^3$ d) $a^6 - b^6$

5) ³ 22. a) $x^{12} - x^8 + 3x^6 - x^4 + 1$
 b) $a^{15}b^3 + 7a^{12}b^7 + 7a^9b^{11} - 17a^6b^{15} + 6a^3b^{19}$
 c) $36x^{12}y^4 + 6x^{10}y^7 - 32x^8y^{10} - x^6y^{13} + x^4y^{16}$

· 10¹ 23. a) $a^6 + 15a^5 + 75a^4 + 125a^3$ b) $x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1$
 D) ($\frac{2}{3}$) c) $x^{12} - 4x^9 + 6x^6 - 4x^3 + 1$ d) $a^{12} + 3a^{10} + 6a^8 + 7a^6 + 6a^4 + 3a^2 + 1$

24. a) 63 235,29 b) 3,26 c) 1) 499 2) 19 714 3) 193

25. $1,26 \cdot 10^{23}$ km

26. a) 7 Häuser, 49 Katzen, 343 Mäuse, 2401 Ähren, 16 807 Scheffel b) 19 607

Aufgaben zu 1.3

21/1. a) $x^2 - 2x + 6$ b) $3x^2 - x + 8$ c) $5a^3 - a^2 + 1$ d) $1,2x^2 - 0,1x + 0,5$
 e) $6(7x - 1)$

2. a) $x^2 + 2x + 3$ b) $x^2 - 4$ c) $8a^2 - a - 5$ d) $3b^2 - 2b + 1$

22/3. a) $x^3 - 1$ b) $-x^3 + 2x + 5$ c) $2(x^3 + 2x - 1)$ d) $2x^4 + x^3 - x^2 + 2x$
 e) $-0,2x^3 + 0,3x^2 - 0,1x + 1$

h) $\frac{7}{4}$ 4. a) $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$ b) $a - b + 2$ c) $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + a^3$
 d) $abc(a + c - b)$ e) $3x^2 + 2ax - a^2$

n > 5. a) $4x^2 - 4x + 1$ b) $2x - 1$ c) $x^2 - xy + y^2$ d) $x^2 + xy + y^2$
 n = e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ f) $64x^6 + 32x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$
 n < g) $0,004x^4 + 0,02x^2 + 0,1$

6. a) $2x^2 + 2x - 5 - \frac{3x^2 - 10x + 4}{x^3 + 2x - 1}$ b) $6 + \frac{8x^2 - 8x - 4}{2x^3 + 4x - 1}$

g) c) $2x^3 + 4x + 10 + \frac{8x^2 + 40x + 60}{x^3 - 2x - 5}$ d) $11x + 11 - \frac{41x + 77}{x^2 - 2x + 7}$

e) $4x^2 - x - 1 + \frac{2}{2x + 1}$

Aufgaben zu 2.1

26/1. a) 1 b) 1 c) 1 d) 1 e) 1 f) -1 g) 1 h) -1

27/2. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) $\frac{1}{25}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 100
 g) $\frac{1}{10}$ h) $\frac{1}{100}$ i) -0,064 k) -15,625 l) 15,625 m) 0,064
 n) 0,0625 o) 16 p) 16 q) $\frac{16}{9}$ r) 1 s) 1
 t) $\frac{1}{2}$ u) 9 v) 1 w) $\frac{1}{4}$ x) $\frac{1}{81}$ y) 1 z) 2

- 27/3. a) $\frac{7}{4}$ b) 7 c) $\frac{9}{100}$ d) 0 e) $\frac{5}{8}(3 - \sqrt{5})$ 28/
 f) 1 g) 0 h) $-\frac{1}{32}$ i) 0 k) $\frac{9}{2}$

4. a) $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ b) $\{-1; 1\}$ c) $\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\}$ d) $\{\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f) $\{-1$

5. a) $\{2; 3\}$ b) $\{-1; 3\}$ c) $\{1\}$
 d) $\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$ e) $\{-3; -2; 2; 3\}$ f) $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

6. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ c) $] -1; 1[$ Auf
 d) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ 31/

7. a) 10^{-2} b) 10^{-4} c) 10^{-5} d) 10^0
 e) 10^{-6} f) 10^{-12} g) 10^{-7} h) 10^{-11}

8. a) $7 \cdot 10^{-2}$ b) $1,23 \cdot 10^{-4}$ c) $1,001 \cdot 10^{-5}$
 d) $4,207 \cdot 10^{-7}$ e) $1,002 \cdot 10^{-4}$ f) $7,39 \cdot 10^{-9}$
 g) $3 \cdot 10^{-3}$ h) $4 \cdot 10^{-8}$ i) $7 \cdot 10^{-13}$

9. a) 0,03 b) 0,002 c) 0,0001
 d) 0,00805 e) 0,0000001763 f) 0,0972
 g) 0,0000022279 h) 0,000067808 i) 0,000402

- 28/10. a) 1,0001 b) 2,3 c) 3,07 d) 3,64008 e) 2,305 f) 6,400 32/

11. a) $x = -2, y = -4, a = 1,23, b = 12300$
 b) $x = -5, y = -6, z = -4, a = 0,101, b = 0,00101, c = 10,1$

12. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{32}$ c) 9 d) $\frac{1}{288}\sqrt{6}$

13. a) 4 b) 10^6 c) 16 d) -512

14. a) 5^{-2} b) 2^{-2} c) 7^{-3} d) 20^{-3} e) 10^{-5}

15. a) $\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{1}{y^3}$ c) $\frac{1}{(x+y)^4}$ d) $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ e) $\frac{1}{(a-b)^2}$ f) $(a -$
 g) $\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ h) $\frac{b}{a}$ i) $\frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ j) $-\frac{b^3}{a^3} = \left(-\frac{b}{a}\right)^3$ k) a

16. a) $\frac{m}{s}$ b) $\frac{kg}{m^3}$ c) $\frac{1}{s}$ d) $\frac{N}{m^2}$ e) $\frac{J}{s}$ f) $\frac{V}{A}$

17. $\frac{1}{2}(10^2 + 10^{-2}) = 50,005$
 $\sqrt{10^2 \cdot 10^{-2}} = 1$
 $\frac{2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-2}}{10^2 + 10^{-2}} = \frac{200}{10001}$

28/18. a) $\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\}$ b) $\{-100; 100\}$ c) $\{2\}$ d) $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

19. a) -1 b) 0 c) 0 d) -2 e) -3 f) -4
 g) -2 h) 4 i) -3

20. a) 0 b) 1 c) 1 d) 0 e) 1 f) 2
 g) $-$ h) $-$ i) 1 j) $-$ k) 0 l) $-$

Aufgaben zu 2.2

31/1. a) $2^3 = 8$ b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ c) $5^3 = 125$ d) $2^6 = 64$ e) 6
 f) 1 g) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ h) 1000 i) $(\frac{3}{5})^3 = \frac{27}{125}$
 k) $=(\frac{1}{5})^{-5} \cdot 5^{-2} = 5^5 \cdot 5^{-2} = 5^3 = 125$

2. a) a^3 b) a^2 c) x^5 d) y e) u^{3k}
 f) 1 g) $(a+b)^2$ h) $(xy)^{-4}$ i) 1

3. a) $a + \frac{1}{a}$ b) $a^{-3} + 2a^{-2} + a^{-1}$ c) $x^{-4} - 1$
 d) $ab + a^{-1}b^{-2}$ e) $\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{y^2}$ f) $x + x^3y^2 - x^{-2}y^{-3} - y^{-1}$
 g) $8m^3 + 20m^2 + 30m^{-2} - 18m^{-5}$ h) $x^2 + \frac{1}{x^3}$

32/4. a) $400 \text{ nm} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 4 \cdot 10^5 \text{ pm} = 4 \cdot 10^{-1} \mu\text{m}$
 b) $3,7 \text{ pF} = 3,7 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 3,7 \cdot 10^3 \text{ fF} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ nF}$
 c) $0,007 \mu\text{s} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ ms} = 7 \text{ ns} = 7 \cdot 10^3 \text{ ps}$
 5. a) $7 \cdot 10^{-2} \text{ mm}; 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ b) $10^{-4} \text{ mm}; 10^{-7} \text{ m}$
 c) $10^{-6} \text{ nm}; 10^{-13} \text{ cm}$ d) $10^{-1} \text{ nm}; 10^{-8} \text{ cm}$
 e) $5,896 \cdot 10^{-4} \text{ mm}; 5,896 \cdot 10^{-6} \text{ dm}$ f) $9,1091 \cdot 10^{-28} \text{ g}; 9,1091 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 g) $1,67 \cdot 10^{-21} \text{ mg}; 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

6. a) 3^{-6} b) 3^{-6} c) 3^{-6} d) 3^{-6} e) 3^3 f) 4^4 g) 1 h) 1

7. a) 1 b) a c) a^{-6} d) a^{-3n} e) a^{n-n^2}

8. a) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ b) $y^{-12} + 3y^{-8} + 3y^{-4} + 1$ c) 4

9. a) $a^2 + 2a + 3 + 2a^{-1} + a^{-2}$ b) $x^2 + 2x - 1 - 2x^{-1} - x^{-2}$
 c) $z^4 + 2z^2 + 3 + 2z^{-2} + z^{-4}$

10. a) $\frac{a-b}{a+b}$ b) $\left(\frac{3a-4}{3a+4}\right)^2$ 11. a) 1 b) -1

12. a) $6^4 = 1296$ b) $\frac{1}{2500}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$

- 32/13. a) $6^{-2} = \frac{1}{36}$ b) 1536 c) $\frac{3}{4}$ d) 1 34/3
14. a) m^{-7} b) n^7 c) $p^{-1}q^{-3}$ d) $\frac{(x+1)^5}{y^{10}}$ 3
15. a) 32 b) 64 c) $\frac{243}{32}$ d) 1
16. a) $2x^{-4}$ b) $\frac{1}{8}x + \frac{1}{20}$ c) $\frac{1}{5}x^{-6} + \frac{1}{2}x^{-5}$
17. a) $4x^2$ b) x^{-4} c) $10x^{-1}$
18. a) z^{n-1} b) 1 c) z^{-n}
19. a) $\frac{1}{32}x$ b) x c) $\frac{1}{81}$
- 33/20. a) $\frac{b^4}{16a^{12}}$ b) $\frac{z^9}{x^6y^3}$ c) 1 d) $\frac{10a^4}{c^6}$ e) $a^n b^n c^n$ 3
- f) $a^{n-n^2} b^{n^2-1} c^{2-2n}$ g) $8^{k+1} x^{1-k-2k^2} y^{3+2k-k^2}$ h) $\frac{x^{2n}}{y^{n+2}}$
21. a) $\frac{1}{x^{8n+1} y^{7m+16}}$ b) $\frac{b^{13m+6}}{a^{10k-3} c^{5n}}$
22. a) $\frac{(x+y)^2}{x^n y^n}$ b) $\frac{(az-y)^2}{y^{m-1} z^n}$
23. a) falsch, da $100^{-10} = 10^{-20} \neq 10^{-100}$ b) wahr c) wahr d) wahr e) wahr
24. a) $7,7 \cdot 10^{-7}$ b) $1,5 \cdot 10^{-6}$ c) $7,9 \cdot 10^{-2}$ d) 10^{-5}
25. a) $9 \cdot 10^{-2}$ b) $9 \cdot 10^{-4}$ c) $\sqrt{4,41 \cdot 10^{-4} \cdot 1,44 \cdot 10^{-4}} = 2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} = 2,52 \cdot 10^{-4}$ d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ e) 10^{-50} f) $100^{-5} = 10^{-10}$
26. 1 27. $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2$ 28. $2a$ 29. $2b(1+a)$
- 34/30. a) eine Eins, gefolgt von 100 Nullen b) eine Eins, gefolgt von 10 Milliarden Nullen c) eine Fünf, gefolgt von 100 Nullen d) eine Drei, gefolgt von 98 Nullen, einer Zwei und einer Drei e) 10 Milliarden Neuner f) eine Eins, gefolgt von 9999999999 Nullen g) null Komma, dann 99 Nullen, an der hundertsten Stelle eine Eins h) null Komma, dann 9999999999 Nullen, an der zehnmilliardsten Stelle eine Eins

34/31. a) $3,3426587 \cdot 10^{16}$

b) $2,9916 \cdot 10^{-5} \text{ g}$

32. a) $1\% = 10 \text{ g/kg}$ $1\text{‰} = 1 \text{ g/kg}$

$1 \text{ ppm} = 10^{-3} \text{ g/kg} = 1 \text{ mg/kg}$

$1 \text{ ppb} = 10^{-6} \text{ g/kg} = 1 \text{ µg/kg}$

$1 \text{ ppt} = 10^{-9} \text{ g/kg} = 1 \text{ ng/kg}$

$1 \text{ ppq} = 10^{-12} \text{ g/kg} = 1 \text{ pg/kg}$

b) $x := \text{Masse des Weizens}$

$1 \text{ ppt} \cdot x = 0,5 \text{ g} \Leftrightarrow x = 5 \cdot 10^5 \text{ t}$

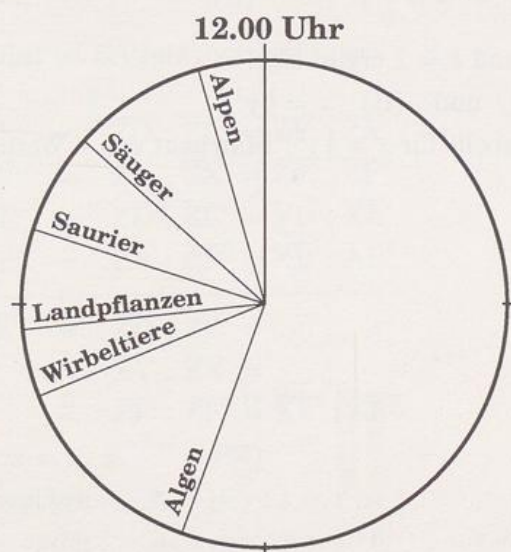
Man benötigt $\frac{5 \cdot 10^5 \text{ t}}{2500 \text{ t/Güterzug}} = 200 \text{ Güterzüge.}$

c) $300 \frac{\text{mg}}{\text{t}} = 300 \cdot \frac{10^{-9} \text{ t}}{\text{t}} = 3 \cdot 10^{-7} = 3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-12} = 3 \cdot 10^5 \text{ ppt}$

1000 ppt Cd sind 3,3‰ des natürlichen Vorkommens.

33.

Ereignis	vor ... EA	vor ... h min sec	Uhrzeit h min sec	Winkel
Entstehung	1 EA	24.00.00	0.00.00	0°00'00"
Algen	$4,4 \cdot 10^{-1} \text{ EA} = 4,4 \text{ dEA}$	5.20.00	6.40.00	200°00'00"
Wirbeltiere	$3,1 \cdot 10^{-1} \text{ EA} = 3,1 \text{ dEA}$	3.44.00	8.16.00	248°00'00"
Landpflanzen	$2,7 \cdot 10^{-1} \text{ EA} = 2,7 \text{ dEA}$	3.12.00	8.48.00	264°00'00"
Saurier	$2,0 \cdot 10^{-1} \text{ EA} = 2,0 \text{ dEA}$	2.24.00	9.36.00	288°00'00"
Säuger	$1,3 \cdot 10^{-1} \text{ EA} = 1,3 \text{ dEA}$	1.36.00	10.24.00	312°00'00"
Alpen	$4,4 \cdot 10^{-2} \text{ EA} = 4,4 \text{ cEA}$	0.32.00	11.28.00	344°00'00"
Olduvai	$1,3 \cdot 10^{-4} \text{ EA} = 13,3 \text{ mEA}$	0.00.05,76	11.59.54,24	359°57'07"
Neandertaler	$2,9 \cdot 10^{-5} \text{ EA} = 28,8 \text{ µEA}$	1,248 s	11.59.58,752	359°59'23"
homo sapiens	$8,9 \cdot 10^{-6} \text{ EA} = 8,9 \text{ µEA}$	384,0 ms	11.59.59,616	359°59'48"
Lascaux	$4,2 \cdot 10^{-6} \text{ EA} = 4,2 \text{ µEA}$	182,4 ms	11.59.59,8176	359°59'55"
Mammut	$3,3 \cdot 10^{-6} \text{ EA} = 3,3 \text{ µEA}$	144,0 ms	11.59.59,8560	359°59'56"
Jericho	$1,8 \cdot 10^{-6} \text{ EA} = 1,8 \text{ µEA}$	76,8 ms	11.59.59,9232	359°59'57,70"
Hochkulturen	$1,1 \cdot 10^{-6} \text{ EA} = 1,1 \text{ µEA}$	48,0 ms	11.59.59,9520	359°59'58,56"
Christi Geburt	$4,4 \cdot 10^{-7} \text{ EA} = 444 \text{ nEA}$	19,2 ms	11.59.59,9808	359°59'59,42"
Physik	$7,7 \cdot 10^{-8} \text{ EA} = 77 \text{ nEA}$	3,36 ms	11.59.59,99664	359°59'59,90"



Aufgaben zu 3.1

- 46/1. a) 9 b) 3 c) 5 d) 0,5 e) 0,6 f) 0,5
 g) 5 h) 0 i) $\frac{2}{3}$
2. a) 10^2 b) 10 c) 8 d) 10^{-2} e) $\frac{1}{4}$ f) 1
 g) 40 h) 7 i) 50 k) 0,2 l) 0,2 m) $3,4 \cdot 10^2$
3. a) a^2 b) b^2 c) $3a^2$ d) $|a|$ e) $|b|^3$ f) $|a^{-3}|$
4. a) $a \geq 0$; a b) $a \leq 0$; $-a$ c) $a \leq 0$; $-a$
 d) $a \leq 0$; $2a^3$ e) $a \neq 0$; $2a^{-2}$ f) $a > b$; $\frac{1}{a-b}$
5. a) $\{2\}$ b) $\{\}$ c) $\{\}$ d) $\{a^2\}$ e) $\{\}$ f) $\{a^{-2}\}$
6. a) $[2,4; 2,5]$ b) $[4,6; 4,7]$ c) $[2,6; 2,7]$
 d) $[0,3; 0,4]$ e) $[0; 0,1]$ f) $[1,1; 1,2]$
7. a) $[1; 2]$, $[1; 1,5]$, $[1,25; 1,5]$, $[1,25; 1,375]$, $[1,25; 1,3125]$, $[1,25; 1,28125]$,
 $[1,25; 1,265625]$, $[1,2578125; 1,265625]$, $[1,2578125; 1,26171875]$,
 $[1,259765625; 1,26171875]$, $[1,259765625; 1,2607421875]$

Die Zehntelstelle der Lösung ist gesichert, also $x = 1,2 \dots$

$$\text{b) 1) } \left. \begin{array}{l} a : x = x : y \Leftrightarrow ay = x^2 \\ a : x = y : 2a \Leftrightarrow xy = 2a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot \frac{x^2}{a} = 2a^2 \Leftrightarrow x^3 = 2a^3$$

$$\text{2) } y^3 = 4a^3$$

Ein Würfel mit der Kantenlänge y hat das vierfache Volumen.

$$\text{c) 1) } a : x = x : y \Leftrightarrow y = \frac{1}{a} x^2 \quad (\text{I})$$

$$x : y = y : b \Leftrightarrow x = \frac{1}{b} y^2 \quad (\text{II})$$

2) Für $a = 1$ und $b = 2$ ergibt sich

$$(\text{I}) \quad y = x^2 \quad \text{und} \quad (\text{II}) \quad x = \frac{1}{2} y^2.$$

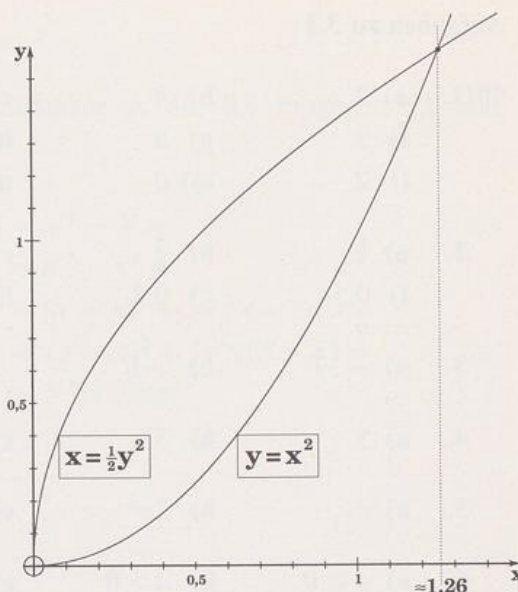
Zur Wertetabelle für $x = \frac{1}{2} y^2$: Man geht von y -Werten aus und bestimmt die zugehörige x .

$$y = x^2$$

x	y
0,9	0,81
0,95	0,9025
1	1
1,05	1,1025
1,1	1,21
1,15	1,3225
1,2	1,44
1,25	1,5625
1,3	1,69
1,35	1,8225

$$x = \frac{1}{2}y^2$$

y	x
0,8	0,32
0,9	0,405
1	0,5
1,1	0,605
1,2	0,72
1,3	0,845
1,4	0,98
1,5	1,125
1,6	1,28
1,7	1,445



d) Beweis des ERATOSTHENES:

Mehrfache Anwendung der Strahlensätze auf die Strahlen [ZB und [ZC.

1. Teil:

$$\text{I} \quad BC \parallel YD \Rightarrow \overline{ZC} : \overline{ZD} = \overline{ZB} : \overline{ZY}$$

$$\text{II} \quad BD \parallel YE' \Rightarrow \overline{ZB} : \overline{ZY} = \overline{ZD} : \overline{ZE'}$$

$$\text{III} \quad BC \parallel YD \Rightarrow \overline{ZC} : \overline{ZD} = \overline{BC} : \overline{YD}$$

$$\text{IV} \quad YD \parallel XE' \Rightarrow \overline{ZD} : \overline{ZE'} = \overline{YD} : \overline{XE'}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \overline{BC} : \overline{YD} &\stackrel{\text{III}}{=} \overline{ZC} : \overline{ZD} = \\ &\stackrel{\text{I}}{=} \overline{ZB} : \overline{ZY} = \\ &\stackrel{\text{II}}{=} \overline{ZD} : \overline{ZE'} \stackrel{\text{IV}}{=} \overline{YD} : \overline{XE'}. \end{aligned}$$

Das heißt, $b : y = y : x$. (*)

Nicht ausgeführt ist bei ERATOSTHENES der

2. Teil:

$$\text{I} \quad YD \parallel XE' \Rightarrow \overline{ZD} : \overline{ZE'} = \overline{ZY} : \overline{ZX}$$

$$\text{II} \quad YE' \parallel XF'' \Rightarrow \overline{ZY} : \overline{ZX} = \overline{ZE'} : \overline{ZF''}$$

$$\text{III} \quad YD \parallel XE' \Rightarrow \overline{ZD} : \overline{ZE'} = \overline{YD} : \overline{XE'}$$

$$\text{IV} \quad XE' \parallel AF'' \Rightarrow \overline{ZE'} : \overline{ZF''} = \overline{XE'} : \overline{AF''}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \overline{YD} : \overline{XE'} &\stackrel{\text{III}}{=} \overline{ZD} : \overline{ZE'} = \\ &\stackrel{\text{I}}{=} \overline{ZY} : \overline{ZX} = \\ &\stackrel{\text{II}}{=} \overline{ZE'} : \overline{ZF''} \stackrel{\text{IV}}{=} \overline{XE'} : \overline{AF''}. \end{aligned}$$

Das heißt, $y : x = x : a$. (**)

(*) und (**) ergeben $b : y = y : x = x : a$

oder $a : x = x : y = y : b$, q.e.d.

Aufgaben zu 3.2

- 50/1. a) 2 b) 4 c) 5 d) 7 e) 6
 f) 9 g) 8 h) 10 i) 1 k) 2
 l) 2 m) 0 n) 3 o) 10 p) 2
2. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{17}{18}$ e) $\frac{1}{3}$
 f) 0,5 g) 0,2 h) 0,5 i) 0,1 k) 0,5
3. a) -37 b) -6
4. a) 5 b) 3 c) 121 d) 8 e) 343
5. a) c b) $3a^2$ c) a^{n-1} d) $a^2 b^2$ e) a^{n+1}
6. a) $a \geq 0$ b) $a > 0$ c) $a \in \mathbb{R}$ d) $a \geq 0$ e) $a \in \mathbb{R} \wedge b > 0$
 f) $(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$
 g) 1. Fall: n gerade $\Rightarrow n+3$ ungerade: $(a > 0 \wedge b \geq 0) \vee (a < 0 \wedge b \leq 0)$
 2. Fall: n ungerade $\Rightarrow n+3$ gerade: $a > 0 \wedge b \in \mathbb{R}$
 h) $a > 0$
 i) 1. Fall: n gerade: $a \geq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$
 2. Fall: $n = 1$: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \geq 0$
 3. Fall: n ungerade $\wedge n \neq 1$: $a \in \mathbb{R} \wedge b \geq 0$
 k) $(a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0)$
7. a) 1 b) 10 c) $|a| - |b|$ d) $a^2 + |a^3 b| - |a^3 b^5|$
8. a) 144 b) 1 c) 0,15 d) 1,5 e) 1,5
 f) $2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5^{-1} \cdot 3 = 0,12$
- 51/9. a) 3 b) 3 c) $\frac{1}{3}$ d) 3 e) nicht definiert f) nicht definiert
 g) 3 h) $\frac{1}{3}$ i) 1 j) 1 k) nicht definiert
 l) 10 m) $\frac{4}{9}$ n) $\frac{4}{9}$ o) $\frac{9}{25}$ p) nicht definiert
10. a) $2 = \sqrt[3]{8}$ b) -2 c) -5; $5 = \sqrt[4]{625}$ d) $\{ \}$
 e) $0 = \sqrt[7]{0}$ f) -5 g) $4 = \sqrt[5]{2^{10}}$ h) $4 = \sqrt[7]{0,5^{-14}}$

54/2

Aufgaben zu 3.3

54/1. a) $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}; \quad a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \cdot b^3 = a^3$

Die LS enthält $(3k+1)$ -mal den Faktor 2, die RS hingegen $3k'$ -mal, $(k, k' \in \mathbb{N}_0)$
 Widerspruch.

$$\text{b) } \sqrt[5]{p} = \frac{a}{b}; \quad p \text{ prim}; \quad a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow p \cdot b^5 = a^5$$

Die LS enthält $(5k+1)$ -mal den Primfaktor p , die RS hingegen $5k'$ -mal, $(k, k' \in \mathbb{N}_0)$; Widerspruch.

$$\begin{array}{ll} \text{54/2. a) } d := N - a^3 = & d' = a'^3 - N = \\ & = a'^3 - x^3 = \\ & = (x - a)^3 + 3x^2a - 3a^2x = \\ & = (x - a)^3 + 3ax(x - a) = \\ & = \xi^3 + 3ax\xi \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) } a'd = 3a'ax\xi & \text{I} \\ ad' = 3a'ax\xi' & \text{II} \end{array}$$

$$\hline a'd + ad' = 3a'ax(\xi + \xi') \quad \text{III}$$

Damit erhält man aus I:III

$$\frac{\xi}{\xi + \xi'} = \frac{a'd}{a'd + ad'}$$

Unter Benützung von $a' - a = \xi + \xi'$ ergibt sich

$$x = a + \xi = a + \frac{\xi}{\xi + \xi'} (a' - a) = a + \frac{a'd}{a'd + ad'} (a' - a).$$

$$\text{c) } a = 4; \quad a' = 5 \\ d = 36; \quad d' = 25$$

$$x = 4 + \frac{5 \cdot 36}{5 \cdot 36 + 4 \cdot 25} = 4\frac{4}{19} \approx 4,2105 \quad \text{relativer Fehler} = -9,2\%$$

$$\text{d) 1) } a = 1; \quad a' = 2 \\ d = 1; \quad d' = 6$$

$$x = 1 + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1 \cdot 6} = 1\frac{1}{4} = 1,25 \quad \text{relativer Fehler} = -7,87\%$$

$$\text{2) } a = 4; \quad a' = 5 \\ d = 1; \quad d' = 60$$

$$x = 4 + \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 1 + 4 \cdot 60} = 4\frac{1}{49} \approx 4,020408 \quad \text{relativer Fehler} = -7,90 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{3) } a = 4; \quad a' = 5 \\ d = 56; \quad d' = 5$$

$$x = 4 + \frac{5 \cdot 56}{5 \cdot 56 + 4 \cdot 5} = 4\frac{19}{20} = 4,95 \quad \text{relativer Fehler} = 3,56\%$$

$$\text{4) } a = 6; \quad a' = 7 \\ d = 114; \quad d' = 13$$

$$x = 6 + \frac{7 \cdot 114}{7 \cdot 114 + 6 \cdot 13} = 6\frac{798}{967} \approx 6,825223 \quad \text{relativer Fehler} = -1,23\%$$

e) 1) $a = 0; \quad a' = 1$

$d = 0,8; \quad d' = 0,2$

$$x = 0 + \frac{1 \cdot 0,8}{1 \cdot 0,8 + 0 \cdot 0,2} = 1$$

relativer Fehler = 7,7%

Achtung: Mit $a = 0$ und $a' = 1$ erhält man für alle Zahlen aus $]0; 1[$ den Näherungswert 1.

2) $a = 0,8; \quad a' = 1$

$d = 0,288; \quad d' = 0,2$

$$x = 0,8 + \frac{1 \cdot 0,288}{0,288 + 0,8 \cdot 0,2} \cdot 0,2 = \frac{101}{70} \approx 1,44285$$

relativer Fehler = 55,4%

55/3. a) $\sqrt[n]{1 + \alpha} = 1 + \xi$

$$1 + \alpha = (1 + \xi)^n$$

$$1 + \alpha = 1 + n\xi + \dots$$

$$\frac{\alpha}{n} \approx \xi$$

b) $\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + b} = \sqrt[n]{a^n \left(1 + \frac{b}{a^n}\right)} = a \sqrt[n]{1 + \frac{b}{a^n}} \approx a \left(1 + \frac{b}{na^n}\right) = a + \frac{b}{na^{n-1}}$

c) 1) $\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{8+3} \approx 2 + \frac{3}{3 \cdot 4} = 2\frac{1}{4}$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8+16} \approx 2 + \frac{16}{3 \cdot 4} = 3\frac{1}{3}$$

2) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27-3} \approx 3 - \frac{3}{3 \cdot 9} = 2\frac{8}{9}$

d) 1) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} \approx 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33$

2) $\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} \approx 4 + \frac{1}{3 \cdot 16} = 4\frac{1}{48} \approx 4,02$

3) $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{64+36} \approx 4 + \frac{36}{3 \cdot 16} = 4\frac{3}{4} = 4,75$

4) $\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{125-5} \approx 5 - \frac{5}{3 \cdot 25} = 4\frac{14}{15} \approx 4,93$

5) $\sqrt[3]{330} = \sqrt[3]{343-13} \approx 7 - \frac{13}{3 \cdot 49} = 6\frac{134}{147} \approx 6,91$

6) $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} \approx 1 - \frac{0,2}{3} = \frac{14}{15} \approx 0,933$

e) 1) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{10}{27}} \approx \frac{4}{3} - \frac{\frac{10}{27}}{3 \cdot \frac{16}{9}} = \frac{91}{72} \approx 1,2638$

$$2) \sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{\left(\frac{193}{48}\right)^3 - \frac{577}{110592}} \approx \frac{193}{48} - \frac{577}{5363856} = 4 \frac{55585}{2681928} \approx 4,0207$$

$$3) \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{\left(\frac{19}{4}\right)^3 - \frac{459}{64}} \approx \frac{19}{4} - \frac{153}{1444} = 4 \frac{930}{1444} \approx 4,6440$$

$$4) \sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{\left(\frac{74}{15}\right)^3 - \frac{224}{3375}} \approx \frac{74}{15} - \frac{56}{61605} = 4 \frac{57442}{61605} \approx 4,9324$$

$$5) \sqrt[3]{330} = \sqrt[3]{\left(\frac{1016}{147}\right)^3 - \frac{519506}{3176523}} \approx \frac{1016}{147} - \frac{259753}{227612448} = 6 \frac{207483456}{227612448} \approx 6,9115$$

$$6) \sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{\left(\frac{14}{15}\right)^3 - \frac{44}{3375}} \approx \frac{14}{15} - \frac{11}{2205} = \frac{2047}{2205} \approx 0,92834$$

$$f) x_{k+1} = x_k + \frac{b}{3x_k^2} \wedge \sqrt[3]{x_k^3 + b} = \sqrt[3]{N}$$

$$x_{k+1} = \frac{3x_k^3 + b}{3x_k^2} \wedge b = N - x_k^3$$

$$x_{k+1} = \frac{N + 2x_k^3}{3x_k^2}$$

Wurzeln aus c):

$$\sqrt[3]{11}: 2; 2\frac{1}{4}; 2,2242\dots; 2,223980132\dots$$

$$\sqrt[3]{11} = 2,22398009$$

relativer Fehler = $1,9 \cdot 10^{-8}$

$$\sqrt[3]{24}: 3; 2\bar{8}; 2,88450581\dots; 2,884499142\dots$$

$$\sqrt[3]{24} = 2,88449914$$

relativer Fehler = $7,6 \cdot 10^{-10}$

Wurzeln aus d):

$$1) 1; \frac{4}{3}; 1,263\bar{8}; 1,259933491\dots$$

$$\sqrt[3]{2} = 1,25992105$$

relativer Fehler = $9,87 \cdot 10^{-6}$

$$2) 4; 4,0208\bar{3}; 4,02072\dots; 4,02072579\dots$$

$$\sqrt[3]{65} = 4,02072576$$

relativer Fehler = $-2,48 \cdot 10^{-10}$

$$3) 4; 4,75; 4,644044\dots; 4,641590143\dots$$

$$\sqrt[3]{100} = 4,64158883$$

relativer Fehler = $2,83 \cdot 10^{-7}$

$$4) 5; 4,9\bar{3}\dots; 4,9324243\dots; 4,932424162\dots$$

$$\sqrt[3]{120} = 4,93242415$$

relativer Fehler = $2,55 \cdot 10^{-9}$

$$5) 7; 6,9115\dots; 6,9104\dots; 6,910423228\dots$$

$$\sqrt[3]{330} = 6,91042323$$

relativer Fehler = $-1,59 \cdot 10^{-10}$

$$6) 1; 0,9\bar{3}; 0,9283\dots; 0,92831776\dots$$

$$\sqrt[3]{0,8} = 0,92831776$$

relativer Fehler = $7,97 \cdot 10^{-10}$

noch

55/3. g) 1) $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1+1} \approx 1 + \frac{1}{4 \cdot 1} = 1\frac{1}{4} = 1,25$

2) $\sqrt[4]{65} = \sqrt[4]{2^4 + 49} \approx 2 + \frac{49}{4 \cdot 8} = 3\frac{17}{32} = 3,53125$

$\sqrt[4]{65} = \sqrt[4]{3^4 - 16} \approx 3 - \frac{16}{4 \cdot 27} = 2\frac{23}{27} = 2,851$

3) $\sqrt[4]{100} = \sqrt[4]{3^4 + 19} \approx 3 + \frac{19}{4 \cdot 27} = 3\frac{19}{108} = 3,17592$

4) $\sqrt[4]{5000} = \sqrt[4]{8^4 + 904} \approx 8 + \frac{904}{4 \cdot 512} = 8\frac{113}{256} = 8,4414\dots$

5) $\sqrt[4]{0,8} = \sqrt[4]{1 - 0,2} \approx 1 - \frac{0,2}{4 \cdot 1} = 0,95$

h) 1) $\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{1+1} \approx 1 + \frac{1}{5 \cdot 1} = 1,2$

2) $\sqrt[5]{65} = \sqrt[5]{2^5 + 33} \approx 2 + \frac{33}{5 \cdot 16} = 2\frac{33}{80} = 2,4125$

3) $\sqrt[5]{100} = \sqrt[5]{2^5 + 68} \approx 2 + \frac{68}{5 \cdot 16} = 2\frac{17}{20} = 2,85$

4) $\sqrt[5]{5000} = \sqrt[5]{5^5 + 1875} \approx 5 + \frac{1875}{5 \cdot 625} = 5\frac{3}{5} = 5,6$

5) $\sqrt[5]{0,8} = \sqrt[5]{1 - 0,2} \approx 1 - \frac{0,2}{5 \cdot 1} = 0,96$

i) 1) $\sqrt[7]{2} = \sqrt[7]{1+1} \approx 1 + \frac{1}{7 \cdot 1} = 1\frac{1}{7} = 1,142857$

2) $\sqrt[7]{65} = \sqrt[7]{2^7 - 63} \approx 2 - \frac{63}{7 \cdot 64} = 1\frac{55}{64} = 1,859375$

3) $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28} \approx 2 - \frac{28}{7 \cdot 64} = 1\frac{15}{16} = 1,9375$

4) $\sqrt[7]{5000} = \sqrt[7]{3^7 + 2813} \approx 3 + \frac{2813}{7 \cdot 729} = 3\frac{2813}{5103} = 3,5512\dots$

5) $\sqrt[7]{0,8} = \sqrt[7]{1 - 0,2} \approx 1 - \frac{0,2}{7} = \frac{34}{35} = 0,97142857$

j) 1) $\sqrt[11]{2} = \sqrt[11]{1+1} \approx 1 + \frac{1}{11} = 1\frac{1}{11} = 1,09$

2) $\sqrt[11]{65} = \sqrt[11]{1+64} \approx 1 + \frac{64}{11 \cdot 1} = 6\frac{9}{11} = 6,81$

3) $\sqrt[11]{100} = \sqrt[11]{1+99} \approx 1 + \frac{99}{11} = 10$

$$4) \sqrt[11]{5000} = \sqrt[11]{2 + 2952} \approx 2 + \frac{2952}{11 \cdot 1024} = 2 \frac{369}{1408} \approx 2,26207...$$

$$5) \sqrt[11]{0,8} = \sqrt[11]{1 - 0,2} \approx 1 - \frac{0,2}{11} = \frac{54}{55} = 0,981$$

$$k) x_{k+1} = x_k + \frac{b}{n x_k^{n-1}} \wedge \sqrt[n]{x_k^n + b} = \sqrt[n]{N}$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b}{n x_k^{n-1}} \wedge b = N - x_k^n$$

$$x_{k+1} = \frac{N + (n-1)x_k^n}{n x_k^{n-1}}$$

$$l) 1) \sqrt[4]{2}: 1; 1,25; 1,1935; 1,1892302...; 1,1892071...$$

$$\sqrt[4]{65}: 3; 2,851; 2,839426...; 2,8394115...$$

$$\sqrt[4]{100}: 3; 3,17592; 3,1623654...; 3,1622777...$$

$$\sqrt[4]{5000}: 8; 8,4414062...; 8,4091507...; 8,4089642...$$

$$\sqrt[4]{0,8}: 1; 0,95; 0,9457702...; 0,9457416...$$

$$2) \sqrt[5]{2}: 1; 1,2; 1,1529012...; 1,1487289...; 1,1486984...$$

$$\sqrt[5]{65}: 2; 2,4125; 2,3137727...; 2,3046051...; 2,3045316...$$

$$\sqrt[5]{100}: 2; 2,85; 2,5831451...; 2,5157109...; 2,511898...; 2,5118864...$$

$$\sqrt[5]{5000}: 5; 5,6; 5,4968289...; 5,4928086...; 5,4928027...$$

$$\sqrt[5]{0,8}: 1; 0,96; 0,9563801...; 0,9563525...$$

$$3) \sqrt[7]{2}: 1; 1,142857; 1,1078191...; 1,104127...; 1,1040895...$$

$$\sqrt[7]{65}: 2; 1,859375; 1,8184553...; 1,8154786...; 1,8154639...$$

$$\sqrt[7]{100}: 2; 1,9375; 1,930769...; 1,9306977...$$

$$\sqrt[7]{5000}: 3; 3,5512444...; 3,4000374...; 3,3766666...; 3,3761701...; 3,3761698...$$

$$\sqrt[7]{0,8}: 1; 0,97142857; 0,9686492...; 0,9686251...$$

$$4) \sqrt[11]{2}: 1; 1,09; 1,0678999...; 1,065079...; 1,0650411...$$

$$\sqrt[11]{65}: 1; 6,81; 6,1983471...; 5,6348611...; 5,1226012...;$$

$$4,6569106...; 4,2335563...; 3,8486908...; 3,4988181...;$$

$$3,1807652...; 2,8916605...; 2,6289268...; 2,3903082...;$$

$$2,1739779...; 1,9788495...; 1,8053720...; 1,6573113...;$$

$$1,5444456...; 1,4805649...; 1,4627152...; 1,4615434...;$$

$$1,4615387...$$

$$\sqrt[11]{100}: 1; 10; 9,09; 8,2644628...; 7,513148...; 6,8301346...;$$

6,2092133...; 5,6447394...; 5,1315816...; 4,6650749...;
 4,2409790...; 3,8554403...; 3,5049583...; 3,1863582...;
 2,8967735...; 2,6336490...; 2,3947926...; 2,1785495...;
 1,9842747...; 1,8134931...; 1,6722593...; 1,5733940...;
 1,5281342...; 1,5201288...; 1,5199112...; 1,5199111...

$\sqrt[11]{5000}$: 2; 2,2620739...; 2,1860023...; 2,1696943...;
 2,1690531...; 2,1690522...

$\sqrt[11]{0,8}$: 1; 0,981; 0,9799369...; 0,9799186...

57/4. a) $\sqrt{6765201} = 2601$

$$\begin{array}{r} -4 \\ \hline 276 \\ -276 \quad 46 \cdot 6 \\ \hline 52 \\ -0 \quad 520 \cdot 0 \\ \hline 5201 \quad 5201 \cdot 1 \end{array}$$

b) 2) $10^3 = 1000$; $100^3 = 1000000$; also 2 Stellen vor dem Komma.

Startwert: 60

60; 62,067407...; 62,000073...; 62

3) Radikand = $9,16 \dots \cdot 10^8$; Wurzelwert 2stellig.

Startwert: 60

60; 62,137852234...; 62,00061038...; 61,9999999... = 62

4) Radikand = $3,521 \dots \cdot 10^{12}$; Wurzelwert 2stellig.

Startwert: 60

60; 62,211489...; 62,002145...; 62

5) Radikand = $4,594 \dots \cdot 10^{16}$; Wurzelwert 3stellig.

Startwert: 100

100; 144,93716...; 131,095...; 123,3397...;
 121,14958...; 121,00064...; 121

57/5. 1) Radikand = $4,7 \dots \cdot 10^7$; Wurzelwert 2stellig.

Startwert: 80

80; 83,173008...; 83,000539...; 83

2) Radikand = $2,8 \dots \cdot 10^{20}$; Wurzelwert 3stellig.

Startwert: 800

800; 838,65545...; 834,07681...; 834,00002...; 834

3) Radikand = $7,516 \dots \cdot 10^{18}$; Wurzelwert 2stellig.

Startwert: 50

50; 52,452064...; 52,018986...; 52,000035...; 52

Aufgaben zu 3.4

- 60/1. a) 2 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{8}$ d) 4 e) 2
f) $\frac{1}{5}$ g) 3 h) 2 i) $\frac{1}{7}$ k) 2
2. a) $\frac{1}{2}$ b) 5 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{3}$
f) 2 g) $\frac{5}{2}$ h) 0,3 i) $\frac{2}{3}$ k) $\frac{3}{2}$
3. a) 4 b) $\frac{1}{27}$ c) 81 d) 8 e) $\frac{1}{3125}$
f) 32 g) $\frac{1}{27}$ h) 100 000 i) $\frac{1}{100}$ k) 128
4. a) $\frac{8}{125}$ b) $\frac{9}{25}$ c) 0,01024 d) $\frac{64}{25}$ e) 6,25
f) 1000 g) 0,2401 h) 0,000 001 i) 125 k) $\frac{243}{32}$
5. a) 7 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) 125
f) 2 g) $\frac{1}{81}$ h) $\frac{1}{125}$ i) 512 k) $\frac{1}{128}$
6. a) $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{-8} = \frac{1}{256}$ b) $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{-9} = \frac{1}{512}$
c) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ bzw. $3^{-4} = \frac{1}{81}$ d) $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$
e) $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{2}$ f) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ bzw. $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$
g) $2^6 = 64$ bzw. $2^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$ h) $2^6 = 64$ bzw. $2^{-\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{2}}$
i) $3^4 = 81$ bzw. $3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ j) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$ bzw. $3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
7. a) $2^{\frac{1}{7}}$ b) $4^{\frac{1}{5}}$ c) $9^{-\frac{1}{3}}$ d) $128^{\frac{1}{10}}$ e) $(\frac{8}{343})^{\frac{1}{4}}$
f) $25^{\frac{1}{3}}$ g) $2^{-\frac{1}{3}}$ h) $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$ i) $5^{-\frac{3}{4}}$ k) $0,3^{\frac{1}{3}}$

61/8. a) $\mathbb{R}; \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{6}} = |x|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{|x|^2} = \sqrt[3]{x^2}$
 $\mathbb{R}; \sqrt[4]{x^6} = \sqrt[4]{|x|^6} = |x|^{\frac{6}{4}} = |x|^{\frac{3}{2}} = \sqrt{|x|^3} = |x| \sqrt{|x|}$

b) $\mathbb{R}; \sqrt[8]{x^2} = \sqrt[8]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{8}} = |x|^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{|x|}$
 $\mathbb{R}_0^+; \sqrt[8]{x^3}$ kann nicht vereinfacht werden.
 $\mathbb{R}; \sqrt[8]{x^4} = \sqrt[8]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{8}} = |x|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x|}$
 $\mathbb{R}_0^+; \sqrt[8]{x^5}$ kann nicht vereinfacht werden.
 $\mathbb{R}; \sqrt[8]{x^6} = \sqrt[8]{|x|^6} = |x|^{\frac{6}{8}} = |x|^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{|x|^3}$
 $\mathbb{R}_0^+; \sqrt[8]{x^7}$ kann nicht vereinfacht werden.

c) Alle Terme sind in $\mathbb{R}$ definiert.

$$\sqrt{x^8} = \sqrt{(x^4)^2} = x^4$$

$$\sqrt[4]{x^8} = \sqrt[4]{(x^2)^4} = x^2$$

$$\sqrt[6]{x^8} = \sqrt[6]{|x|^8} = |x|^{\frac{8}{6}} = |x|^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{|x|^4} = \sqrt[3]{x^4}$$

$\sqrt[3]{x^8}$, $\sqrt[5]{x^8}$, $\sqrt[7]{x^8}$ und auch $\sqrt[3]{x^4}$ können nur weiter vereinfacht werden mit der Methode des teilweisen Radizierens (Aufgabe 68/19):

$$\sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{|x|^3 \cdot |x|} = |x| \sqrt[3]{|x|}$$

$$\sqrt[5]{x^8} = \sqrt[5]{|x|^5 \cdot |x|^3} = |x| \sqrt[5]{|x|^3}$$

$$\sqrt[7]{x^8} = \sqrt[7]{|x|^7 \cdot |x|} = |x| \sqrt[7]{|x|}$$

- 61/9. a) äquivalent, $D = \mathbb{R}_0^+$
 b) nicht äquivalent, da $\sqrt[3]{a^2}$ in $\mathbb{R}$, $a^{\frac{2}{3}}$ in $\mathbb{R}_0^+$ definiert
 c) äquivalent, $D = \mathbb{R}$
 d) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^+$ ist
 e) äquivalent, $D = \mathbb{R}_0^+$
 f) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_0^+$ ist
 g) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^+$ ist
 h) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist
 i) äquivalent, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 k) nicht äquivalent, da $\sqrt[3]{(1+a)^2}$ in $\mathbb{R}$, $(1+a)^{\frac{2}{3}}$ in $[-1; +\infty[$ definiert
 l) äquivalent, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 m) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\{(a|b) | a \geq b\}$ ist

10. a) $a^{\frac{1}{3}}$ b) $|x|^{\frac{2}{5}}$ c) $y^{\frac{3}{4}}$ d) $|z|^{-\frac{2}{3}}$ e) $m^{-\frac{3}{2}}$
 f) $|x|^{-\frac{6}{7}}$ g) $|a|^{\frac{1}{3}}$ h) $|a|^{-\frac{3}{4}}$ i) $|x|^{\frac{7}{10}}$ k) $|y|^{\frac{3}{4}}$

11. a) $9 \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ b) 0 c) $a^{\frac{2}{3}}$ d) $2x^{-\frac{1}{5}}$

12. a) $\{9\}$ b) $\{\frac{1}{4}\sqrt{2}\}$ c) $\{1\}$
 d) $\{1; 2\sqrt[3]{2}\}$ e) $\{243\}$ f) $\{2\}$
 g) $\{4^{\frac{3}{4}}\} = \{\sqrt[4]{64}\}$ h) $\{\}$ i) $\{3^{\frac{100}{17}}\} = \{243\sqrt[17]{3^{15}}\}$

Aufgaben zu 3.5

63/1. $a:b = b:c =: \lambda$. Somit gilt

$$\left. \begin{array}{l} a = \lambda b \\ b = \lambda c \end{array} \right\} \Rightarrow a = \lambda^2 c \Leftrightarrow a:c = \lambda^2 = (a:b)^2$$

2. $a:b = b:c = c:d =: \lambda$. Somit gilt

$$\left. \begin{array}{l} a = \lambda b \\ b = \lambda c \\ c = \lambda d \end{array} \right\} \Rightarrow a:d = \lambda^3 = (a:b)^3$$

Aufgaben zu 3.6

66/1. a) 4 b) 2 c) 9 d) 625
 e) 2 f) 5 g) 1

2. a) 3 b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $17^{\frac{23}{12}} = 17^{\frac{12}{12}} \sqrt[12]{17^{11}}$

3. a) $a^{\frac{11}{10}}$ b) $x^{-\frac{5}{12}}$ c) $b^{\frac{7}{12}}$ d) $y^{\frac{5}{8}}$
 e) $a^{-\frac{13}{5}}$ f) $m^{\frac{14}{15}}$ g) $x^{\frac{11}{12}}$ h) z

4. a) 4 b) $\frac{1}{125}$ c) 4 d) 729
 e) $a^{-\frac{1}{2}}$ f) $b^{\frac{1}{3}}$ g) $x^{\frac{1}{4}}$ h) $z^{\frac{3}{10}}$

5. a) $= 16^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{18}{4}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{9}{2}} = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 128\sqrt{2}$

b) $= \frac{1}{5 \cdot \sqrt[3]{17}} = \frac{\sqrt[3]{289}}{85}$

c) $= (2^5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2)^{\frac{2}{5}} = (2^{10} \cdot 3^6)^{\frac{2}{5}} = 2^4 \cdot 3^{\frac{12}{5}} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 144 \cdot \sqrt[5]{9}$

d) $= \frac{16^{\frac{1}{2}}}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{5}$ e) $= \frac{81^{\frac{2}{3}}}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{8}{3}}}{4^2} = \frac{9\sqrt[3]{9}}{16}$

f) $= \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{5}{4}} = \frac{2}{9} \sqrt[4]{\frac{2}{9}} = \frac{2}{9} \sqrt[4]{\frac{18}{81}} = \frac{2}{27} \sqrt[4]{18}$

6. a) $a^{\frac{5}{2}} b^5$ b) $x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{3}{2}}$ c) $u^2 v^{-\frac{3}{2}}$ d) $a^2 b^{-6} c^{-\frac{2}{3}}$
 e) $y^{\frac{1}{8}} z^{-\frac{1}{2}}$ f) $\frac{z^2}{xy^2}$ g) $\frac{a^{\frac{17}{2}}}{b^{\frac{5}{2}}} = \frac{a^8}{b^3} \sqrt{ab}$ h) $\frac{p^4 \sqrt{r}}{q^3 r^2}$

67/7. a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot \frac{27}{8})^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ b) $\frac{3}{2} : 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8} : 2\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} = (8 \cdot 9)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$ d) $3^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{6}} : 8^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$

8. a) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$
 $x = 6$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{27}{8}\right)^x &= \frac{2187}{128} \\ \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^7 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} &= \left(\frac{3}{2}\right)^7 \\ 3x &= 7 \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$67/9. \quad \text{a) } \left(\frac{ab}{c}\right)^2$$

$$\text{b) } \frac{1}{648} m^{\frac{1}{8}} n^{-\frac{3}{4}}$$

$$10. \quad \text{a) } x + 2x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } \frac{1}{y} - y$$

$$\text{c) } t^{\frac{3}{2}} - s^7$$

$$11. \quad a^{\frac{11}{6}} - 2a^{\frac{5}{24}} + a^{-\frac{5}{24}} + 3a^{-\frac{5}{8}} + 4a^{-\frac{11}{6}} - 12a^{-\frac{9}{4}} + 9a^{-\frac{8}{3}}$$

$$12. \quad \text{a) } 4$$

$$\text{b) } (256 \cdot 10^{-8})^{\frac{1}{8}} = 2 \cdot 10^{-1} = 0,2$$

$$\text{c) } (3^{12})^{\frac{1}{30}} = \sqrt[5]{9}$$

$$\text{d) } 6$$

$$13. \quad \text{a) } 2$$

$$\text{b) } 3$$

$$\text{c) } 6$$

$$\text{d) } 2$$

$$\text{e) } 2$$

$$\text{f) } 6$$

$$\text{g) } 2$$

$$14. \quad 1) \sqrt{45949729863572161} = 214358881$$

$$\begin{array}{r} -4 \\ \hline \end{array}$$

$$2^2 = 4$$

$$59$$

$$\begin{array}{r} -41 \\ \hline \end{array}$$

$$41 \cdot 1$$

$$1849$$

$$\begin{array}{r} -1696 \\ \hline \end{array}$$

$$424 \cdot 4$$

$$15372$$

$$\begin{array}{r} -12849 \\ \hline \end{array}$$

$$4283 \cdot 3$$

$$252398$$

$$\begin{array}{r} -214325 \\ \hline \end{array}$$

$$42865 \cdot 5$$

$$3807363$$

$$\begin{array}{r} -3429664 \\ \hline \end{array}$$

$$428708 \cdot 8$$

$$37769957$$

$$\begin{array}{r} -34297344 \\ \hline \end{array}$$

$$4287168 \cdot 8$$

$$347261321$$

$$\begin{array}{r} -342974144 \\ \hline \end{array}$$

$$42871768 \cdot 8$$

$$428717761$$

$$\begin{array}{r} -428717761 \\ \hline \end{array}$$

$$428717761 \cdot 1$$

$$0$$

$$2) \sqrt{214358881} = 14641$$

$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 114 \\ -96 \\ \hline 1835 \\ -1716 \\ \hline 11988 \\ -11696 \\ \hline 29281 \\ -29281 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 24 \cdot 4 \\ 286 \cdot 6 \\ 2924 \cdot 4 \\ 29281 \cdot 1 \end{array}$$

$$3) \sqrt{14641} = 121$$

$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 46 \\ -44 \\ \hline 241 \\ -241 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 22 \cdot 2 \\ 241 \cdot 1 \end{array}$$

Also: $\sqrt[8]{45949729863572161} = 121$

67/15. a) $4a$ b) a^2 c) $2|a|^3$ d) $|ab| = ab$ e) xy^2 f) $\frac{2m^2}{n}$

68/16. a) $\frac{a}{b^2}$ b) $\frac{x^2}{|y|^3}$ c) $\frac{2|n|^3}{m^2}$ d) $\frac{pq^2}{r^4}$

l) 6

e) $\frac{|a|}{b^2}$ f) $2|xy|$ g) $\frac{3u^3}{vw^5}$

17. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

18. a) a b) $\frac{1}{b}$ c) $|b|$ d) $\frac{2}{ab}$

19. a) $3\sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt[5]{5}$ c) $2\sqrt[4]{10}$ d) $4\sqrt{11}$ e) $3\sqrt[6]{10}$
f) $5\sqrt[4]{2}$ g) $2,5\sqrt{10}$ h) $0,7\sqrt[3]{5}$ i) $0,3\sqrt[5]{100}$ k) $1,1\sqrt{11}$

20. a) $a\sqrt{a}$ b) $a\sqrt[4]{a^3}$ c) $|a|b^2\sqrt[5]{|a|}$
d) $a^3b^2\sqrt[3]{a^2b^2}$ e) $|a|b^2\sqrt[10]{a^3b^5c^7}$ f) $(a-b)\sqrt[3]{(a-b)^2}$
g) $|a+b|\sqrt[3]{|a+b|}$ h) $|a-2b|(b+c)\sqrt[5]{|a-2b|^3(b+c)^2}$

21. a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}$
e) $\sqrt[4]{125}$ f) $2\sqrt[5]{9}$ g) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{12}$ h) $\sqrt[4]{156}$

22. a) $\frac{\sqrt[4]{6a}}{2a}$ b) $\frac{\sqrt[4]{22a^3}}{2a}$ c) $\frac{\sqrt[3]{|a|}}{|a|}$ d) $\frac{\sqrt[3]{|a|b^2}}{|b|}$

e) $\frac{\sqrt[5]{|a^2-b^2|}}{|a-b|}$ $[a = -2, b = 4 \text{ macht die Beträge verst\u00e4ndlich.}]$

f) $\sqrt[7]{a^2b^2}$ g) $2|a|b\sqrt[4]{2a^2b}$ h) $\frac{\sqrt[3]{3|a|b(a+b)^2}}{2|a|(a+b)^4}$

69/23. a) 128 b) 27 c) 16 d) 49 e) 512
 f) $2\sqrt[3]{2}$ g) 3 h) $2\sqrt[5]{2}$ i) $24\sqrt{3}$ j) 0,36

24. a) $(13^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 13^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{13}$ $((12^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 12^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{12}$
 b) 1) $\sqrt[6]{a}$ 2) $\sqrt[10]{b^3}$ 3) $\sqrt[12]{2}$ 4) $\sqrt[20]{2ab}$ 5) $\sqrt[36]{x}$

25. $= ((a^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{k}} = ((a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}$

26. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[4]{2}$ c) $\sqrt[7]{3}$ d) $\sqrt[5]{2}$
 e) $\sqrt[3]{a^2}$ f) $\sqrt[5]{|a|}$ g) $\sqrt[10]{x^3}$ h) $\sqrt[3]{|a|}$

27. a) $\sqrt{a}$ b) $|a|\sqrt{|a|}$ c) $a^2\sqrt{b}$ d) $\sqrt[4]{a^3b^5c|}$

28. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[4]{6}$
 e) $\sqrt[4]{27}$ f) $\sqrt[5]{25}$ g) $\sqrt[3]{0,09}$ h) $\sqrt[3]{0,4}$

29. Produkt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{mn}} \cdot b^{\frac{n}{mn}} = (a^m)^{\frac{1}{mn}} \cdot (b^n)^{\frac{1}{mn}} = (a^m \cdot b^n)^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^m b^n}$$

Quotient:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{-\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{mn}} \cdot b^{-\frac{n}{mn}} = (a^m)^{\frac{1}{mn}} \cdot (b^{-n})^{\frac{1}{mn}} = (a^m \cdot b^{-n})^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}}$$

30. a) $\sqrt[4]{8}$ b) $\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[12]{\frac{16}{27}}$ d) $\sqrt[15]{5^8}$
 e) 7 f) $\sqrt[4]{\frac{324}{5}}$ g) $\sqrt[20]{\frac{9}{2}}$

31. a) $\sqrt[6]{x^7}$ b) $\frac{1}{\sqrt[6]{y}}$ c) $\sqrt[12]{a^{11}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$
 e) $\sqrt[5]{b}$ f) $\sqrt[4]{n^5}$

70/32. a) $\sqrt[4]{12}$ b) $\sqrt[6]{5}$ c) $\sqrt[6]{81}$ d) $\sqrt[15]{2^7}$
 e) $\sqrt[3]{a^2}$ f) $\frac{1}{\sqrt[4]{b^3}}$ g) $\sqrt[24]{a^{23}b^9}$ h) $\sqrt[30]{a^{6m+2n+p}}$

33. a) $5\sqrt{5}$ b) $6(\sqrt[3]{3} + \sqrt{6})$

34. a) $-24(10\sqrt[3]{4} - 9)$ b) $207 + 18\sqrt{3}$

35. a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $4\sqrt[3]{2}$

70/36. a) $-\sqrt{2}$

b) $8\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[6]{10}$

37. a) $3\sqrt[4]{a^3}(a-1)$

b) $4\sqrt[3]{a^2}(a-1)$

38. a) $a\sqrt[4]{ab^3}$

b) $\frac{x^2}{y}(x^2+2y^2)\sqrt[5]{\frac{x}{y}} = \frac{x^2}{y^2}(x^2+2y^2)\sqrt[5]{xy^4}$

39. a) $\sqrt[12]{a}(1+3a)$

b) $\sqrt[12]{a}(a-2)$

40. a) $x^3 \cdot \sqrt[24]{x}$

b) $\sqrt[72]{y^{71}}$

41. a) $\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{c}{b}}$

42. a) $\{9\}$

b) $\{32\}$

c) $\{-9; 9\}$

d) $\{16\}$

e) $\{a^2b + b^2a - 2ab\sqrt{ab}\}$

f) $\{-a-b; b-a\}$

g) $\{\frac{1}{3}\sqrt[4]{a^3b}\}$

h) $\{-\frac{1}{4}\sqrt[4]{a^2b^3}; \frac{1}{2}\sqrt[4]{a^2b^3}\}$

i) $\mathbb{R}_0^+$

k) $\mathbb{R}^+$

71/43. x

44. $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} = \sqrt{a}\sqrt[4]{a}$

45. 1

$$\begin{aligned}
 46. &= \frac{(\sqrt{x}-x)^{\frac{1}{6}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x^5})^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(\sqrt{x}-x)^{\frac{1}{3}}}{(x\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-x)^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x^3x^2})^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{6}} (x\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}} = \\
 &= \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^2 (\sqrt{x}+x) \sqrt{x}}} = \\
 &= \frac{\sqrt[6]{x} (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x} \sqrt[6]{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 + \sqrt{x}\right) (\sqrt{x}+x)}} = \\
 &= \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x} \sqrt[6]{1+3\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}}} = \\
 &= \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{(1+\sqrt{x})^3}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}}
 \end{aligned}$$

72/47. a) Nennt man die 11 Zwischentöne $t_1, t_2, \dots, t_{11}$, dann muß gelten

$$\frac{t_1}{a^1} = \frac{t_2}{t_1} = \dots = \frac{t_{11}}{t_{10}} = \frac{a^2}{t_{11}} =: \lambda.$$

Also

$$t_1 = \lambda a^1, \quad t_2 = \lambda t_1, \dots, \quad a^2 = \lambda t_{11}.$$

Setzt man der Reihe nach ein, so erhält man

$$t_2 = \lambda^2 a^1, \quad t_3 = \lambda^3 a^1, \dots, \quad a^2 = \lambda^{12} a^1.$$

Wegen $a^2 : a^1 = 2$ gilt also $\lambda^{12} = 2$ bzw. $\lambda = \sqrt[12]{2}$.

Halbtonschritt $\sqrt[12]{2}$; Ganztonschritt $\sqrt[6]{2}$

b) a^2 : 880 Hz a^3 : 1760 Hz
 a : 220 Hz A : 110 Hz A_1 : 55 Hz

c) a^1 : 440 Hz b^1 : 466,16 Hz $\approx$ 466 Hz
 h^1 : 493,88 Hz $\approx$ 494 Hz c^2 : 523,25 Hz $\approx$ 523 Hz
 cis^2 : 554,36 Hz $\approx$ 554 Hz d^2 : 587,32 Hz $\approx$ 587 Hz
 dis^2 : 622,25 Hz $\approx$ 622 Hz e^2 : 659,25 Hz $\approx$ 659 Hz
 f^2 : 698,45 Hz $\approx$ 698 Hz fis^2 : 739,98 Hz $\approx$ 740 Hz
 g^2 : 783,99 Hz $\approx$ 784 Hz gis^2 : 830,60 Hz $\approx$ 831 Hz
 a^2 : 879,99 Hz $\approx$ 880 Hz

d) 1) d^2 : $586\frac{2}{3}$ Hz e^2 : 660 Hz
2) d^2 : 587,32 Hz e^2 : 659,25 Hz

e) Die 12. Quinte hat zum Ausgangston das Frequenzverhältnis
 $((\sqrt[12]{2})^7)^{12} : 1 = ((\sqrt[12]{2})^{12})^7 : 1 = 2^7 : 1.$

Das ist das Frequenzverhältnis zur 7. Oktave.

Reine Stimmung:

$$12. \text{ Quinte} : \text{Grundton} = (\frac{3}{2})^{12} : 1 = 129,74$$

$$7. \text{ Oktave} : \text{Grundton} = 2^7 : 1 = 128$$

Aufgaben zu 3.7

75/1. a) 1) 4,711113133... 2) 442,335006...
3) 3,15647077... 4) 36,46215961...

b) 1) $2^2 = 4$ 2) $10^2 = 100$
 $2^{2,2} = 4,5$ $10^{2,6} = 398$
 $2^{2,23} = 4,6$ $10^{2,64} = 436$
 $2^{2,236} = 4,710891$ $10^{2,645} = 441$
 $2^{2,2360} = 4,710891$ $10^{2,6457} = 442$

$$3) \sqrt{2}^3 = 2,8$$

$$\sqrt{2}^{3,3} = 3,13$$

$$\sqrt{2}^{3,31} = 3,14$$

$$\sqrt{2}^{3,316} = 3,155$$

$$\sqrt{2}^{3,3166} = 3,156$$

$$4) \pi^3 = 31$$

$$\pi^{3,1} = 34$$

$$\pi^{3,14} = 36,3$$

$$\pi^{3,141} = 36,43$$

$$\pi^{3,1415} = 36,458$$

$$75/2. \quad \text{a) } 4 \quad \text{b) } 5 \quad \text{c) } 27 \quad \text{d) } 243 \quad \text{e) } 100 \quad \text{f) } \frac{1}{5}$$

$$3. \quad \text{a) } \sqrt{2} \approx 1,414 \quad \text{b) } 3^{-6} = \frac{1}{729} \approx 0,001 \quad \text{c) } \sqrt{1,1} \approx 1,049$$

$$4. \quad \text{a) } a^{10\sqrt{2}-47} \quad \text{b) } x^2 \quad \text{c) } y^{\sqrt{2}} \quad \text{d) } c$$

$$\text{e) } a^2 b^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{f) } \sqrt{a} \quad \text{g) } m^{-3}$$

$$5. \quad \text{a) } \{\sqrt[3]{3}\} \quad \text{b) } \{3\} \quad \text{c) } \{3\sqrt{2}\} \quad \text{d) } \{0\} \quad \text{e) } \{-1\}$$

$$\text{f) } \{-\sqrt[3]{2,5}\} \quad \text{g) } \{-\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\} \quad \text{h) } \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\} \quad \text{i) } \{-1; 1\}$$

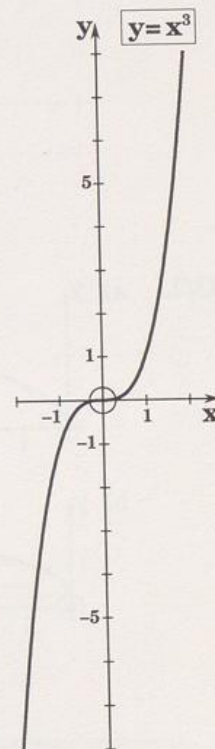
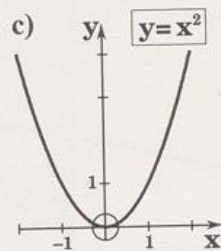
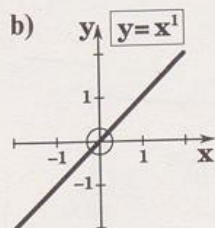
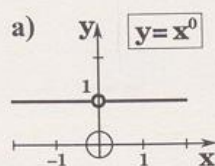
$$6. \quad \text{a) } 3^{\frac{1}{7}\sqrt{7}} \approx 1,51 \quad \text{b) } 2^{-\frac{1}{2\pi}} \approx 0,90 \quad \text{c) } 10^{\sqrt{3}} \approx 53,96 \quad \text{d) } x_1 = 0; x_2 = 1$$

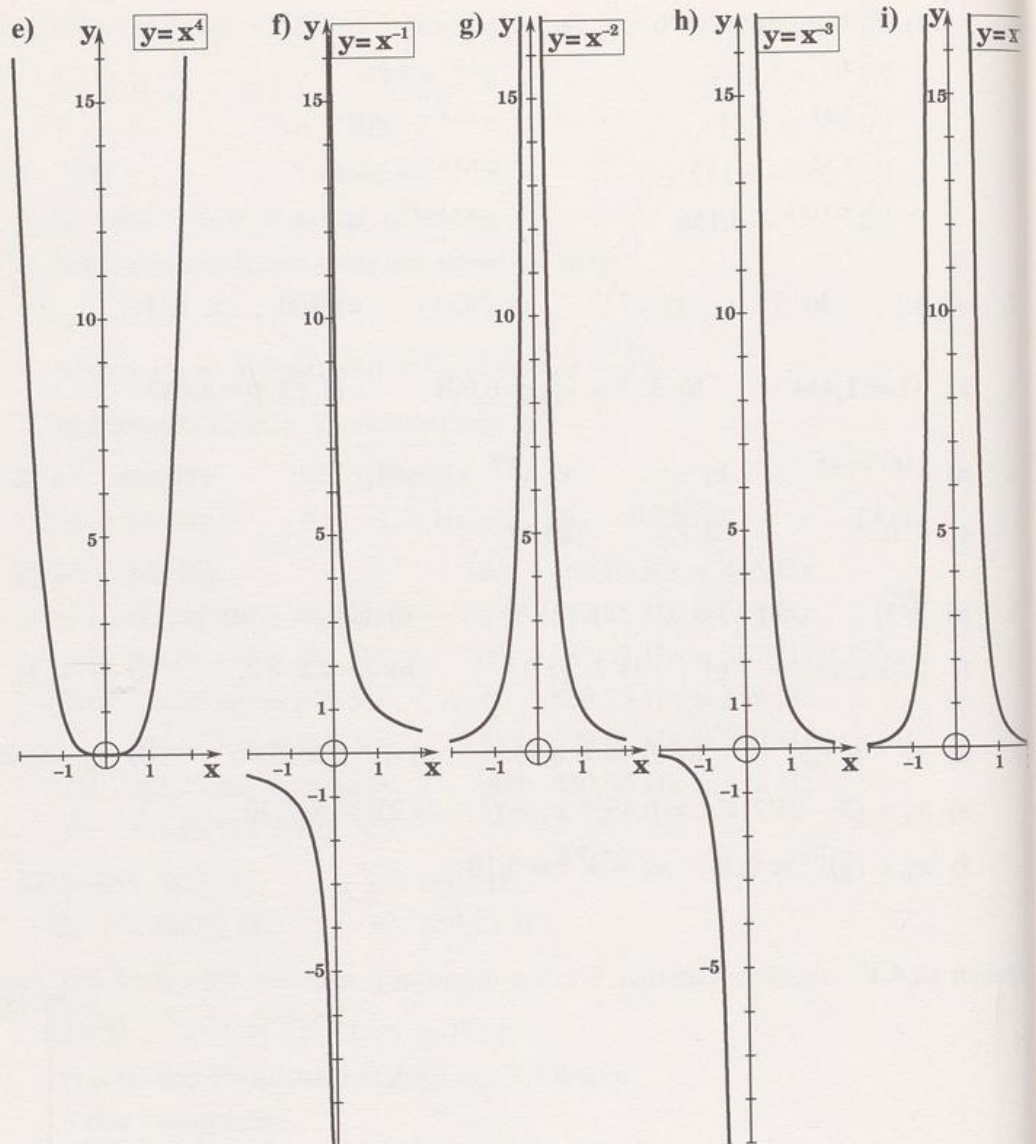
$$\text{e) } x_1 = (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}\sqrt{5}} \approx 0,45; \quad x_2 = (3 + 2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}\sqrt{5}} \approx 2,20$$

$$\text{f) } x_1 = (\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} \approx 0,38; \quad x_2 = 4^{\sqrt{2}} \approx 7,10$$

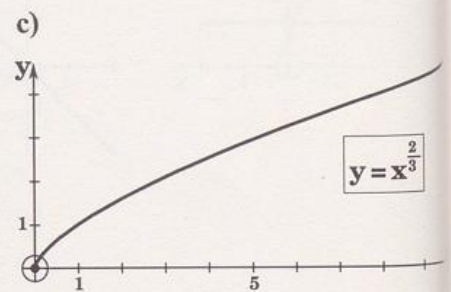
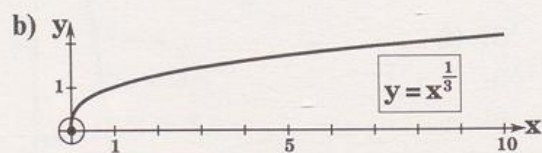
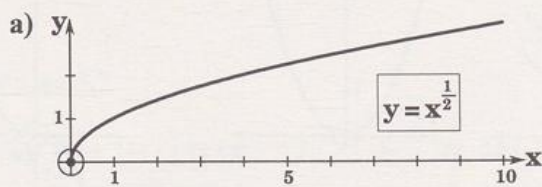
Aufgaben zu 4.1

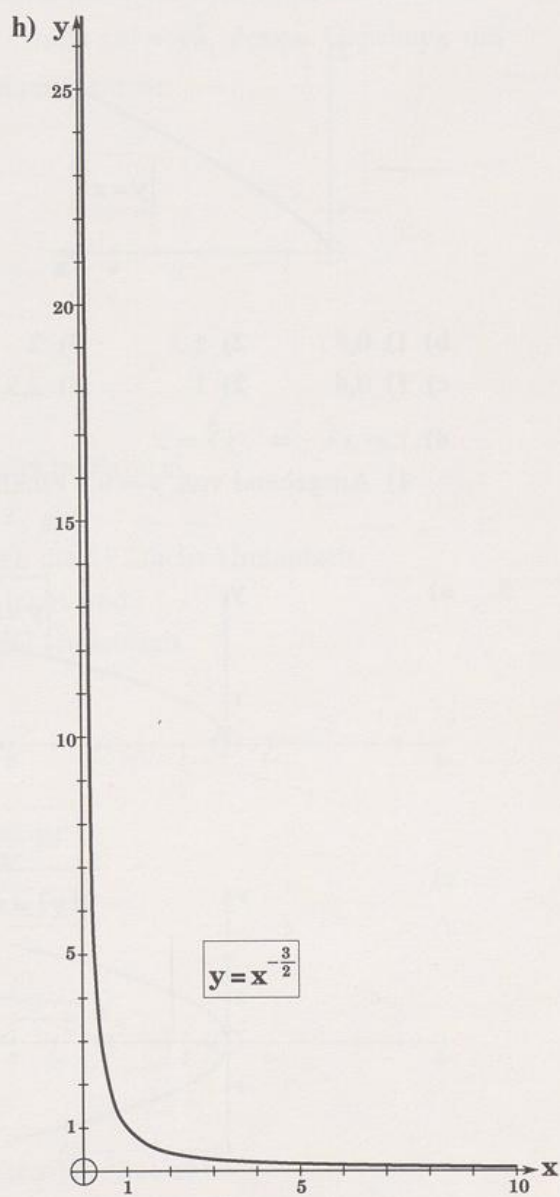
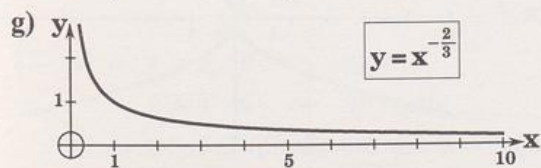
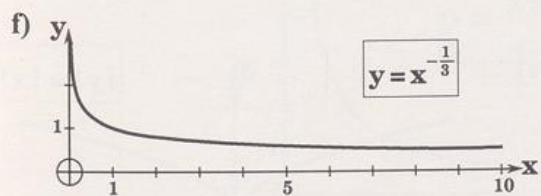
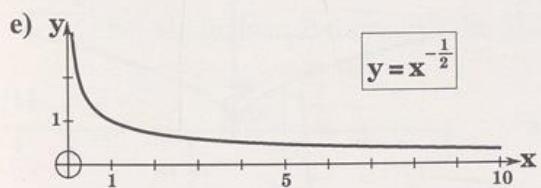
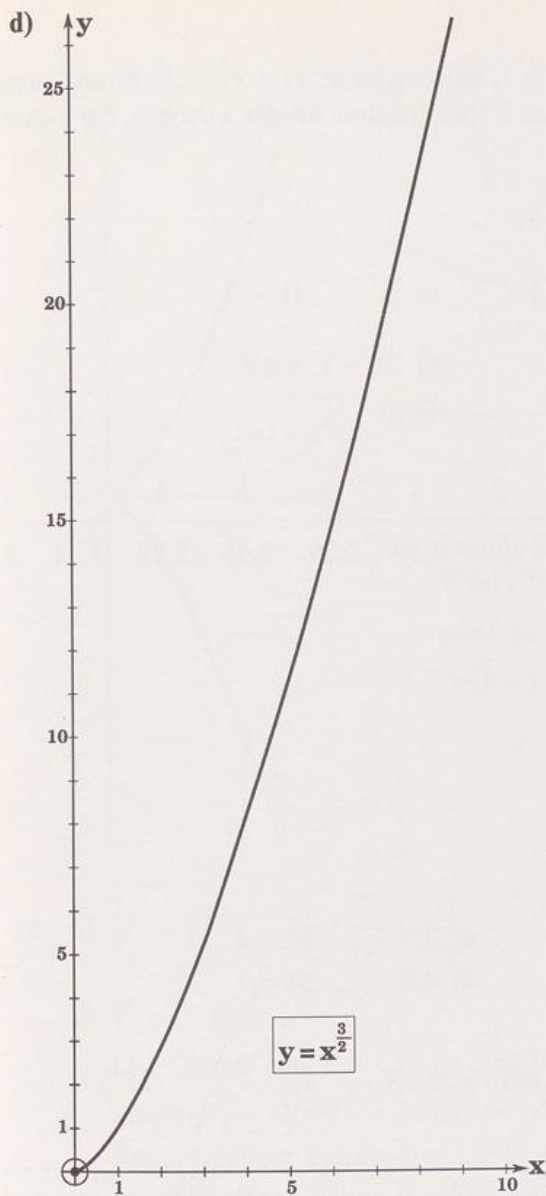
83/1.





83/2.





3. Neun Graphen $x \mapsto x^q$, $x \in [0; 1]$, $q > 1$, wurden samt $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$, d.h. ihren Spiegelbildern an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten, an der x -Achse, der y -Achse und am Ursprung gespiegelt.

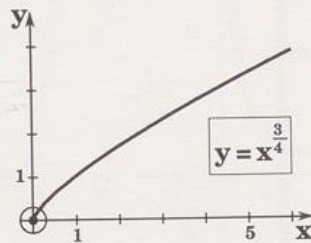
4. a) 3 b) - c) - d) 3

5. a) 4 b) 4 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) -2

6. a) $\mathbb{R}$ b) $2k, k \in \mathbb{Z}$ c) - d) $2k+1, k \in \mathbb{Z}$
e) $\mathbb{R}^+$ f) - g) - h) - i) 0

7. a)

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	6
$x^{\frac{3}{4}}$	0	0,59	1	1,35	1,68	1,98	2,27	2,55	2,82	3,34	3,8

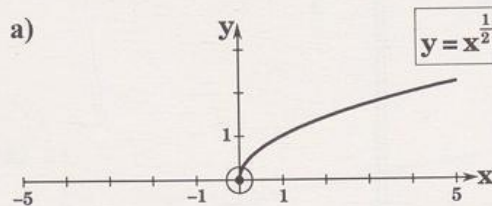


b) 1) 0,8 2) 1,3 3) 2 4) 2,3 5) 2,4
c) 1) 0,4 2) 1 3) 2,5 4) 4,3 5) 5,3

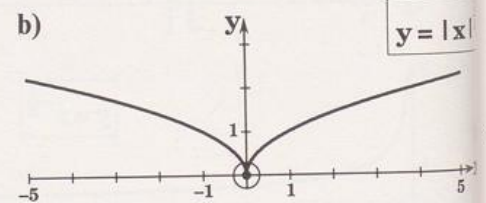
d) $y = x^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow y^{\frac{4}{3}} = x$

1) Ausgehend von $y = 0,5$ erhält man $x \approx 0,4$. 2) 3,4 3) 5,8

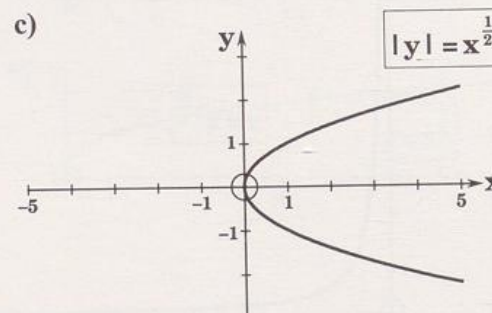
8. a)



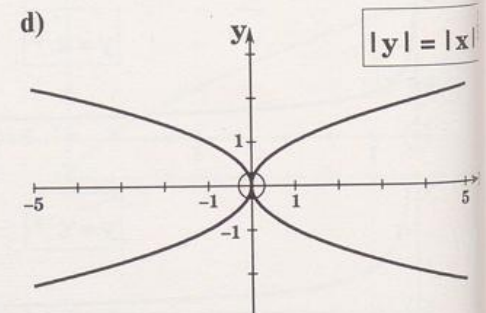
b)



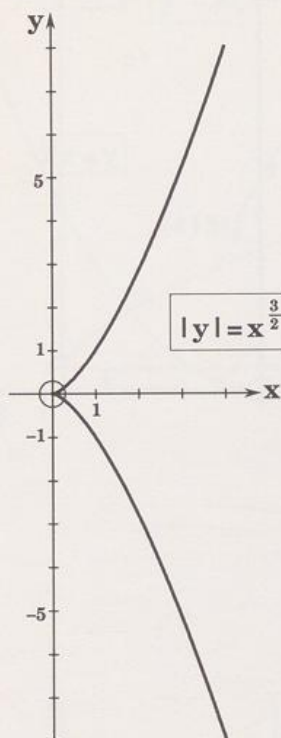
c)



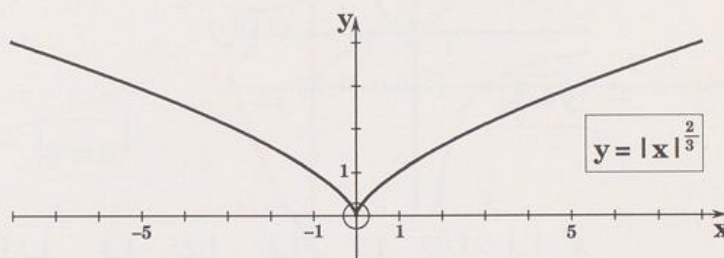
d)



84/9. a)



b)



Durch Spiegelung des Graphen $|y| = x^{\frac{3}{2}}$ an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten entsteht der Graph $|x| = y^{\frac{3}{2}}$, dessen Gleichung mit $|x|^{\frac{2}{3}} = y$ äquivalent ist.

10. a) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$

b) $T: r \mapsto Cr^{\frac{3}{2}}$

Der Graph von $T = Cr^{\frac{3}{2}}$ ist eine Neilsche Parabel.

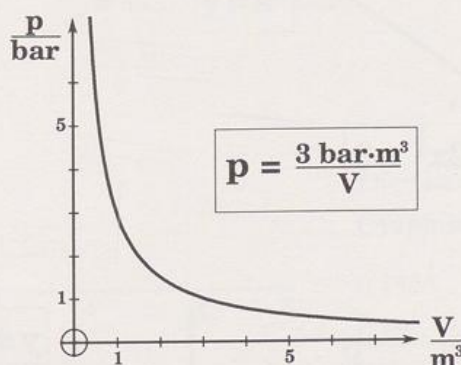
Wegen $T_n = C(nr)^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2}} Cr^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2}} T_1$ gilt:

Bei doppeltem Bahnradius ergibt sich die $2\sqrt{2}$ fache Umlaufzeit,

bei dreifachem Bahnradius die $3\sqrt{3}$ fache und

bei vierfachem Bahnradius die 8fache Umlaufzeit.

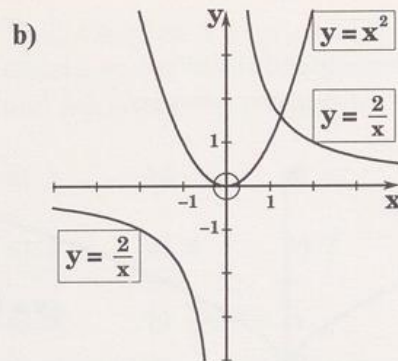
85/11. $p = \frac{c}{V}$



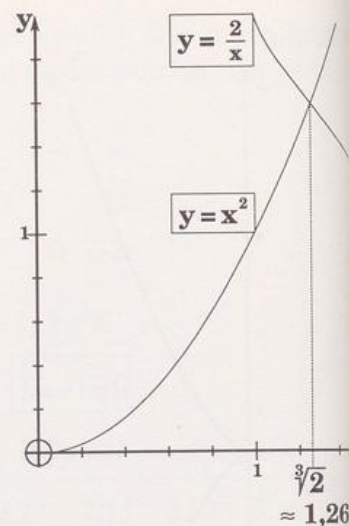
12. a) $a:x = x:y \Leftrightarrow ay = x^2$

$a:x = y:b \Leftrightarrow xy = ab$

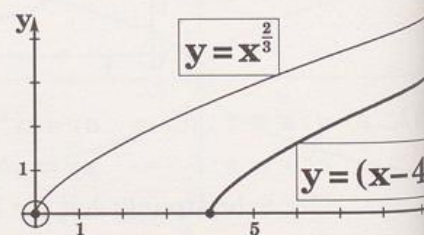
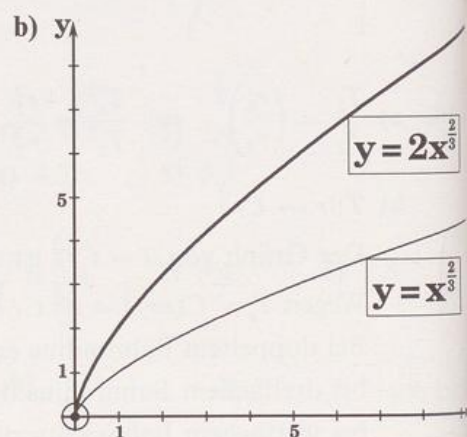
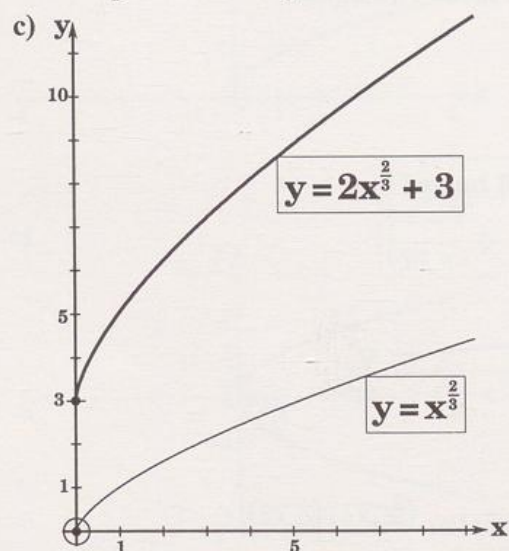
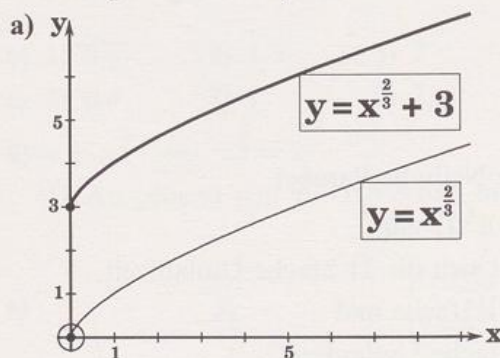
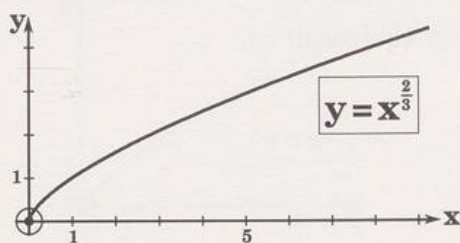
Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $(\sqrt[3]{a^2b} | \sqrt[3]{ab^2})$.

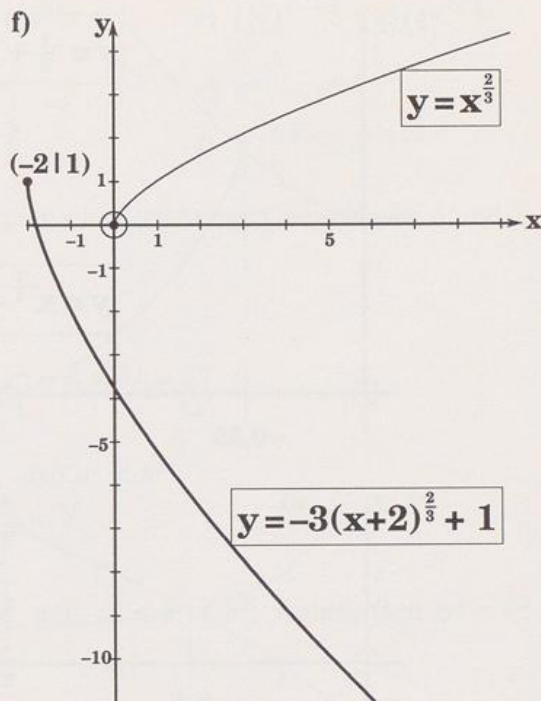
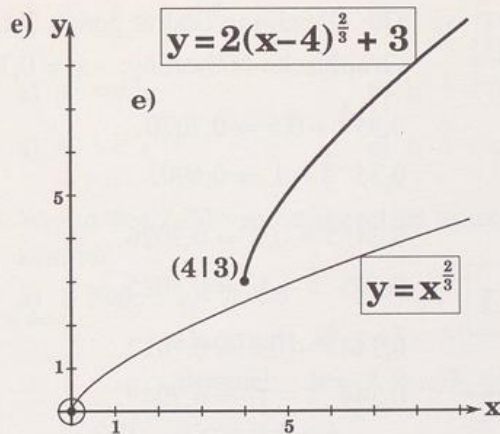


x	1	1,05	1,1	1,2	1,25	1,3	1,35
x^2	1	1,10	1,21	1,44	1,56	1,69	1,82
$\frac{2}{x}$	2	1,90	1,82	1,67	1,60	1,53	1,48

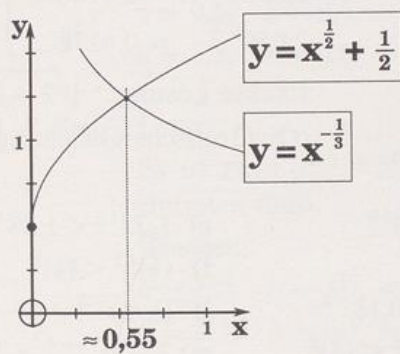


-85/13.





85/14.



Die Gleichung besitzt genau 1 Lösung.

Graphische Näherung: $x \approx 0,55$

$$0,55^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1,241 \dots$$

$$0,55^{-\frac{1}{3}} = 1,220 \dots$$

$$0,535^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1,2314 \dots$$

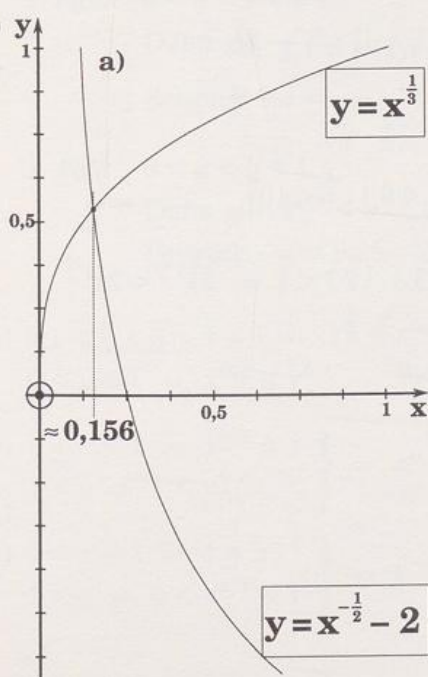
$$0,535^{-\frac{1}{3}} = 1,2318 \dots$$

$$0,536^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1,2321 \dots$$

$$0,536^{-\frac{1}{3}} = 1,2310 \dots$$

$$\Rightarrow x = 0,535 \dots$$

15. a)



Die Gleichung besitzt genau 1 Lösung.

Graphische Näherung: $x \approx 0,156$

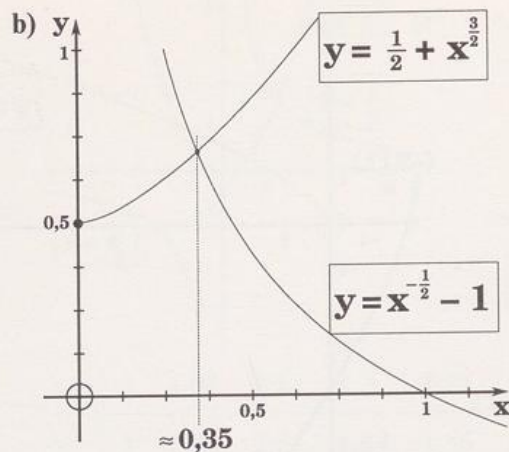
$$0,156^{\frac{1}{3}} = 0,5383 \dots$$

$$0,156^{-\frac{1}{2}} - 2 = 0,5318 \dots$$

$$0,155^{\frac{1}{3}} = 0,5371 \dots$$

$$0,155^{-\frac{1}{2}} - 2 = 0,5400 \dots$$

$$\Rightarrow x = 0,155 \dots$$



Die Gleichung besitzt genau 1 Lösung 88/4.

Graphische Näherung: $x \approx 0,35$

89/5.

$$0,35^{\frac{3}{2}} + 0,5 = 0,7070\dots$$

$$0,35^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0,6903\dots$$

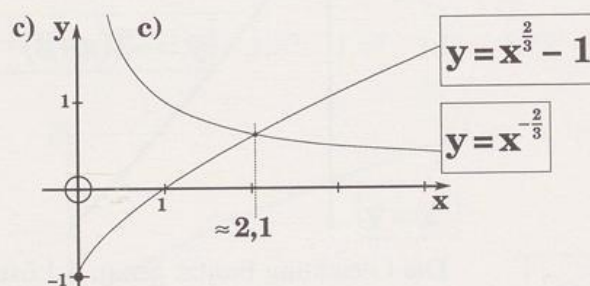
$$0,345^{\frac{3}{2}} + 0,5 = 0,7026\dots$$

$$0,345^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0,7025\dots$$

$$0,344^{\frac{3}{2}} + 0,5 = 0,7017\dots$$

$$0,344^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0,7049\dots$$

$\Rightarrow x = 0,35$



Die Gleichung besitzt genau 1 Lösung

Graphische Näherung: $x \approx 2,1$

$$2,058^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,6179\dots$$

$$2,058^{-\frac{2}{3}} = 0,6180\dots$$

$$2,059^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,6184\dots$$

$$2,059^{-\frac{2}{3}} = 0,6178\dots$$

$\Rightarrow x = 2,1$

Exakte Lösung: $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$

(Quadratische Gleichung für $u = \sqrt{x}$)

88/1. a) $3^{10} < 4^{10}$

d) $0,98^5 < 0,99^5$

g) $18^{-4} < 18^{-3}$

k) $16^5 < 16^6 < 17^6$

b) $(\frac{1}{4})^{10} < (\frac{1}{3})^{10}$

e) $7^9 < 7^{12}$

h) $0,18^{-3} < 0,18^{-4}$

l) $(\frac{1}{2})^6 < (\frac{2}{3})^6 < (\frac{2}{3})^5$

c) $1,77^{13} < 1,78^{13}$

f) $(\frac{1}{7})^{12} < (\frac{1}{7})^9$

i) $(-1)^{-4} = (-1)^{-6}$

m) $2^{-4} > 2^{-6} > 3^{-6}$

2. a) $5^{0,3} < 5^{\frac{3}{8}} < 5^{\frac{2}{5}}$

b) $1,1^{-\frac{8}{3}} < 1,1^{-\frac{5}{2}} < 1,1^{-\frac{13}{6}}$

c) $(\frac{2}{3})^{1,3} < (\frac{2}{3})^{\frac{9}{7}} < (\frac{2}{3})^{\frac{6}{5}} < (\frac{2}{3})^{-\frac{4}{3}}$

d) $10^{\frac{4}{3}} = 0,1^{-\frac{4}{3}}; 100^{-\frac{9}{16}} = 0,1^{\frac{9}{8}}$

$$-\frac{4}{3} < -\frac{4}{5} < \frac{9}{8} < \frac{5}{4} \Rightarrow 0,1^{\frac{5}{4}} < 100^{-\frac{9}{16}} < 0,1^{-\frac{4}{5}} < 10^{\frac{4}{3}}$$

3. a) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{3} < \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} < 2^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

b) $\pi < \frac{22}{7} \Rightarrow (\frac{12}{11})^{\pi} < (\frac{12}{11})^{\frac{22}{7}}$

c) $10^3 < 2^{10} \Rightarrow 10^{\frac{3}{7}} < 2^{\frac{10}{7}} \Rightarrow 5^{10^{\frac{3}{7}}} < 5^{2^{\frac{10}{7}}}$

d) $-\sqrt{6} < -\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{6}} < (\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{5}}$

e) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} \Rightarrow 0,9^{\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}} = 0,9^{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}$

f) $-\sqrt{10} < -\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\pi} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{10}}$

- 88/4. a) $1,5^{\sqrt[7]{3}} < 1,6^{\sqrt[7]{3}}$ b) $0,87^{\sqrt[3]{5}} < (\frac{7}{8})^{\sqrt[3]{5}}$ c) $(\frac{15}{16})^{1-\sqrt{3}} < (\frac{14}{15})^{1-\sqrt{3}}$
- 89/5. a) $a^2 < b^2$ b) $a^{1,2} < b^{1,2}$ c) $a^{0,1} < b^{0,1}$
- d) $b^{-4} < a^{-4}$ e) $b^{-\frac{3}{8}} < a^{-\frac{3}{8}}$ f) $b^{-0,01} < a^{-0,01}$

6. Wegen des 2. Monotoniegesetzes müßte man die Beziehungen zwischen a , b und 1 kennen.

a) 1. Fall: $1 < a < b$

Dann gilt $a^2 < a^3 < b^3$.

Beispiel: $a = 2, b = 3 \Rightarrow 2^2 = 4 < 3^3 = 27$

2. Fall: $0 < a < 1 < b$

Dann ist $a^2 < 1$ und $b^3 > 1$, also $a^2 < b^3$.

Beispiel: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{27}{8}$

3. Fall: $0 < a < b < 1$

Dann ist zwar $a^3 < a^2 < b^2$ und $a^3 < b^3 < b^2$, wohingegen $a^2 < b^3$ nicht eintreten muß.

Beispiel:

$a = 0,5; b = 0,7 \Rightarrow a^2 < b^3$, weil $0,25 < 0,343$.

$a = 0,5; b = 0,6 \Rightarrow a^2 > b^3$, weil $0,25 > 0,216$.

b) 1. Fall: $1 < a < b$

Es ist zwar $a^{0,5} < b^{0,5}$ und $b^{0,2} < b^{0,5}$, wohingegen $a^{0,5} < b^{0,2}$ nicht eintreten muß.

Beispiel:

$a = 2^{10}; b = 3^{10} \Rightarrow a^{0,5} > b^{0,2}$, weil $32 > 9$.

$a = 2^{10}; b = 6^{10} \Rightarrow a^{0,5} < b^{0,2}$, weil $32 < 36$.

2. Fall: $0 < a < 1 < b$

Dann gilt $a^{0,5} < 1 \wedge 1 < b^{0,2}$, also $a^{0,5} < b^{0,2}$.

Beispiel: $a = \frac{1}{2^{10}}, b = 2^{10} \Rightarrow \frac{1}{32} < 4$

3. Fall: $0 < a < b < 1$

Dann gilt $a^{0,5} < a^{0,2}$ und $a^{0,2} < b^{0,2}$, also $a^{0,5} < b^{0,2}$

Beispiel: $a = 0,25, b = 0,32768 \Rightarrow 0,5 < 0,8$

$$7. \quad \left. \begin{array}{l} a) \quad 0,1 < \frac{2}{3} \wedge 0 < x < 1 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} < x^{0,1} \\ \quad \quad 0 < x < y \Rightarrow x^{0,1} < y^{0,1} \end{array} \right\} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} < y^{0,1}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} 0 < x < 1 \Rightarrow x^{0,1} < 1 \\ \quad \quad 1 < y \Rightarrow 1 < y^{\frac{2}{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow x^{0,1} < y^{\frac{2}{3}}$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} 0 < x < 1 \Rightarrow 1 < x^{-\frac{1}{5}} \\ \quad \quad 1 < y \Rightarrow 0 < y^{-3} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y^{-3} < x^{-\frac{1}{5}}$$

89/8. a) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

b) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^2 < ab \Leftrightarrow 0 < a < \sqrt{ab}$

c) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^2 b < ab^2 \Leftrightarrow 0 < a\sqrt{b} < b\sqrt{a}$

d) $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{b^2}$

e) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{a^2}{b} < a \Leftrightarrow \sqrt[4]{a^2 b^{-1}} < \sqrt[4]{a}$

f) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^{p+1} b^q < a^p b^{q+1} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^{p+1} b^q} < \sqrt[n]{a^p b^{q+1}}$

9. a) $a > 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > 1$

Beispiel: $4 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{4} > 1 \Leftrightarrow 2 > 1$

b) $0 \leq a < 1 \Leftrightarrow 0^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}} < 1^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1$

Beispiel: $0 < \frac{4}{9} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{4}{9}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < 1$

c) $a > 1$
 $m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \left. \vphantom{\frac{1}{m} < \frac{1}{n}} \right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$

Beispiel: $\left. \begin{array}{l} 1024 > 1 \\ 5 > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = \sqrt[5]{1024} < \sqrt[2]{1024} = 32$

d) $0 \leq a < 1$
 $m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \left. \vphantom{\frac{1}{m} < \frac{1}{n}} \right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$

Beispiel: $\left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{1}{729} < 1 \\ 3 > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{27} = \sqrt[2]{\frac{1}{729}} < \sqrt[3]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{9}$

e) $1 \leq a < b$
 $m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \left. \vphantom{\frac{1}{m} < \frac{1}{n}} \right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}$

Beispiel: $\left. \begin{array}{l} 1 \leq 64 < 729 \\ 3 > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = \sqrt[3]{64} < \sqrt[2]{729} = 27$

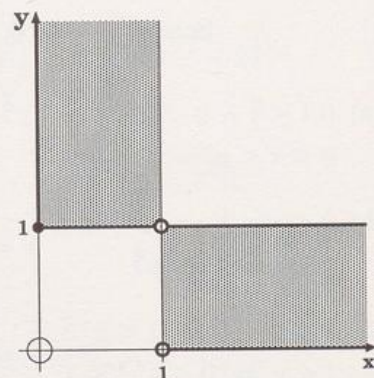
f) $0 \leq a < b \leq 1$
 $m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \left. \vphantom{\frac{1}{m} < \frac{1}{n}} \right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}} < b^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{b}$

Beispiel: $\left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{1}{729} < \frac{1}{64} \leq 1 \\ 3 > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{27} = \sqrt[2]{\frac{1}{729}} < \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

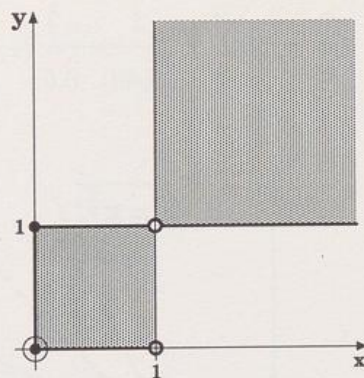
10. a) $0 < x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow 0 < x_1^q < x_2^q < 1$

$0 < x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1^q < 1 < x_2^q$

$1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 1 < x_1^q < x_2^q$



b) $0 < x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x_2^e < x_1^e$
 $0 < x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_2^e < 1 < x_1^e$
 $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_2^e < x_1^e < 1$

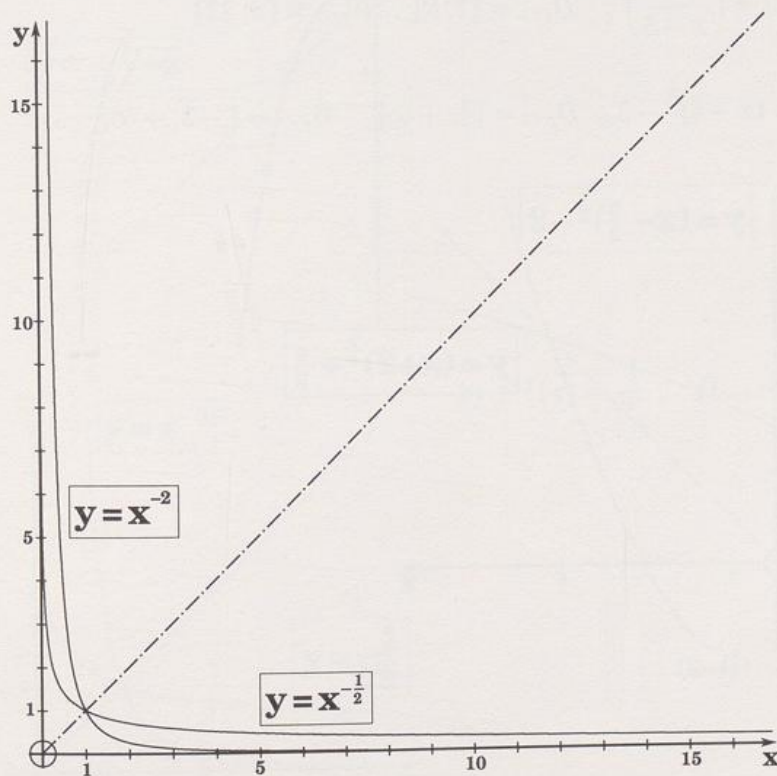


- 89/11. a) echt monoton zunehmend
 c) keine Monotonie in D
 e) echt monoton abnehmend
 g) keine Monotonie in D

- b) echt monoton abnehmend
 d) konstant
 f) echt monoton abnehmend
 h) keine Monotonie in D

Aufgaben zu 4.3

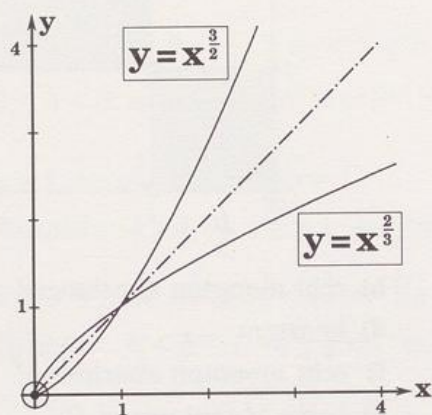
93/1.	x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4	5	10	16
	x^{-2}	16	4	$\frac{16}{9}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{256}$



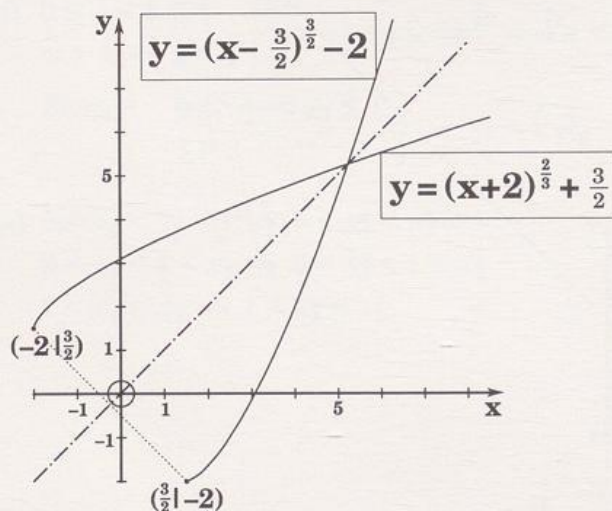
93/2.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$x^{\frac{2}{3}}$	0	0,40	0,63	0,83	1	1,31	1,59	1,84	2,08	2,30	2,52

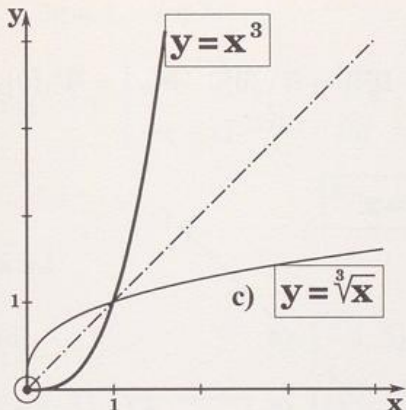
93/5



3. a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2(x-3)}$, $D_{f^{-1}} = [3; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$
 b) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt[5]{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $W_{f^{-1}} = [3; +\infty[$
 c) $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt[5]{|x|}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^-$; $W_{f^{-1}} =]-\infty; 3[$
 d) $f^{-1}(x) = [\frac{1}{5}(x+4)]^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$, $D_{f^{-1}} = [-4; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = [-2; +\infty[$
 e) $f^{-1}(x) = [5(x - \sqrt[3]{5})]^{-\frac{10}{3}}$, $D_{f^{-1}} =]\sqrt[3]{5}; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$
 f) $f^{-1}(x) = \left(\frac{6}{x-5}\right)^3$; $D_{f^{-1}} = [7; 8]$; $W_{f^{-1}} = [8; 27]$
4. $f^{-1}(x) = (x - \frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} - 2$, $D_{f^{-1}} = [\frac{3}{2}; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = [-2; +\infty[$

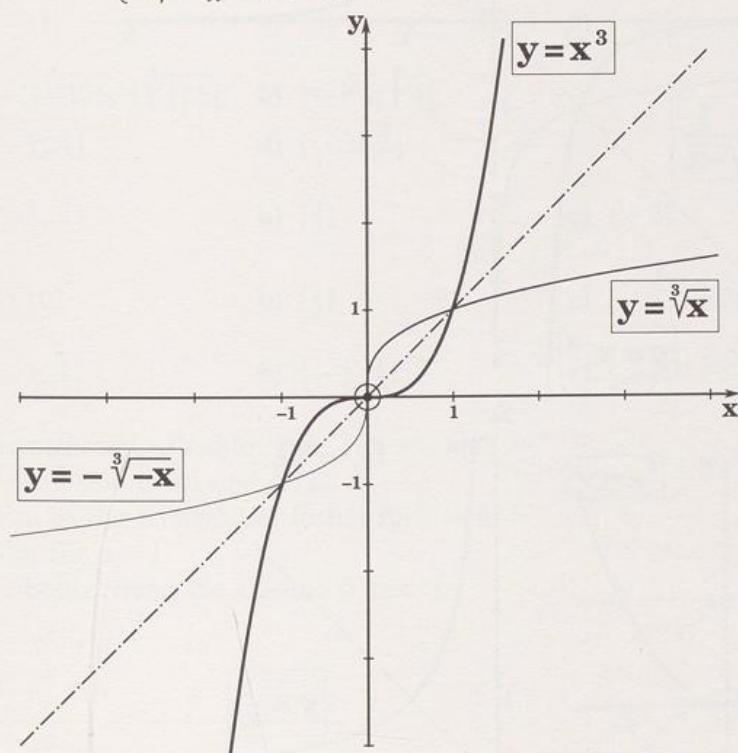


93/5. a)

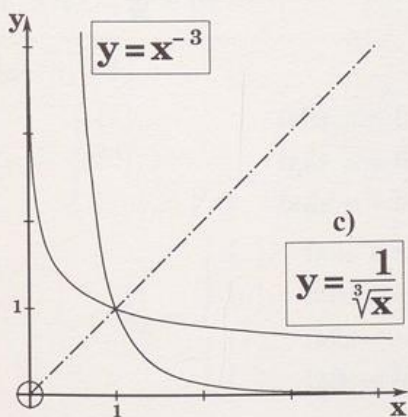


b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

d) $g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$, $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$, $W_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

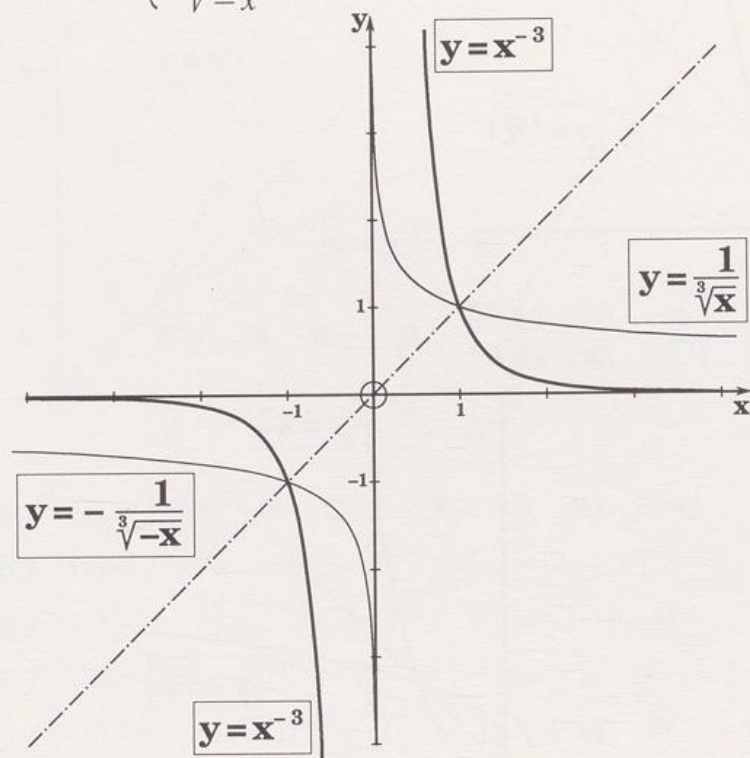


6. a)

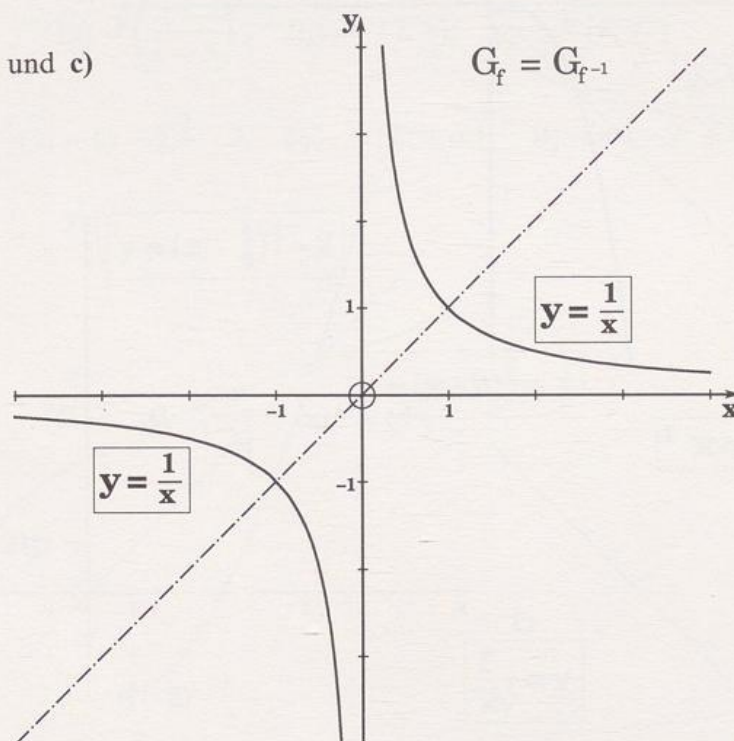


b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$

$$\text{d) } g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \quad D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad W_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



93/7. a) und c)



$$\text{b) } f^{-1}(x) = x^{-1} = f(x), \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = W_{f^{-1}}$$

93/8. $n = -2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}$

$$f_{-2k+1}^{-1}(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{-2k+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ -(-x)^{-\frac{1}{-2k+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \quad W_{f_{-2k+1}^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Aufgaben zu 5.1

- 98/1. a) $\{8\}$ b) $\{-5; 5\}$ c) $\{2\}$
2. a) $\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$ b) $\{\frac{7}{4}\}$ c) $\{\frac{4}{3}\}$
3. a) $\{-\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{1}{3}\sqrt{3}\}$ b) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ c) $\{\sqrt[9]{129}\}$
- 99/4. a) $\{-1\}$ b) $\{\}$ c) $\{-2\}$
5. a) $\{-\frac{1}{5}\sqrt[4]{125}; \frac{1}{5}\sqrt[4]{125}\}$ b) $\{-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}\}$
- c) $\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$ d) $\{-2\sqrt[5]{2}\}$
6. a) $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ b) $\{\frac{3}{2}\}$ c) $\{-2\}$
7. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $\{\frac{1}{2}\}$ c) $\{-\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{2}\}$
8. a) $\{-1; 1\}$ b) $\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\}$ c) $\{-\sqrt[5]{2}; \sqrt[5]{2}\}$

9. a) Gemeinsame Punkte von $y = x^2$ und $y = x^3$ sind $(0|0)$ und $(1|1)$.
Also ist das System nur lösbar für $a = 0$ oder für $a = 1$.
Es besitzt dann die Lösung 0 bzw. 1.

I $x^2 = a$

II $x^3 = a$

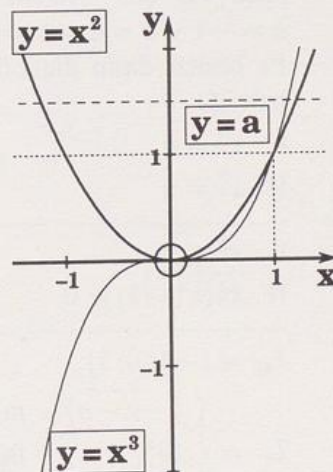
I' $x^2 = a$

II' $x^2(x - 1) = 0$

$L_{\text{II}'} = \{0; 1\}$

$$L_{\text{I}'} = \begin{cases} \{\}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}, & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

$$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} = \begin{cases} \{\}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{\}, & \text{falls } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}. \end{cases}$$



noch 99/9. b) Gemeinsame Punkte von $y = x^2$ und $y = x^4$ sind $(-1|1)$, $(0|0)$ und $(1|1)$.

Also ist das System nur für $a = 0$ oder $a = 1$ lösbar.

Es besitzt dann die Lösung 0 bzw. die Lösungen -1 und 1 .

$$\text{I } x^2 = a$$

$$\text{II } x^4 = a$$

$$\text{I}' x^2 = a$$

$$\text{II}' x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$L_{\text{II}'} = \{-1; 0; 1\}$$

$$L_{\text{I}'} = \begin{cases} \{ \}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}, & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Für $a > 0$ ist $L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} \neq \{ \}$, wenn $-\sqrt{a} = -1 \vee \sqrt{a} = 1$, d. h., wenn $a = 1$, mit gilt

$$L = \begin{cases} \{ \}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{-1; 1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{ \}, & \text{falls } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}. \end{cases}$$

c) Gemeinsame Punkte von $y = x^3$ und $y = x^7$ sind $(-1|-1)$, $(0|0)$ und $(1|1)$.

Also ist das System nur lösbar für $a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1$.

Es besitzt dann die Lösung -1 bzw. 1 bzw. 0 .

$$\text{I } x^3 = a$$

$$\text{II } x^7 = a$$

$$\text{I}' x^3 = a$$

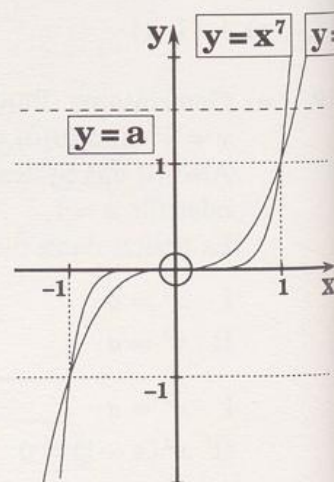
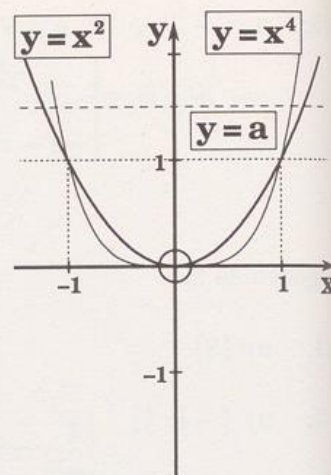
$$\text{II}' x^3(x^4 - 1) = 0$$

$$L_{\text{II}'} = \{-1; 0; 1\}$$

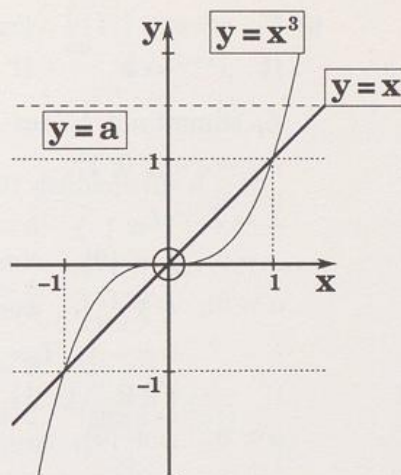
$$L_{\text{I}'} = \begin{cases} \{-\sqrt[3]{-a}\}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{\sqrt[3]{a}\}, & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} \neq \{ \}$, wenn $-\sqrt[3]{-a} = -1 \vee \sqrt[3]{a} = 1 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1$.
Somit gilt

$$L = \begin{cases} \{-1\}, & \text{falls } a = -1 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{ \}, & \text{sonst.} \end{cases}$$



- d) Gemeinsame Punkte von $y = x$ und $y = x^3$ sind $(-1|-1)$, $(0|0)$ und $(1|1)$. Also ist das System nur lösbar für $a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1$. Es besitzt dann die Lösung -1 bzw. 0 bzw. 1 .



$$\text{I } x = a$$

$$\text{II } x^3 = a$$

$$\text{I}' x = a$$

$$\text{II}' x(x^2 - 1) = 0$$

$$L_{\text{II}'} = \{-1; 0; 1\}$$

$$L_{\text{I}'} = \{a\}$$

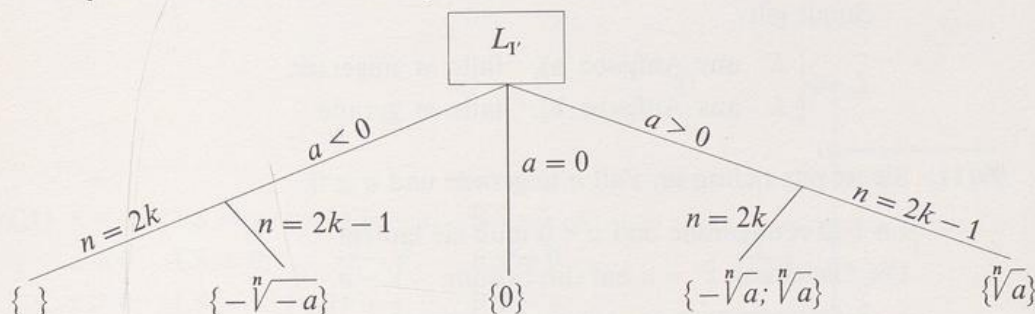
$$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} \neq \{ \}, \text{ wenn } a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1. \text{ Also}$$

$$L = \begin{cases} \{-1\}, & \text{falls } a = -1 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{ \}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

99/10. a) I $x^n = a$ I' $x^n = a$
II $x^{n+1} = a$ II' $x^n(x-1) = 0$

$$L_{\text{II}'} = \{0; 1\}$$

Für $L_{\text{I}'}$ erhält man mit $k \in \mathbb{N}$ folgendes Schema:



$$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'}$$

$$a = 0: L = \{0\}, \text{ eine Lösung}$$

$$a < 0: L = \{ \}, \text{ keine Lösung}$$

$$a > 0: L \neq \{ \}, \text{ wenn } \sqrt[n]{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1. \text{ Also}$$

$$a = 1: L = \{1\}, \text{ eine Lösung}$$

$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}: L = \{ \}, \text{ keine Lösung}$$

Zusammenfassung:

a	$-\infty < a < 0$	0	$0 < a < 1$	1	$1 < a < +\infty$
L	$\{ \}$	$\{0\}$	$\{ \}$	$\{1\}$	$\{ \}$

$$\begin{aligned} \text{b) I } x^n &= a & \text{I' } x^n &= a \\ \text{II } x^{n+2} &= a & \Leftrightarrow & \text{II' } x^n(x^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

L_I stimmt mit $L_{I'}$ aus Aufgabe a) überein.

$$L_{II'} = \{-1; 0; 1\}$$

$$L = L_I \cap L_{II'}$$

$$a = 0: L = \{0\}, \text{ eine Lösung}$$

$$a < 0: L \neq \{ \}, \text{ wenn } -\sqrt[n]{-a} = -1 \Leftrightarrow a = -1$$

$$a = -1: L = \{-1\}, \text{ eine Lösung}$$

$$a \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1\}: L = \{ \}, \text{ keine Lösung}$$

$$a > 0: L \neq \{0\}, \text{ wenn } -\sqrt[n]{a} = -1 \vee \sqrt[n]{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$a = 1: L = \{-1; 1\}, \text{ zwei Lösungen}$$

$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}: L = \{ \}, \text{ keine Lösung}$$

Zusammenfassung:

a	$-\infty < a < -1$	-1	$-1 < a < 0$	0	$0 < a < 1$	1	$1 < a < +\infty$
L	$\{ \}$	$\{-1\}$	$\{ \}$	$\{0\}$	$\{ \}$	$\{-1; 1\}$	$\{ \}$

$$\begin{aligned} \text{c) I } x^n &= a & \text{I' } x^n &= a \\ \text{II } x^{n+m} &= a & \Leftrightarrow & \text{II' } x^n(x^m - 1) = 0 \end{aligned}$$

L_I wie in Aufgabe a).

$$L_{II'} = \begin{cases} L_{II'} \text{ aus Aufgabe a), falls } m \text{ ungerade} \\ L_{II'} \text{ aus Aufgabe b), falls } m \text{ gerade} \end{cases}$$

Somit gilt

$$L = \begin{cases} L \text{ aus Aufgabe a), falls } m \text{ ungerade} \\ L \text{ aus Aufgabe b), falls } m \text{ gerade} \end{cases}$$

99/11. Sie ist nur richtig im Fall n ungerade und $a \geq 0$.

Im Fall n ungerade und $a < 0$ muß sie lauten:

Die Gleichung $x^n = a$ hat die Lösung $-\sqrt[n]{-a}$.

Im Fall n gerade und $a \geq 0$ muß sie lauten:

Die Gleichung $x^n = a$ hat die Lösungen $-\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{a}$.

Im Fall n gerade und $a < 0$ muß sie lauten:

Die Gleichung $x^n = a$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{12. a) } a \neq 0: & \{-a; a\} & \text{b) } & \{a\} \\ a = 0: & \{0\} \end{aligned}$$

$$\text{c) } a \neq 0: \left\{ -\frac{1}{\sqrt{|a|}}; \frac{1}{\sqrt{|a|}} \right\}$$

$a = 0$: Die Gleichung ist nicht definiert.

d) $a < 0$: $\{ \}$

$a = 0$: $\{0\}$

$a > 0$: $\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$

f) $a \neq 0$: $\left\{-\frac{1}{a^2}\sqrt{|a|}; \frac{1}{a^2}\sqrt{|a|}\right\}$

$a = 0$: $\{ \}$

h) Nur definiert für $a \geq 0$.

$a = 0$: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a = 1$: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$: $\{ \}$

e) $\{\operatorname{sgn} a \cdot \sqrt[3]{|a|}\}$

g) Nur definiert für $a \geq 0$.

$a = 0$: $\{ \}$

$a > 0$: $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right\}$

i) $a = 0$: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a \neq 0$: $\{\operatorname{sgn} a \cdot \sqrt[9]{|a|}\}$

99/13. a) $\{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\}$

b) $\{-1; 2\}$

c) $\{-1; \frac{1}{2}\}$

d) $\{-3; 0\}$

e) $\{-\sqrt[3]{7}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$

f) $\{-1; 1\}$

14. a) $]10; +\infty[$

b) $[2; +\infty[$

c) $] -\sqrt{3}; \sqrt{3}[$

d) $] -\infty; \frac{3}{4}[$

e) $\{ \}$

f) $] -\infty; -\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}] \cup \mathbb{R}^+$

g) $\mathbb{R} \setminus]-\frac{1}{3}\sqrt[4]{125}; \frac{1}{3}\sqrt[4]{125}[$

h) $] -\sqrt[5]{7}; \sqrt[5]{11}[$

i) $] -2\sqrt{5}; -1] \cup [1; 2\sqrt{5}[$

15. a) $[\frac{2}{3}\sqrt{6}; +\infty[$

b) $[0; 243[$

c) $[2; +\infty[$

d) $[1; 2\sqrt[4]{4}[$

e) $\mathbb{R}_0^+$

f) $\{ \}$

100/16.

b) 1) $x < 0$: $LS = x \cdot (-1) = -x$; $RS = -x$
 $x = 0$: $LS = 0$; $RS = 0$
 $x > 0$: $LS = x \cdot (+1) = x$; $RS = x$

2) $x < 0$: $LS = -x \cdot (-1) = x = RS$

$x = 0$: $LS = 0 \cdot 0 = 0 = RS$

$x > 0$: $LS = x \cdot (+1) = x = RS$

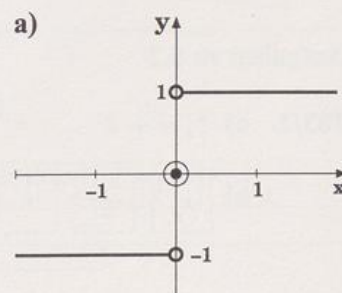
3) $x = 0 \vee y = 0$: $LS = 0 = RS$

$x > 0 \wedge y > 0$: $LS = (+1) \cdot (+1) = 1$; $RS = +1 = 1$

$x > 0 \wedge y < 0$: $LS = (+1) \cdot (-1) = -1$; $RS = -1$

$x < 0 \wedge y > 0$: $LS = (-1) \cdot (+1) = -1$; $RS = -1$

$x < 0 \wedge y < 0$: $LS = (-1) \cdot (-1) = +1$; $RS = +1$



4) $y \neq 0$

$$x = 0: \quad LS = 0 = RS$$

$$x > 0 \wedge y > 0: \quad LS = \frac{+1}{+1} = 1; \quad RS = +1 = 1$$

$$x > 0 \wedge y < 0: \quad LS = \frac{+1}{-1} = -1; \quad RS = -1$$

$$x < 0 \wedge y > 0: \quad LS = \frac{-1}{+1} = -1; \quad RS = -1$$

$$x < 0 \wedge y < 0: \quad LS = \frac{-1}{-1} = +1; \quad RS = +1$$

5) $x > 0: \quad LS = +1 = RS$

$$x = 0: \quad LS = \operatorname{sgn}(0^n) = \operatorname{sgn} 0 = 0; \quad RS = 0^n = 0$$

$x < 0: \quad n \text{ gerade:}$

$$LS = +1; \quad RS = (-1)^n = +1$$

$n \text{ ungerade:}$

$$LS = -1; \quad RS = (-1)^n = -1$$

$$6) \quad x > 0: \quad LS = \frac{1}{+1} = 1 = RS$$

$$x < 0: \quad LS = \frac{1}{-1} = -1 = RS$$

103/22

100/17. a) $f^{-1}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}$

b) $f^{-1}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\frac{1}{2z+1}}$

Dabei gilt: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ für $z \in \mathbb{N}_0$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $z \in \mathbb{Z}^-$

Aufgaben zu 5.2

103/1. a) $\xi_1 = -2$

b)

x_0	$\frac{1}{x}$	$\times$	1	0	+	9	=	$\sqrt{}$	+/-
-------	---------------	----------	---	---	---	---	---	----------------------	-----

$$x_{12} = -2,0009524 \dots$$

c) $f(x) := x^3 - 9x - 10$

x	-3	-2	-1,5	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-10	0	0,125	-2	-10	-18	-20	-10	18

Lösungen liegen in $] -1,5; -1[$ und in $] 3; 4[$.

1) $x^3 - 9x - 10 = 0$

$$x = \frac{10}{x^2 - 9} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{10}{x_n^2 - 9}$$

$$\boxed{x_0} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{9} \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{=} \boxed{\frac{1}{x}}$$

$$x_0 = -1,5$$

⋮

$$x_{10} = -1,449 \dots$$

Da $f(-1,449) < 0$ und $f(-1,450) > 0$, gilt $\xi_2 = -1,449 \dots$

(Näherung für $\xi_2 = 1 - \sqrt{6}$)

$$2) \quad x = \sqrt[3]{9x + 10} \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt[3]{9x_n + 10}$$

$$\boxed{x_0} \boxed{\times} \boxed{9} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{=} \boxed{\text{INV}} \boxed{y^x} \boxed{3} \boxed{=}$$

$$x_0 = 3$$

⋮

$$x_5 = 3,449 \dots$$

Da $f(3,449) < 0$ und $f(3,450) > 0$, gilt $\xi_3 = 3,449 \dots$

(Näherung für $\xi_3 = 1 + \sqrt{6}$)

$$103/2. \quad a) \quad \boxed{x_0} \boxed{\times} \boxed{(} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{6} \boxed{0} \boxed{=} \boxed{+/-} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{=} \boxed{\frac{1}{x}}$$

$$x_4 = 0,6443 \dots$$

Da $f(0,6443) > 0$ und $f(0,6444) < 0$, gilt $\xi_1 \approx 0,6443$.

$$b) \quad \boxed{x_0} \boxed{\text{M}} \boxed{\times} \boxed{6} \boxed{0} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{(} \boxed{\text{MR}} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{)} \boxed{=} \boxed{\sqrt{\quad}}$$

$$x_2 = 3,0998 \dots$$

Da $f(3,0998) < 0$ und $f(3,0999) > 0$, gilt $\xi_2 \approx 3,0998$.

$$c) \quad \boxed{x_0} \boxed{\text{M}} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{-} \boxed{\text{MR}} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{6} \boxed{=} \boxed{\times} \boxed{6} \boxed{=} \boxed{\text{INV}} \boxed{y^x} \boxed{4} \boxed{=}$$

$$x_5 = 3,0998 \dots$$

Da $f(3,0998) < 0$ und $f(3,0999) > 0$, gilt $\xi_2 \approx 3,0998$.

$$3. \quad \frac{1}{3}x^2\pi(3r-x) = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho, \quad 0 \leq x \leq 2r$$

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3\varrho = 0$$

$$r = 1 \text{ dm}, \quad \varrho = 0,75 \text{ kg/dm}^3 \quad \text{liefert} \quad x^3 - 3x^2 + 3 = 0$$

x	0	1	2
$x^3 - 3x^2 + 3$	3	1	-1

$$x^2(x-3) + 3 = 0 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{3-x_n}}$$

x_0	$-$	3	$=$	$\div$	3	$=$	$+/-$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{}$
-------	-----	-----	-----	--------	-----	-----	-------	---------------	----------------------

$\uparrow$

Startwert $x_0 = 1,5$

$x_{10} = 1,347316 \dots$

Da $LS(1,34725) > 0$ und $LS(1,34735) < 0$, gilt $x \approx 1,3473$.

Zur Fußnote:

$$\frac{\frac{1}{3}(2r-x)^2\pi(r+x)}{\frac{1}{3}x^2\pi(3r-x)} = \frac{m}{n}$$

$$3rx^2 - x^3 = 4 \frac{n}{m+n} r^3$$

Aufgaben zu 5.3

109/1. a) $\{-2; 1; 2\}; \quad (x+2)(x-1)(x-2)$

b) $\{-1; 2\}; \quad (x+1)^2(x-2)$

c) $\{-3; -1; 2\}; \quad (x+3)(x+1)^2(x-2)$

2. a) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 - 25x - 125 = 0$

c) $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12 = 0$

e) $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x = 0$

3. a) 1fach

b) 2fach

c) 3fach

4. $(\sqrt{2})^3 - 3\sqrt{2} - a = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$

I $-(\sqrt{2} + x_2 + x_3) = 0$

II $-\sqrt{2}x_2x_3 = \sqrt{2}$

x_2 und x_3 sind die Lösungen von $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$:

$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1), \quad x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

5. $x_2 = -x_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{I} & -(x_1 + x_2 + x_3) = a \Leftrightarrow x_3 = -a \\ \text{II} & -(-x_1x_2x_3) = 160 \Leftrightarrow x_1^2x_3 = 160 \end{cases}$

Ferner: III $x_3 = -a$ ist Lösung $\Leftrightarrow -a^3 + a^3 + 16a + 160 = 0$

III' $a = -10$

I' $x_3 = -10$

II' $x_1^2 = 16 \Leftrightarrow x_1 = -4 \vee x_1 = 4$

Somit $a = -10$ und $L = \{-10; -4; 4\}$

$$109/6. (x - x_1)^3(x - x_4) = x^4 - x^3(3x_1 + x_4) + 3x^2(x_1x_4 + x_1^2) - x(3x_1^2x_4 + x_1^3) + x_1^3x_4$$

Koeffizientenvergleich:

$$\text{I} \quad 3x_1 + x_4 = 5$$

$$\text{II} \quad 3(x_1x_4 + x_1^2) = 6$$

$$\text{III} \quad -(3x_1^2x_4 + x_1^3) = a$$

$$\text{IV} \quad x_1^3x_4 = b$$

$$1. \text{ Lösung: } a = -\frac{11}{4}, \quad b = \frac{7}{16}; \quad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{7}{2}$$

$$2. \text{ Lösung: } a = 4, \quad b = -8; \quad x_1 = x_2 = x_3 = 2, \quad x_4 = -1$$

$$7. \text{ a) } a = -2; \quad b = -1; \quad c = 2$$

$$\text{b) } a = -4; \quad b = 5; \quad c = -2$$

$$\text{c) } x_1 = -x_2 \wedge x_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad i \in \{1; 2\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -x_3 \\ b = -x_1^2 \\ c = -x_1^2x_3 \end{array} \right\} \Rightarrow c = ab$$

b muß eine negative ganze Quadratzahl sein, also $b = -k^2, k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $c = -ak^2$ und a beliebig aus $\mathbb{R}$.

Die Gleichung lautet somit

$$x^3 + ax^2 - k^2x - ak^2 = 0$$

$$x^2(x + a) - k^2(x + a) = 0$$

$$(x^2 - k^2)(x + a) = 0$$

$$L = \{-k; k; -a\}$$

$$\text{Beispiel: } x^3 + \frac{2}{7}x^2 - 9x - \frac{18}{7} = 0$$

$$110/8. \text{ 1) a) } y := 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y$$

$$2\left(\frac{y}{2}\right)^3 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 18 \cdot \frac{y}{2} + 9 = 0$$

$$y^3 - y^2 - 36y + 36 = 0$$

$-6, 1, 6$ sind Lösungen, wie man durch Einsetzen nachweist.

$$\text{b) } y := \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2y$$

$$16y^3 - 4y^2 - 36y + 9 = 0$$

Lösungen sind $-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$.

$$\text{c) } y := x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$$

$$2(y - 1)^3 - (y - 1)^2 - 18(y - 1) + 9 = 0$$

$$2y^3 - 7y^2 - 10y + 24 = 0$$

Lösungen sind $-2, \frac{3}{2}, 4$.

$$2) \text{ a) } y := 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y$$

$$y^4 - 2y^3 + 8y^2 - 6y + 2 = 0$$

$$\text{b) } y := \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2y$$

$$128y^4 - 64y^3 + 64y^2 - 12y + 1 = 0$$

$$\text{c) } y := x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$$

$$8y^4 - 40y^3 + 88y^2 - 94y + 39 = 0$$

$$110/9. \text{ a) } y := x - 3 \Leftrightarrow x = y + 3$$

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$$

$$\text{b) } y := x + 3 \Leftrightarrow x = y - 3$$

$$y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$$

$$10. y := x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$$

$$9y^3 - 27y^2 + 26y - 8 = 0$$

$\frac{p}{q}$ ist Lösung, wenn p Teiler von -8 und q Teiler von 9 ist.

Das ergibt folgende Möglichkeiten:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

$$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}$$

$$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9}, \pm \frac{8}{9}$$

$$y_1 = 1: 9 - 27 + 26 - 8 = 0. \text{ Also ist } y_1 = 1 \text{ Lösung.}$$

Die Polynomdivision liefert

$$9y^3 - 27y^2 + 26y - 8 = (y - 1) \cdot (9y^2 - 18y + 8)$$

$$9y^2 - 18y + 8 = 0 \text{ liefert } y_2 = \frac{2}{3}, y_3 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Damit ist } x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}, x_2 = \frac{2}{9}\sqrt{2}, x_3 = \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

11. a) Nach Satz 108.1 muß q Teiler von $a_3 = 1$, p Teiler von -27 sein.

Also ist $\frac{p}{q}$ ganz.

$$\text{b) } \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$$

c) Durch Probieren: $x_1 = -1$ ist Lösung.

Nach Satz 106.2 ergibt sich

$$-(-1 + x_2 + x_3) = 7 \Leftrightarrow x_2 + x_3 = -6$$

$$-(-1 \cdot x_2 x_3) = -27 \Leftrightarrow x_2 x_3 = -27$$

d.h., x_2 und x_3 sind die Lösungen von

$$x^2 + 6x - 27 = 0, \text{ also } x_2 = -9, x_3 = 3.$$

Somit ist $L = \{-9, -1, 3\}$.

$$12. x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, a_i \text{ ganz.}$$

Ist $\frac{p}{q}$ Lösung, wobei die ganzen Zahlen p und q teilerfremd sind, so muß nach Satz

108.1 q Teiler von $a_n = 1$ sein; also gilt: $q = -1 \vee q = 1$. Somit ist $\frac{p}{q}$ ganz.

110/13. a) Mögliche Lösungen: ± 1

$$x_1 = -1$$

$$(x^3 - 2x - 1) : (x + 1) = x^2 - x - 1$$

$$L = \{-1; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}$$

$$(x + 1)(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})$$

b) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

$$x_1 = -3$$

$$(x^3 + 2x^2 - 6x - 9) : (x + 3) = x^2 - x - 3$$

$$L = \{-3; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13}); \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})\}$$

$$(x + 3)(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13})$$

c) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$

$$x_1 = 2$$

$$(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) : (x - 2) = x^2 - 7x + 12$$

$$L = \{2, 3, 4\}$$

$$(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

d) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$x_1 = 1$$

$$(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

Weitere mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$x_2 = -1$$

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6$$

$$L = \{-3, -1, 1, 2\}$$

$$(x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

14. a) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

$$x_1 = -1$$

$$(4x^5 - 9x^3 - 4x^2 + 2x + 1) : (x + 1) = 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1$$

Weitere mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$(4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1) : (x - \frac{1}{2}) = 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2$$

Weitere mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$, wobei ± 2 ausscheidet.

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$(4x^3 - 2x^2 - 6x - 2) : (x + \frac{1}{2}) = 4x^2 - 4x - 1$$

$$L = \{-1; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}$$

$$4(x + 1)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = \\ = (x + 1)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(2x - 1 + \sqrt{5})(2x - 1 - \sqrt{5})$$

b) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

$$x_1 = -1$$

$$(2x^3 - x + 1) : (x + 1) = 2x^2 - 2x + 1$$

Diskriminante = $4 - 8 < 0$; es existieren keine weiteren reellen Lösungen.

$$L = \{-1\}$$

$$(x+1)(2x^2 - 2x + 1)$$

c) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

$$(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (x - \frac{3}{2}) = 2x^2 + 2$$

Es existieren keine weiteren reellen Lösungen.

$$L = \{\frac{3}{2}\}$$

$$(x - \frac{3}{2})(2x^2 + 2) = (2x - 3)(x^2 + 1)$$

d) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{1}{27}, \pm \frac{2}{27}$

$$x_1 = 1$$

$$(27x^4 - 27x^3 - 9x^2 + 11x - 2) : (x - 1) = 27x^3 - 9x + 2$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$(27x^3 - 9x + 2) : (x - \frac{1}{3}) = 27x^2 + 9x - 6$$

$$x_3 = -\frac{2}{3}; \quad x_4 = \frac{1}{3}$$

$$L = \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\}$$

$$27(x - \frac{1}{3})^2(x + \frac{2}{3})(x - 1) = (3x - 1)^2(3x + 2)(x - 1)$$

Lösungen von 111/15–19 ab der 4. Auflage siehe Seite 110

111/15. a) + - - + + - 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösungen

2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$$x_1 = 1$$

$$(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12) : (x - 1) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$$

$$x_2 = -1$$

$$(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x + 1) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

$$x_3 = 2$$

$$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6$$

$$x_4 = -2, \quad x_5 = 3$$

$$L = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$$

b) + + - - + 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$x_1 = 1$$

$$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$x_2 = 1$$

$$(x^3 + 3x^2 - 4) : (x - 1) = x^2 + 4x + 4$$

$$x_3 = x_4 = -2$$

$$L = \{-2; 1\}$$

c) + - + + - 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

$$x_1 = 1$$

$$(x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9) : (x - 1) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$$

$$x_2 = -1$$

$$(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) : (x + 1) = x^2 - 6x + 9$$

$$x_3 = x_4 = 3$$

$$L = \{-1; 1; 3\}$$

d) + • • +

+ + + + kein Wechsel: 0 positive Lösungen

3 Wiederholungen: 3 oder 1 negative Lösung

+ - + + 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Also: 1 negative Lösung, keine positive Lösung

$$L = \{-1\}$$

e) + • - • + • -

+ - - - + - - 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

3 Wiederholungen: 3 oder 1 negative Lösung

Auch die anderen Besetzungen der Leerstellen ergeben keine andere Aussage.

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$

$$x_1 = 1$$

$$(x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36) : (x - 1) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$$

$$x_2 = -1$$

$$(x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36) : (x + 1) = x^4 - 13x^2 + 36$$

Biquadratische Gleichung, also

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x_3 = -2, x_4 = 2, x_5 = -3, x_6 = 3$$

$$\text{Somit } L = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}.$$

f) + • • • - +

+ + + + - + 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

3 Wiederholungen: 3 oder 1 negative Lösung

+ - + - - + 4 Wechsel: 4, 2 oder 0 positive Lösungen

1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Somit: 1 negative Lösung, 2 oder 0 positive Lösungen

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22$

$$x_1 = -2$$

$$(x^5 - 5x + 22) : (x + 2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 11$$

Die möglichen positiven ganzzahligen Lösungen 1 und 11 sind keine Lösungen.

Es gilt sogar: Es gibt überhaupt keine positive Lösung.

Beweis:

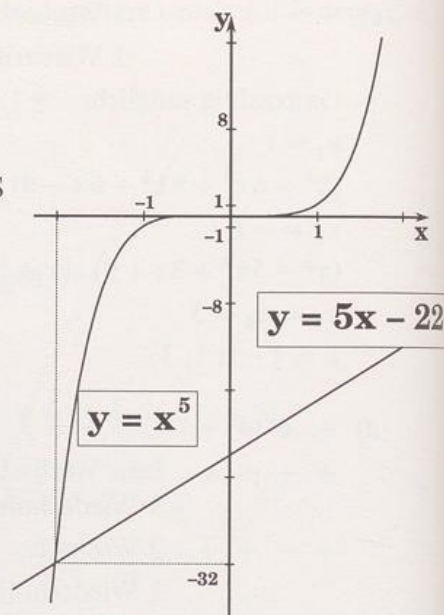
$$x^5 = 5x - 22 \Leftrightarrow x^5 = 5(x - 4,4)$$

$$1) 0 < x \leq 4,4: \text{LS} > 0, \text{RS} \leq 0$$

2) Für $x > 4,4$ gilt:

$$\text{LS} = x^5 = x^4 \cdot x > 5x > 5x - 22 = \text{RS}$$

Anschaulich: Der Graph $y = x^5$ liegt für $x > 0$ immer über dem Graphen $y = 5x - 22$.



111/16. a) + + + - 1 Wechsel: 1 positive Lösung
2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Möglich: $\pm \frac{1}{3}, \pm 1$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$(3x^3 + 5x^2 + 7x - 3) : (x - \frac{1}{3}) = 3x^2 + 6x + 9$$

$$\text{Diskriminante} = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 9 < 0$$

$$L = \{\frac{1}{3}\}$$

b) + + - - 1 Wechsel: 1 positive Lösung
2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$

$$x_1 = 2$$

$$(2x^3 + x^2 - 8x - 4) : (x - 2) = 2x^2 + 5x + 2$$

$$L = \{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$$

c) + - - + 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen
1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9}$

$$x_1 = 1$$

$$(9x^3 - 9x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = 9x^2 - 4$$

$$L = \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$$

d) + - + - + 4 Wechsel: 4, 2 oder 0 positive Lösungen
0 Wiederholungen: 0 negative Lösungen

Möglich: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$(64x^4 - 128x^3 - 84x^2 - 20x + 1) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2$$

+ - + - 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung
 0 Wiederholung: keine negative Lösung

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$(64x^3 - 96x^2 + 36x - 2) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^2 - 64x + 4$$

$$L = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\}$$

111/17. a) + ● ● ● + +

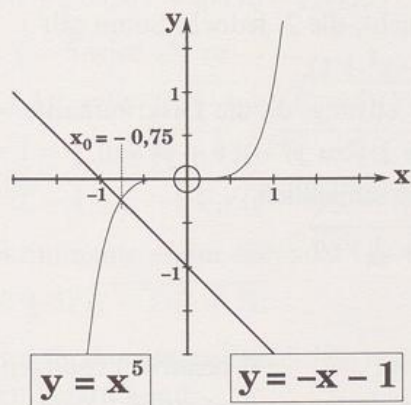
+ + + + + + kein Wechsel: keine positive Lösung

+ - + - + + 1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Rationale Lösungen können nur -1 oder 1 sein.

Beide Werte erfüllen die Gleichung nicht.

b) 1)



2) $x_0 = -0,75$

$$x_1 = -0,7578583 \dots$$

$$x_{13} = -0,7548866 \dots$$

$$x_2 = -0,7530329 \dots$$

$$x_{14} = -0,7548722 \dots$$

$$x_3 = -0,7560105 \dots$$

$$x_{15} = -0,7548810 \dots$$

$$x_4 = -0,7541786 \dots$$

$$x_{16} = -0,7548756 \dots$$

$$x_5 = -0,7553077 \dots$$

$$x_{17} = -0,7548789 \dots$$

$$x_6 = -0,7546126 \dots$$

$$x_{18} = -0,7548769 \dots$$

$$x_7 = -0,7550409 \dots$$

$$x_{19} = -0,7548782 \dots$$

$$x_8 = -0,7547771 \dots$$

$$x_{20} = -0,7548774 \dots$$

$$x_9 = -0,7549396 \dots$$

$$x_{21} = -0,7548779 \dots$$

$$x_{10} = -0,7548395 \dots$$

$$x_{22} = -0,7548776 \dots$$

$$x_{11} = -0,7549012 \dots$$

$$x_{23} = -0,7548777 \dots$$

$$x_{12} = -0,7548632 \dots$$

$$x_{24} = -0,7548776 \dots$$

Da $f(-0,7548785) < 0$ und $f(-0,7548775) > 0$, gilt als Näherungswert
 $x = -0,754878$.

3) $x_0 = -0,75$

$$x_1 = -0,7626953 \dots$$

$$x_4 = -0,7200456 \dots$$

$$x_2 = -0,7419194 \dots$$

$$x_5 = -0,8064469 \dots$$

$$x_3 = -0,7752066 \dots$$

Die Folge divergiert.

ab 4. Auflage: siehe Seite 110

$$\begin{aligned} \text{c) } x^5 + x + 1 &= (x^2 + \alpha x + 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + 1) = \\ &= x^5 + (A + \alpha)x^4 + (\alpha A + B + 1)x^3 + (A + \alpha B + 1)x^2 + (\alpha + B)x + 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\text{I} \quad A + \alpha = 0$$

$$\text{II} \quad \alpha A + B + 1 = 0$$

$$\text{III} \quad A + \alpha B + 1 = 0$$

$$\text{IV} \quad \alpha + B = 1$$

Aus I, II und IV erhält man

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \vee \alpha = 1.$$

Damit ergibt sich $(A = 2 \wedge B = 3) \vee (A = -1 \wedge B = 0)$.

Die 1. Möglichkeit erfüllt III nicht, die 2. jedoch. Somit gilt

$$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

$x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung, da die Diskriminante $= -3$ ist.

$$x^3 - x^2 + 1 = 0 \text{ wird mit } x = y + \frac{1}{3} \text{ zu } y^3 - \frac{1}{3}y + \frac{25}{27} = 0.$$

Die einzige reelle Lösung liefert schließlich

$$x = \frac{1}{3} - \sqrt[3]{\frac{25}{54} - \frac{1}{18}\sqrt{69}} - \sqrt[3]{\frac{25}{54} + \frac{1}{18}\sqrt{69}}.$$

$$111/18. \quad + \bullet + \bullet + \bullet +$$

$++++++$ kein Wechsel: 0 positive Lösungen

$+ - + - + - +$ keine Wiederholung: 0 negative Lösungen

Leichter sieht man das so ein:

$$2x^6 + 10x^4 + 7x^2 = -1$$

$$LS \geq 0, \quad RS < 0, \quad \text{also} \quad L = \{ \}.$$

19. Eine algebraische Gleichung vom Grad $2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, hat $2k$ Koeffizienten. Es gibt also $2k - 1$ Stellen, an denen eine Vorzeichenwiederholung oder ein Vorzeichenwechsel stattfinden können. Da die Anzahl der Wechsel und die Anzahl der Wiederholungen den Grad der Gleichung ergeben, ist eine dieser Anzahlen immer ungerade. Somit gibt es mindestens eine positive oder mindestens eine negative Lösung.

Aufgaben zu 5.4

114/Fußnote***

$$y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$$

Die linke Seite wird ein Quadrat durch Addition von $6y^2$:

$$y^4 + 12y^2 + 36 = 6y^2 + 60y$$

$$(y^2 + 6)^2 = 6y^2 + 60y$$

Das linke Binom $y^2 + 6$ wird durch Addition von η zu einem Trinom $y^2 + 6 + \eta$. Dabei soll η so gewählt werden, daß die rechte Seite auch in ein Quadrat verwandelt werden kann.

$$(y^2 + 6 + \eta)^2 = 6y^2 + 60y + 2y^2\eta + 12\eta + \eta^2$$

$$(y^2 + 6 + \eta)^2 = (2\eta + 6)y^2 + 60y + (12\eta + \eta^2) \quad (*)$$

Damit die rechte Seite als Quadrat $\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y + \beta^2$ geschrieben werden kann, muß für η gelten:

$$4\alpha^2\beta^2 = 60^2$$

$$4(2\eta + 6)(12\eta + \eta^2) = 3600$$

$$\eta^3 + 15\eta^2 + 36\eta = 450$$

Durch die Substitution $\zeta := \eta + 5$ verwandelt man diese kubische »Resolvente« in $\zeta^3 - 39\zeta - 380 = 0$.

Die Formel von CARDANO liefert dann

$$\zeta = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}}. \quad (**)$$

Mit $\eta = \zeta - 5$ wird (*) zu

$$(y^2 + \zeta + 1)^2 = (y\sqrt{2\zeta - 4} + \sqrt{(\zeta - 5)(\zeta + 7)})^2$$

$$y^2 + \zeta + 1 = \pm (y\sqrt{2\zeta - 4} + \sqrt{(\zeta - 5)(\zeta + 7)})$$

$$y^2 \mp y\sqrt{2\zeta - 4} + \zeta + 1 \mp \sqrt{(\zeta - 5)(\zeta + 7)} = 0$$

Die Diskriminante ergibt sich zu

$$-2\zeta - 8 \pm 4\sqrt{(\zeta - 5)(\zeta + 7)}.$$

Diese wird für das untere Vorzeichen negativ, so daß nur das obere Vorzeichen reelle Lösungen liefern kann:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{2\zeta - 4} \pm \sqrt{4\sqrt{(\zeta - 5)(\zeta + 7)} - 2\zeta - 8} \right\}$$

Setzt man hier den Wert für ζ aus (**) ein, so hat man die beiden Lösungen exakt durch Wurzeln ausgedrückt.

Als Näherungswerte liefert der Taschenrechner

$$\zeta = 9,009791228$$

$$y_1 = 3,099874424$$

$$y_2 = 0,644398864.$$

Dazu gehören die beiden anderen Zahlen

$$x_1 \approx 1,935562278 \quad \text{und} \quad z_1 \approx 4,964563299 \quad \text{bzw.}$$

$$x_2 \approx 9,311003374 \quad \text{und} \quad z_2 \approx 0,044597761.$$

120/1. a)	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$n^3 + n^2$	2	12	36	80	150	252	392	576	810

b) 1) I $z = 12x$

II $xy + xyz = 1\frac{1}{6}$

III $y = \frac{2}{3}$

$$z^3 + z^2 = 252$$

$$z = 6 \text{ [Ellen]}$$

$$2) (z^3 + z^2 - 252) : (z - 6) = z^2 + 7z + 42$$

$$\text{Diskriminante} = 49 - 4 \cdot 42 < 0$$

Keine weitere reelle Lösung

$$3) x = \frac{1}{2} [\text{GAR}]; \quad y = \frac{1}{3} [\text{GAR}]$$

$$\text{c) I} \quad 12x + 1 = z$$

$$\text{II} \quad x^2 z = 1\frac{3}{4}$$

$$48x^3 + 4x^2 = 7 \quad || \cdot 36$$

$$1728x^3 + 144x^2 = 252$$

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252$$

Aus der Tabelle ergibt sich

$$12x = 6, \quad \text{also} \quad x = \frac{1}{2} [\text{GAR}] \quad \text{und} \quad z = 7 [\text{Ellen}]$$

$$121/2. \quad \text{I} \quad 3uv = -p$$

$$\text{II} \quad u^3 + v^3 = -q$$

$$\text{I}' \quad 3uv = -p$$

$$\text{II}' \quad u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = -q, \quad \text{falls } u \neq 0$$

$$\text{NR für II':} \quad u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} =: R_1, \quad \text{falls } D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$$

$$\text{Aus II:} \quad v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} =: R_2.$$

Bei der Wahl der unteren Vorzeichen vertauschen u und v ihre Rolle. Wir können uns also auf das obere Vorzeichen beschränken, da die Gleichungen I und II in u und v symmetrisch sind.

Wir erhalten

$$u = \text{sgn}(R_1) \cdot \sqrt[3]{|R_1|}$$

$$v = \text{sgn}(R_2) \cdot \sqrt[3]{|R_2|}.$$

Einsetzen in I liefert

$$\text{LS} = 3uv =$$

$$= 3 \text{sgn}(R_1) \cdot \text{sgn}(R_2) \cdot \sqrt[3]{|R_1|} \sqrt[3]{|R_2|} =$$

$$= 3 \text{sgn}(R_1 \cdot R_2) \cdot \sqrt[3]{|R_1| \cdot |R_2|} =$$

$$= 3 \text{sgn} \left(\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{D} \right) \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{D} \right) \right) \cdot \sqrt[3]{|R_1 R_2|} =$$

$$= 3 \text{sgn} \left(\left(-\frac{q}{2} \right)^2 - \left(\frac{q}{2} \right)^2 - \left(\frac{p}{3} \right)^3 \right) \cdot \sqrt[3]{\left| \left(-\frac{q}{2} \right)^2 - \left(\frac{q}{2} \right)^2 - \left(\frac{p}{3} \right)^3 \right|} =$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \operatorname{sgn} \left(- \left(\frac{p}{3} \right)^3 \right) \cdot \sqrt[3]{ \left| - \left(\frac{p}{3} \right)^3 \right| } = \\
&= - 3 \operatorname{sgn}(p) \cdot \sqrt[3]{ \left| \frac{p}{3} \right|^3 } = \\
&= - 3 \operatorname{sgn}(p) \cdot \left| \frac{p}{3} \right| = \\
&= - 3 \operatorname{sgn}(p) \cdot \frac{1}{3} |p| = \\
&= - \operatorname{sgn}(p) \cdot |p| = \\
&= -p = \\
&= \text{RS.}
\end{aligned}$$

Also erfüllen u und v das System $I \wedge II$.

Sonderfall: $u = 0$

Nur möglich, wenn $p = 0$. Die Gleichung hat dann die Form $x^3 + q = 0$, ist also eine reine kubische Gleichung mit der Lösung $\operatorname{sgn}(-q) \cdot \sqrt[3]{|-q|}$.

121/3. a) + + + - 1 Vorzeichenwechsel, also eine positive Lösung; $x = 2$

b) $D = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 = (-10)^2 + 2^3 = 108$

$$R_1 = 10 + \sqrt[3]{108}; \quad \operatorname{sgn} R_1 = +1$$

$$R_2 = 10 - \sqrt[3]{108}; \quad \operatorname{sgn} R_2 = -1$$

$$\begin{aligned}
x &= \operatorname{sgn} R_1 \sqrt[3]{|R_1|} + \operatorname{sgn} R_2 \sqrt[3]{|R_2|} = \\
&= \sqrt[3]{\sqrt[3]{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{108} - 10} = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} \approx \\
&\approx 2,732050810 - 0,732050808 = 2,000000002
\end{aligned}$$

4. 1) $x^3 + 3x - 10 = 0$

a) Teiler von -10 sind $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$.

x	1	-1	2	-2	5	-5	10	-10
LS	-6	-14	4	-24	130	-150	1020	-1040

Keiner der Teiler ist Lösung.

b) $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{26} - 5}$

c) $x \approx 1,69888$

$$\text{LS} = -6,4 \cdot 10^{-5}$$

2) $x^3 + x - 11 = 0$

a) Teiler von -11 sind ± 1 und ± 11 .

x	1	-1	11	-11
LS	-9	-13	1331	-1353

Keiner der Teiler ist Lösung.

$$\text{b) } x = \sqrt[3]{\frac{1}{18} \sqrt{9813} + \frac{11}{2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{18} \sqrt{9813} - \frac{11}{2}}$$

$$\text{c) } x \approx 2,07432$$

$$\text{LS} = -2,9 \cdot 10^{-4}$$

$$3) x^3 - 12x - 20 = 0$$

a) Teiler von -20 sind $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$.

x	1	-1	2	-2	4	-4	5	-5	10	-10	20	-20
LS	-31	-9	-36	-4	-4	-36	45	-8	860	-900	7740	-7780

Keiner der Teiler ist Lösung.

$$\text{b) } x = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

$$\text{c) } x \approx 4,10724$$

$$\text{LS} = -1,2 \cdot 10^{-4}$$

$$121/5. \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-10}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{3}\right)^3 = 25 - 27 < 0$$

$x_1 = -2$ ist Lösung.

$$(x^3 - 9x - 10) : (x + 2) = x^2 - 2x - 5$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{6}; \quad x_3 = 1 + \sqrt{6}$$

$$6. \text{ a) } 6; \quad x^2 + 6x + 4 = 0; \quad -3 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{b) } -3; \quad x^2 - 3x - 7 = 0; \quad \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{37})$$

$$\text{c) } -6; \quad x^2 - 6x + 2 = 0; \quad 3 \pm \sqrt{7}$$

$$\text{d) } 1; \quad x^2 + x - 18 = 0; \quad \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{73})$$

$$\text{e) } 4; \quad x^2 + 4x - 2 = 0; \quad -2 \pm \sqrt{6}$$

$$7. \text{ a) } x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + y\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$\text{b) } y - 2 := x$$

$$y^3 + 8y - 124 = 0$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{10}{9} \sqrt{3129} + 62} - \sqrt[3]{\frac{10}{9} \sqrt{3129} - 62}$$

$$y \approx 4,45408$$

$$x \approx 2,45408 \text{ ergibt } \text{LS} - 100 = -3,6 \cdot 10^{-3}.$$

121/8. a) $y - \frac{1}{3} := z$

$$y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{6802}{27} = 0$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{3401 + \sqrt{11566800}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{3401 - \sqrt{11566800}} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{3401 + 180\sqrt{357}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{3401 - 180\sqrt{357}} \approx \\ &\approx \frac{1}{3} \cdot 18,999998 \dots, \end{aligned}$$

was den Versuch $y = \frac{19}{3}$ nahelegt. Die Probe zeigt die Richtigkeit dieses Ansatzes. Also ist $z = 6$.

b) $x^3 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{48} = 0$; $x =: y - \frac{1}{36}$

$$y^3 - \frac{1}{432}y - \frac{3401}{23328} = 0$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{36} \sqrt[3]{3401 + \sqrt{11566800}} + \frac{1}{36} \sqrt[3]{3401 - \sqrt{11566800}} = \\ &= \frac{1}{36} \sqrt[3]{3401 + 180\sqrt{357}} + \frac{1}{36} \sqrt[3]{3401 - 180\sqrt{357}} \approx \\ &\approx \frac{1}{36} \cdot 18,999998 \dots \end{aligned}$$

Der Ansatz $y = \frac{19}{36}$ erweist sich als richtig, also $x = \frac{1}{2}$.

9. a) 1) $x = 1$: $LS = 13 \neq RS$.

Da $LS > 10x$ für $x \in \mathbb{R}^+$, gilt für

$$x \geq 2: LS > 20 = RS.$$

2) Angenommen, $\frac{m}{n}$ sei Lösung. Dann muß

$$m^3 + 2m^2n + 10mn^2 = 20n^3$$

sein, woraus folgt, daß n ein Teiler von m sein muß.

3) LS irrational, RS rational.

b) Da $LS(1) = 13 < 20$ und $LS(2) = 36 > 20$, liegt eine Nullstelle in $]1; 2[$.

Aus $\frac{y+7}{x-1} = \frac{16+7}{2-1} \Leftrightarrow y = 23x - 30$ gewinnt man für $y = 0$ den Näherungswert

$$x_0 = \frac{30}{23} \approx 1,304378. \text{ Das Iterationsverfahren liefert}$$

$$x_{18} = 1,368 \dots \text{ und } x_{19} = 1,369 \dots$$

$$\text{Da } LS(x_{18}) < 20 \text{ und } LS(x_{19}) > 20, \text{ gilt}$$

$$x = 1,368 \dots$$

$$\text{NB: } x_{72} = 1,368808107 \dots$$

c) $\xi = 1 \frac{17\,207\,111\,080}{46\,656\,000\,000} =$

$$= 1,368\,808\,107\,853\,223\,593\,964\,334\,703\,840\,877\,791\,489\,476\,680\,371\,742\,112$$

$$\frac{482\,281\,001\,370\,507\,544\,581\,433\,470\,384\,087\,791\,489}{}$$

d) $+++-$

$$1 \text{ Vorzeichenwechsel} \Rightarrow 1 \text{ positive Lösung}$$

$$2 \text{ Vorzeichenwiederholungen} \Rightarrow 2 \text{ oder } 0 \text{ negative Lösungen}$$

e) $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$; $x = y - \frac{2}{3}$ ergibt

$$(y - \frac{2}{3})^3 + 2(y - \frac{2}{3})^2 + 10(y - \frac{2}{3}) - 20 = 0$$

$$y^3 + \frac{26}{3}y - \frac{704}{27} = 0$$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{704}{27 \cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{26}{3 \cdot 3}\right)^3 = \frac{5240}{27} > 0$$

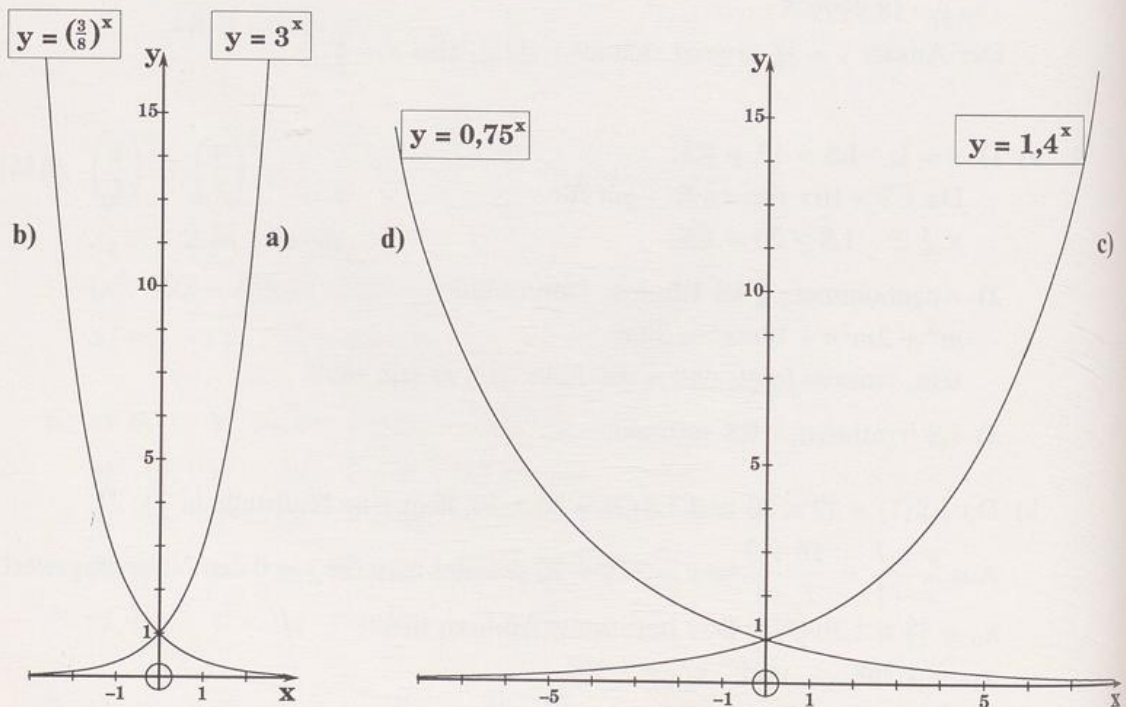
Der casus irreducibilis liegt nicht vor.

Für die einzige reelle Lösung ergibt sich:

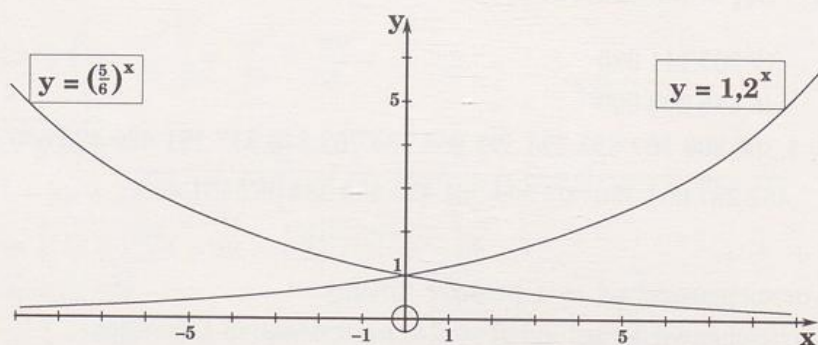
$$x = \frac{1}{3} \left\{ \sqrt[3]{6\sqrt{3930} + 352} - \sqrt[3]{6\sqrt{3930} - 352} - 2 \right\} \approx 1,3688081 \dots$$

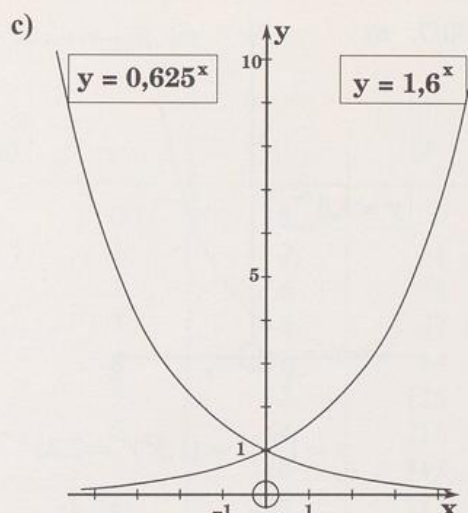
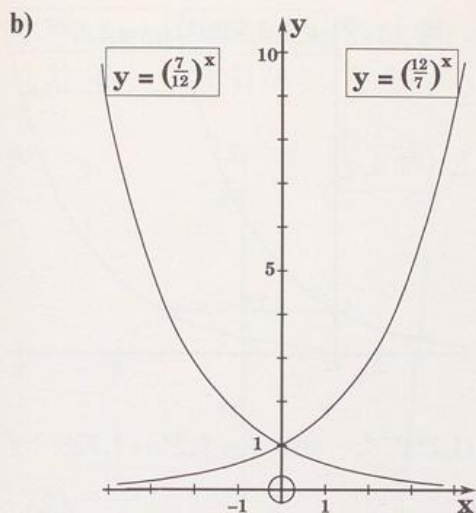
Aufgaben zu 6.1

129/1.



130/2. a)

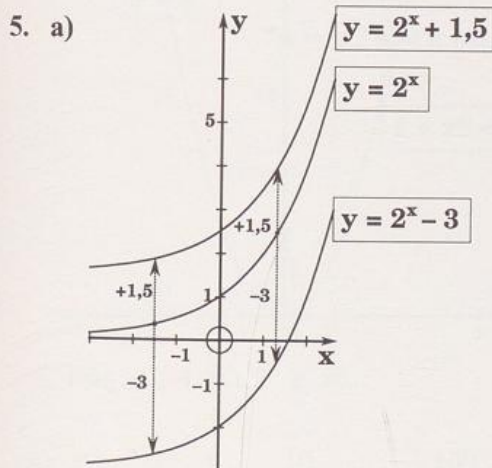




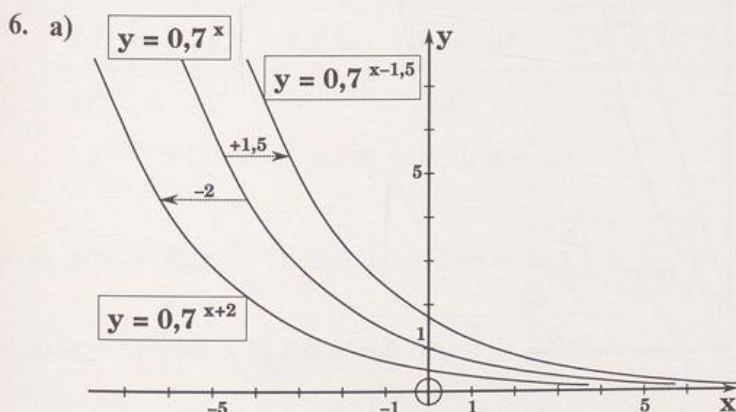
130/3. Es ist die Funktion $x \mapsto a^x$ mit $a =$

- a) 3 b) $\sqrt{7}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 4 e) 2 f) 1 g) 4 h) 3

4. a) nein b) ja, jede Exp.-Fkt. c) nein d) ja, $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x$ e) nein

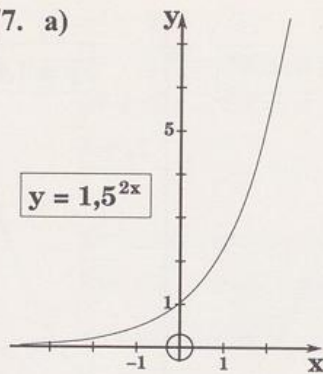


- b) Verschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

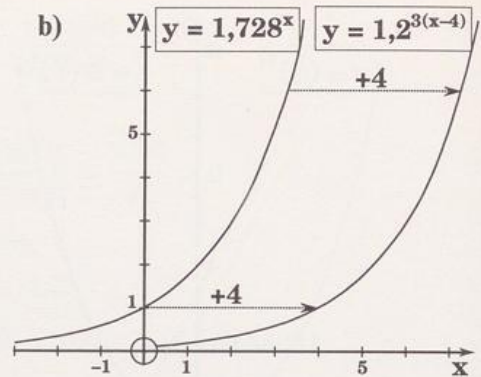


- b) Verschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$

130/7. a)



b)



$$y = 1,5^{2x} = (1,5^2)^x = 2,25^x \quad y = (1,2^3)^{x-4}; \quad \text{also } a = 1,2^3 = 1,728; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $y = 1,2^{3x-4} = 1,2^{3(x-\frac{4}{3})} = (1,2^3)^{x-\frac{4}{3}}; \quad \text{also } a = 1,2^3 = 1,728; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

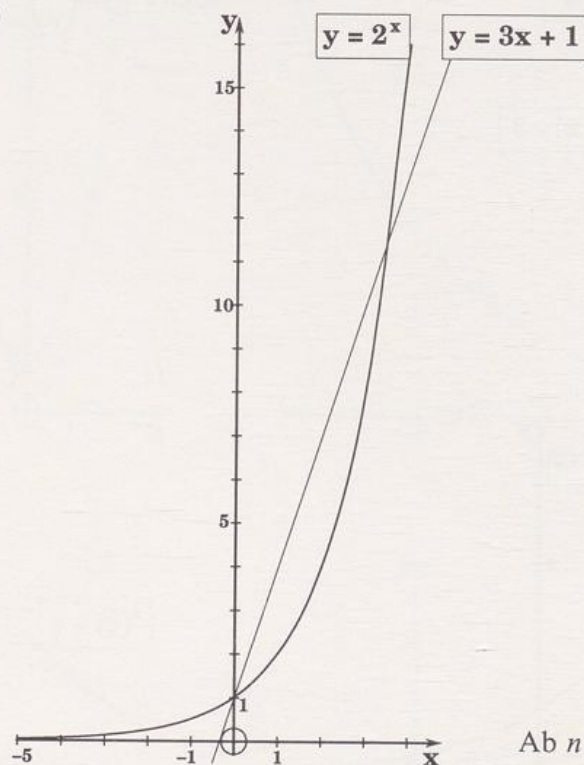
d) $y = u^{vx+w} = u^{v(x+\frac{w}{v})} = (u^v)^{x+\frac{w}{v}}; \quad \text{also } a = u^v, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{w}{v} \\ 0 \end{pmatrix}$

8. a) Übereinstimmende Wertetabellen.

Wegen $2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = 2^x \cdot \frac{1}{4} = 0,25 \cdot 2^x$ sind die beiden Funktionen identisch.

b) $y = u^{vx+w} = u^{vx} \cdot u^w = (u^v)^x \cdot (u^w); \quad \text{also } a = u^v, \quad c = u^w$

9. a)



Ab $n = 4$ gilt $2^n > 3n + 1$.

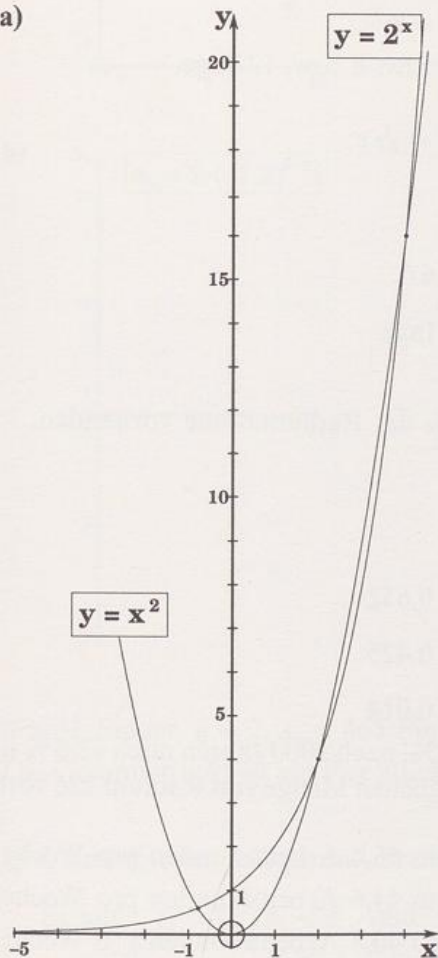
b) Die kleinste natürliche Zahl, für die $2^x > mx + 1$ gilt, ist

- 1) 6 2) 14 3) 22

c) Die kleinste natürliche Zahl, für die $a^x > mx + 1$ gilt, ist

- 1) 97 2) 1174 3) 1424

131/10. a)



Für $x \geq 4$ gilt $2^x \geq x^2$.

b)

x	2^x	x^3
0	1	0
1	2	1
2	4	8
3	8	27
4	16	64
5	32	125
6	64	216
7	128	343
8	256	512
9	512	729
10	1024	1000
11	2048	1331

$2^n > n^3$, $n \in \mathbb{N}$, gilt für
 $n = 1$ oder $n \geq 10$.

c) x	0	1	10	100	1000	600	700
$1,1^x$	1	1,1	2,5...	$1,3... \cdot 10^4$	$2,4... \cdot 10^{41}$	$6,8... \cdot 10^{24}$	$9,4... \cdot 10^{28}$
x^{10}	0	1	10^{10}	10^{20}	10^{30}	$6,0... \cdot 10^{27}$	$2,8... \cdot 10^{28}$

$1,1^{100n} > (100n)^{10}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt ab $n = 7$.

11. a) Zins = $K_0 \cdot \frac{p}{100}$; Kapital + Zins = $K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$; also $q = 1 + \frac{p}{100}$.

b) $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

- 1) 1216,65 DM 2) 1480,24 DM 3) 1469,33 DM

c) 1) um 61 %, 2) um 63 %, 3) um 159 % (jeweils auf ganze Prozente gerundet)

d) Es dauert ungefähr 26 Jahre. Verdoppelung nach etwa 13 Jahren.

e) Es dauert ungefähr 18 Jahre. Verdoppelung nach etwa 9 Jahren.

132/12. $y = 2 = 2^1$ für $x = 4$; $y = 4 = 2^2$ für $x = 8$;
 $y = 8 = 2^3$ für $x = 12$; d. h., es dauert 4 bzw. 8 bzw. 12 Tage.

13. $I_0 = 0,38 \text{ A}$; $I_1 = 0,38 \text{ A} \cdot 10^{-2}$ nach $t_1 = \frac{1}{81} \text{ s}$;
 $I_2 = 0,38 \text{ A} \cdot 10^{-3}$ nach $t_2 = \frac{1}{54} \text{ s}$.

14. a) $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ für $t = \frac{1}{0,086} \text{ d} \approx 11,6 \text{ d}$.

Die Halbwertszeit beträgt etwa 11,6 Tage.

b) $N(100 \text{ d}) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8,6} \approx N_0 \cdot 0,00258$.

Nach 100 Tagen sind noch etwa 2,6% der Radiumatome vorhanden.

15. a) $2^{c \cdot 1620 \text{ a}} = 2^{-1} \Rightarrow c = -\frac{1}{1620 \text{ a}}$

b) 1) $N(1000 \text{ a}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{1000}{1620}} \approx N_0 \cdot 0,652$

2) $N(2000 \text{ a}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{2000}{1620}} \approx N_0 \cdot 0,425$

3) $N(10000 \text{ a}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{10000}{1620}} \approx N_0 \cdot 0,014$

Also sind nach 1000 Jahren noch 65,2%, nach 2000 Jahren noch 42,5% und nach 10000 Jahren noch 1,4% der ursprünglichen Menge von Radium 226 vorhanden.

16. a) $T(1875) = 82 \cdot 0,9955^{50} \approx 65,4$; also 65,4 Arbeitsstunden pro Woche

$T(1960) = 82 \cdot 0,9955^{135} \approx 44,6$; also 44,6 Arbeitsstunden pro Woche

$T(1980) = 82 \cdot 0,9955^{155} \approx 40,8$; also 40,8 Arbeitsstunden pro Woche

b) $T(2000) = 82 \cdot 0,9955^{175} \approx 37,2$. Für das Jahr 2000 ergäbe sich eine wöchentliche Arbeitszeit von etwa 37 Stunden, was durchaus realistisch erscheint.

133/17. a) $5,3 \cdot q^{10} = 6,0 \Rightarrow q = 1,01248 \dots$; etwa 12,5% jährliche Zunahme.

b) $5,3 \cdot 1,034^{10} = 7,40 \dots$

Die Weltbevölkerung würde auf 7,4 Milliarden anwachsen.

Aufgaben zu 6.2

137/1. a) 5; 10; 20; 40; 80

b) -3 ; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{8}$; $-\frac{3}{16}$

c) 1; -2 ; 4; -8 ; 16

d) 10; -2 ; 0,4; $-0,08$; 0,016

e) 8; $8\sqrt{2}$; 16; $16\sqrt{2}$; 32

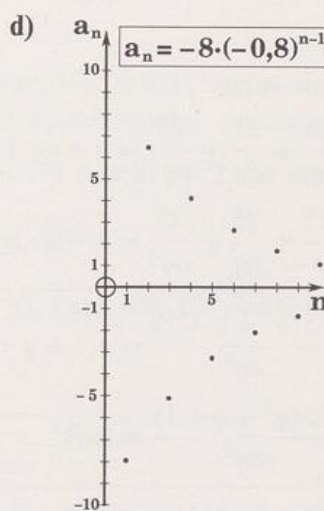
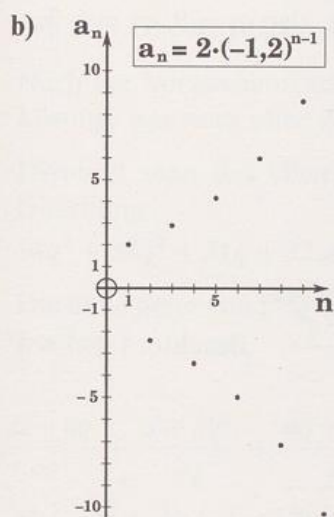
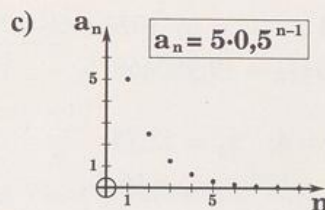
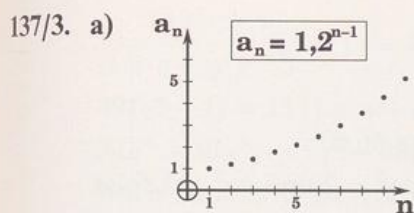
f) -8 ; $8\sqrt[3]{3}$; $-8\sqrt[3]{9}$; 24; $-24\sqrt[3]{3}$

2. a) $a = 1$; $q = -4$

b) $a = 16$; $q = \frac{1}{2}$

c) $a = \frac{1}{12}$; $q = 3$ oder $a = -\frac{1}{12}$; $q = -3$

d) $a = -\frac{3}{4}$; $q = -2$



4. $a = 31$ Finger, $q = 2$, $s_n = 465$ Finger $\Rightarrow n = 4$

Die Gesamtstrecke ist aus vier Stücken zusammengesetzt. Es wurde 3mal verdoppelt.

- 138/5. a) l_n und b_n seien Länge und Breite des n -ten Rechtecks ($n \in \mathbb{N}$).

Es gilt: $l_1 = l$, $b_1 = b$ und $l_2 = b_1 = b$, $b_2 = \frac{1}{2} l_1 = \frac{l}{2}$.

Aus $l_1 : b_1 = l_2 : b_2$ (Ähnlichkeit) folgt $l^2 = 2b^2 \Leftrightarrow l = b \cdot \sqrt{2}$.

Allgemein ist $l_{n+1} = b_n$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} l_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Damit erhält man die Folgen

$$b_1 = b; \quad b_2 = \frac{b}{\sqrt{2}}; \quad b_3 = \frac{b}{2}; \quad b_4 = \frac{b}{2\sqrt{2}}; \quad \dots$$

$$l_1 = b\sqrt{2}; \quad l_2 = b; \quad l_3 = \frac{b}{\sqrt{2}}; \quad l_4 = \frac{b}{2}; \quad \dots,$$

also geometrische Folgen mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- b) 1) Aus $l_0 \cdot b_0 = 10^6 \text{ mm}^2$ und $l_0 = b_0 \sqrt{2}$ folgt $b_0 \approx 841 \text{ mm}$, $l_0 \approx 1189 \text{ mm}$.

2) $l_4 \cdot b_4 = 1 \text{ m}^2 : 2^4 = 625 \text{ cm}^2$, $b_4 \approx 210 \text{ mm}$, $l_4 = 297 \text{ mm}$;

$l_5 \cdot b_5 = 1 \text{ m}^2 : 2^5 = 312,5 \text{ cm}^2$, $b_5 \approx 149 \text{ mm}$, $l_5 = 210 \text{ mm}$.

6. a) 3,2 mm b) 10,24 cm $\approx$ 10 cm c) 3,2768 m $\approx$ 3 m

138/7. a) 31

b) 1023

c) $19\frac{3}{8} = 19,375$

d) $19\frac{251}{256} = 19,98046875$

e) 0 f) 5

8. a) $a = 4$; $s_5 = 52,75$

b) $q = -\frac{1}{2}$; $s_{10} \approx 66,60$

c) $a = 125$; $a_5 = 16,2$

d) Aus $a + aq + aq^2 = 7$ und $aq^2 = 1$ folgt
 $q = \frac{1}{2}$, $a = 4$, also $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, oder
 $q = -\frac{1}{3}$, $a = 9$, also $a_1 = 9$, $a_2 = -3$.

$q = \frac{1}{2}$, $a = 4$, also $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, oder

$$q = -\frac{1}{3}, a = 9, \text{ also } a_1 = 9, a_2 = -3.$$

9. Mit $a > 0$ gilt

$$\text{I} \quad \frac{25}{a} + \frac{25}{aq} + \frac{25}{aq^2} = a + aq + aq^2$$

$$\text{II} \quad \frac{25}{a} + \frac{25}{aq} + \frac{25}{aq^2} = a \cdot aq \cdot aq^2$$

$$\text{I'} \quad \frac{25(q^2 + q + 1)}{aq^2} = a(1 + q + q^2) \quad || : \frac{1 + q + q^2}{aq^2}. \quad \text{Beachte: } 1 + q + q^2 > 0$$

$$\text{II}' \quad \frac{25(q^2 + q + 1)}{aq^2} = (aq)^3$$

$$\text{I'' } 25 = (aq)^2 \Rightarrow aq = 5; \text{ denn nach II' ist } aq > 0.$$

$$\Pi'' \frac{25(q^2 + q + 1)}{5q} = 125 \Leftrightarrow q^2 - 24q + 1 = 0$$

$$q_1 = 12 + \sqrt{143}; \quad q_2 = 12 - \sqrt{143}$$

Also entweder $q = 12 + \sqrt{143}$, $a = \frac{5}{12 + \sqrt{143}}$ und damit

$$a_1 = \frac{5}{12 + \sqrt{143}}, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 5(12 + \sqrt{143})$$

oder $q = 12 - \sqrt{143}$, $a = \frac{5}{12 - \sqrt{143}}$ und damit

$$a_1 = \frac{5}{12 + \sqrt{143}}, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 5(12 - \sqrt{143}).$$

NB: Wegen $\frac{5}{12 - \sqrt{143}} = 5(12 + \sqrt{143})$ erscheinen in der zweiten Lösung die drei Glieder lediglich in umgekehrter Reihenfolge!

10. a, aq, aq^2 mit $q > 0$

$$\text{I} \quad a + aq + aq^2 = 119$$

$$\text{II } (a + aq^2) [(aq^2 - aq) + (aq - a)] = 4335$$

I' $a = \frac{119}{1+q+q^2}$ Beachte: $1+q+q^2 > 0$

$$\text{II}' \quad a^2(q^4 - 1) = 4335$$

Setzt man a aus I' in II' ein, so erhält man

$$\frac{119^2}{(1+q+q^2)^2} (q^4 - 1) = 4335 \quad || \cdot \frac{(1+q+q^2)^2}{289}$$

$$49(q^4 - 1) = 15(1+q+q^2)^2$$

$$34q^4 - 30q^3 - 45q^2 - 30q - 64 = 0 \quad (*)$$

Nach Satz 107.1 ist jede ganzzahlige Lösung von (*) Teiler von -64.

$q = 2$ ist Lösung. Dazu gehört nach I' das Anfangsglied $a = 17$.

Die drei Glieder heißen 17, 34, 68.

Nach der Vorzeichenregel von DESCARTES (Satz 108.2) hat (*) eine einzige positive Lösung, was man ohne die Vorzeichenregel folgendermaßen einsehen kann.

Dividiert man das Gleichungspolynom von (*) durch $q - 2$, so erhält man die Gleichung

$$34q^3 + 38q^2 + 31q + 32 = 0 \quad (**)$$

Die linke Seite von (**) ist für $q \geq 0$ stets ≥ 32 , kann also für positives q nicht null werden.

$$139/11. \frac{a+aq}{aq^2} + \frac{a+aq^2}{aq} + \frac{aq+aq^2}{a} = 13, \quad a \neq 0$$

$$q^4 + 2q^3 + 2q + 1 = 13q^2 \quad (\blacksquare)$$

1) Methode von CARDANO:

Mache die rechte Seite zu einem Quadrat und prüfe, ob die linke Seite dann auch ein Quadrat ist.

$$q^4 + 2q^3 + 3q^2 + 2q + 1 = 16q^2 \quad (*)$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \text{LS} &= (q^2 + Aq + 1)^2 = \\ &= q^4 + 2Aq^3 + (A^2 + 2)q^2 + 2Aq + 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{aligned} 2A &= 2 \Leftrightarrow A = 1 \\ A^2 + 2 &= 3 \Leftrightarrow |A| = 1 \\ 2A &= 2 \Leftrightarrow A = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow A = 1$$

Somit wird (*) zu

$$(q^2 + q + 1)^2 = 16q^2$$

$$|q^2 + q + 1| = 4|q|$$

$$q^2 + q + 1 = -4q \vee q^2 + q + 1 = 4q$$

$$q^2 + 5q + 1 = 0 \vee q^2 - 3q + 1 = 0$$

Das ergibt

$$q_1 = -\frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}) \quad q_3 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

$$q_2 = -\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) \quad q_4 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

Man erhält keine Aussage für a . Es gibt im wesentlichen 4 geometrische Folgen, von denen CARDANO nur die letzte kennt:

$$\begin{aligned}
&a, \quad \frac{1}{2}a(-5 - \sqrt{21}), \quad \frac{1}{2}a(23 + 5\sqrt{21}) \\
&a, \quad \frac{1}{2}a(-5 + \sqrt{21}), \quad \frac{1}{2}a(23 - 5\sqrt{21}) \\
&a, \quad \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5}), \quad \frac{1}{2}a(7 - 3\sqrt{5}) \\
&a, \quad \frac{1}{2}a(3 + \sqrt{5}), \quad \frac{1}{2}a(7 + 3\sqrt{5})
\end{aligned}$$

2) Übliches Verfahren

Die Gleichung (■) $q^4 + 2q^3 - 13q^2 + 2q + 1 = 0$ ist eine reziproke Gleichung 1. Art geraden Grades (siehe *Algebra 3*).

Division durch q^2 ergibt die äquivalente Gleichung

$$\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 2\left(q + \frac{1}{q}\right) - 13 = 0$$

Die Substitution $z := q + \frac{1}{q}$ liefert

$$z^2 + 2z - 15 = 0$$

$$z = -5 \vee z = 3$$

$$q + \frac{1}{q} = -5 \vee q + \frac{1}{q} = 3$$

$$q = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21}) \vee q = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$$

Wie unter 1) hat man damit die 4 Lösungen q_1, q_2, q_3, q_4 .
Siehe dort für die weitere Behandlung.

139/12. a) $2 \cdot 10^6 (1 - 2^{-64}) \text{ DM} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ DM}$

b) $10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-2}$ ist erfüllt für $n \geq 28$.

c) Ganze DM-Beträge ergeben sich nur bei den ersten 7 Feldern.

$$s_7 = 2 \cdot 10^6 (1 - 2^{-7}) \text{ DM} = 1984375 \text{ DM}$$

Er würde nur auf 15625 DM verzichten ($< 1\%$).

13. Das Roß kostet 4 294 967 295 Heller.

14. Es waren 2800 »kits, cats, sacks and wives«, dazu noch ein Mann. Aber ob die alle nach St. Ives gingen? Mit Sicherheit weiß man das nur vom Erzähler (bzw. der Erzählerin).

140/15. a) $s_5 = 1\frac{15}{16}$; $s_{10} = 1\frac{511}{512}$; $s_{15} = 1\frac{16383}{16384}$; $s_{20} = 1\frac{524287}{524288}$

b) $s_n = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ wird mit wachsendem n immer größer, bleibt aber immer kleiner als 2 und nähert sich diesem Wert beliebig.

16. 1) a) $s_5 = 13\frac{3}{16}$; $s_{10} = 113\frac{169}{512}$; $s_{15} = 873\frac{12907}{16384}$; $s_{20} = 6648,4\dots$

b) $s_n = 2 \cdot (1,5^n - 1)$ wird mit wachsendem n beliebig groß, da $1,5^n$ beliebig groß wird (z. B. $1,5^6 > 10 \Rightarrow 1,5^{6 \cdot k} > 10^k, k \in \mathbb{N}$).

2) a) $s_5 = 21,5552$; $s_{10} = 19,8790 \dots$; $s_{15} = 20,0094 \dots$; $s_{20} = 19,9992 \dots$

b) $s_n = 20 \cdot [1 - (-0,6)^n]$ ist für gerades n kleiner, für ungerades n größer als 20 und nähert sich diesem Wert mit wachsendem n beliebig, da $(-0,6)^n$ gegen 0 strebt ($0,6^5 < 10^{-1} \Rightarrow 0,6^{5k} < 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$).

3) a) $s_5 = 1,22102$; $s_{10} = 3,1874 \dots$; $s_{15} = 6,3544 \dots$; $s_{20} = 11,4549 \dots$

b) $s_n = 2(1,1^n - 1)$ wird mit wachsendem n beliebig groß, da $1,1^n$ beliebig groß wird ($1,1^{25} > 10 \Rightarrow 1,1^{25k} > 10^k$, $k \in \mathbb{N}$).

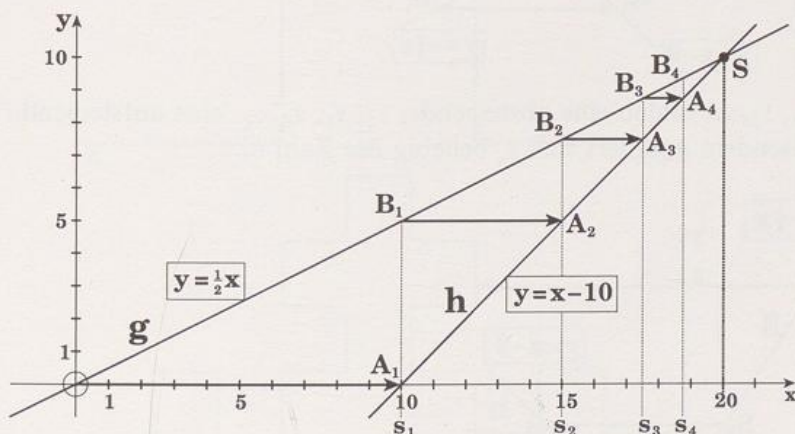
140/17. a) $A_1 \in h$ hat die Koordinaten $A_1(a|0)$; also $\overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

$B_1 \in g$ hat die Koordinaten $B_1(a|aq)$
 $A_2 \in h$ hat die Koordinaten $A_2(a+aq|aq)$ } also $\overrightarrow{B_1A_2} = \begin{pmatrix} aq \\ 0 \end{pmatrix}$

$B_2 \in g$ hat die Koordinaten $B_2(a+aq|aq+aq^2)$
 $A_3 \in h$ hat die Koordinaten $A_3(a+aq+aq^2|aq+aq^2)$ } also $\overrightarrow{B_2A_3} = \begin{pmatrix} aq^2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 usw.

b) s_k ist die 1. Koordinate von A_k und von B_k ; die Gerade A_kB_k schneidet die x -Achse im Punkt $C_k(s_k|0)$; $k \in \mathbb{N}$.

18. a)



b) $S(20|10)$. Die s_n nähern sich mit wachsendem n beliebig der Zahl $s = 20$.

c) Alle Dreiecke $A_iB_iA_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, sind einander ähnlich (w, w). Daher gilt

$$\overline{A_iA_{i+1}} : \overline{A_{i+1}A_{i+2}} = \overline{B_iA_{i+1}} : \overline{B_{i+1}A_{i+2}} = \frac{1}{q} \text{ (hier } = 2\text{)}.$$

Die Dreiecke OA_1B_1 und $B_iA_{i+1}B_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, sind ebenfalls einander ähnlich

(w, w). Daher gilt $\overline{OB_1} : \overline{B_1B_2} = \overline{OA_1} : \overline{B_1A_2} = \frac{1}{q}$ und

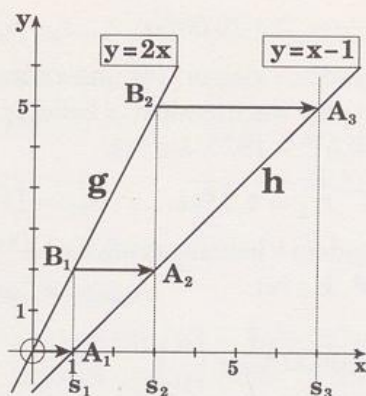
$$\overline{B_iB_{i+1}} : \overline{B_{i+1}B_{i+2}} = \overline{B_iA_{i+1}} : \overline{B_{i+1}A_{i+2}} = \frac{1}{q} \text{ (hier } = 2\text{)}.$$

Die Streckenlängen bilden also jeweils geometrische Folgen mit dem Quotienten q (hier $= 0,5$).

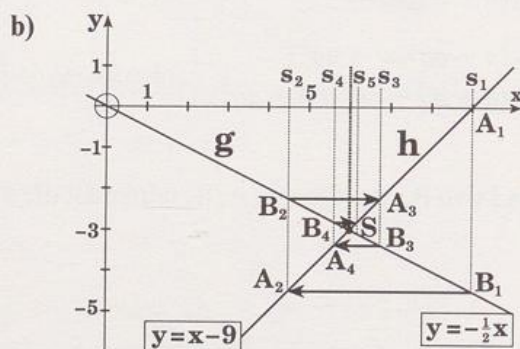
$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n+1}A_n} \text{ nähert sich beliebig } \overline{A_1S} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2};$$

$$\overline{OB_1} + \overline{B_1B_2} + \dots + \overline{B_{n-1}B_n} \text{ nähert sich beliebig } \overline{OS} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}.$$

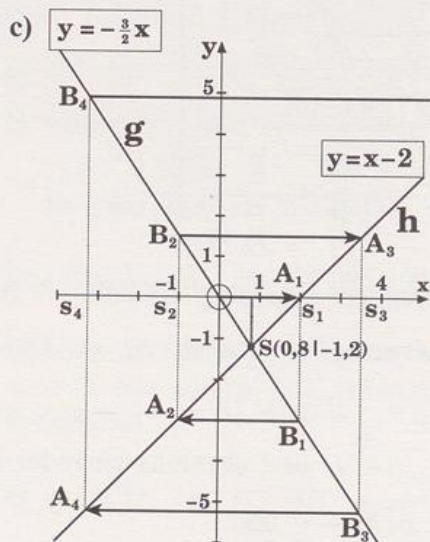
140/19. a)



Die s_n werden mit wachsendem n immer größer, und zwar beliebig groß.



$s_1, s_3, s_5, \dots$ bilden eine absteigende, $s_2, s_4, s_6, \dots$ eine aufsteigende Folge. Mit wachsendem n nähert sich s_n beliebig der Zahl 6.



Mit wachsendem n werden die Zahlen $s_1, s_3, s_5, \dots$ immer größer und beliebig groß, die Zahlen s_2, s_4, s_6 immer kleiner und beliebig klein.

20. a) Je zwei Strecken a_i und a_{i+1} sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse abwechselnd auf g bzw. h liegt. Diese Dreiecke sind einander ähnlich (entsprechende Winkel sind gleich, da ihre Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen). Daher gilt

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots, \text{ also, da } a_2 = \frac{2}{3}a_1, \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{2}{3}, i \in \mathbb{N}.$$

Die a_i bilden somit die geometrische Folge mit $a = 9$ und $q = \frac{2}{3}$.

b) $s_n = 9 \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3}} = 27(1 - (\frac{2}{3})^n)$. Mit wachsendem n nähert sich s_n beliebig der Zahl 27 (da $(\frac{2}{3})^n$ gegen 0 strebt).

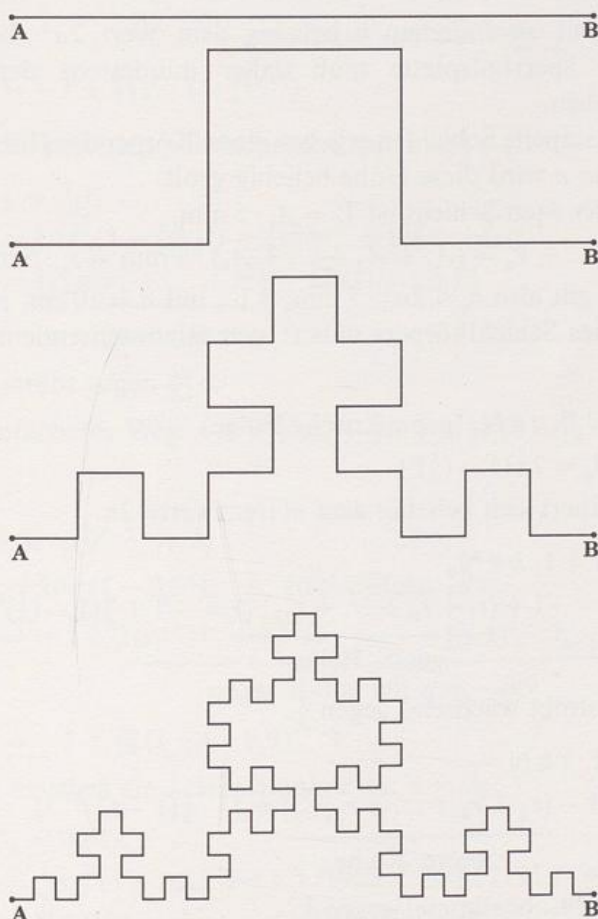
c) Diese rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenusen a_i sind ebenfalls einander ähnlich. Daher gilt für die Flächeninhalte $A_{i+1} : A_i = (a_{i+1} : a_i)^2 = \frac{4}{9}$, $i \in \mathbb{N}$. Sie bilden also eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{9}$.

141/21. a) $l_2 = \frac{4}{3}l_1$, $l_3 = \frac{4}{3}l_2$ usw.; d.h., die l_i bilden eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{3}$.

b) $l_{10} \approx 13,3l_1$; $l_{50} \approx 1,32 \cdot 10^6 l_1$; $l_{100} \approx 3,12 \cdot 10^{12} l_1$
 l_n wird mit wachsendem n beliebig groß.

c) Der Von-Koch-Kurve läßt sich keine Länge zuordnen; sie ist »unendlich lang«.

22. a)



b) $l_2 = \frac{5}{3}l_1 = 15 \text{ cm}$; $l_3 = \frac{5}{3}l_2 = 25 \text{ cm}$; $l_4 = \frac{5}{3}l_3 = 41\frac{2}{3} \text{ cm}$.

$n \mapsto l_n = l_1 \cdot (\frac{5}{3})^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{5}{3}$.

Mit wachsendem n wird $(\frac{5}{3})^n$ und damit l_n beliebig groß $[(\frac{5}{3})^5 > 10 \Rightarrow (\frac{5}{3})^{5k} > 10^k]$.

$$142/23. a) \overline{P_{i+1}Q_{i+1}}^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{P_iQ_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\overline{P_iQ_i}^2 \Rightarrow \overline{P_{i+1}Q_{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overline{P_iQ_i}.$$

$$\text{Also gilt: } a_n = a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

$$b) l_n = 4 \cdot s_n = 4 \cdot a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$a = 1 \text{ dm} \Rightarrow l_n = 4 \text{ dm} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 8 \text{ dm} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot [1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n]$$

$1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ ist kleiner als 1 und nähert sich mit wachsendem n beliebig dem Wert 1.

Also gilt: $l_n < 8 \text{ dm} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1,37 \text{ m}$.

Mit 2 m Faden kann man also beliebig viele (»all die unendlich vielen«) Quadrate herstellen, und es bleibt noch mehr als 63 cm übrig!

c) A_i sei der Flächeninhalt des i -ten Quadrats.

$$A_i = a_i^2 = a^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$s_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n = a^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2a^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

s_n nähert sich mit wachsendem n beliebig dem Wert $2a^2$ (liegt aber immer darunter). Die Sperrholzplatte muß daher mindestens den Flächeninhalt $2a^2 = 2 \text{ dm}^2$ haben.

n aufeinandergestapelte Schichten ergeben einen Körper der Höhe $h_n = n \cdot 5 \text{ mm}$.

Mit wachsendem n wird diese Höhe beliebig groß.

Das Volumen der i -ten Schicht ist $V_i = A_i \cdot 5 \text{ mm}$.

$$v_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (A_1 + A_2 + \dots + A_n) \cdot 5 \text{ mm} = s_n \cdot 5 \text{ mm}.$$

Wegen $s_n < 2a^2$ gilt also $v_n < 2a^2 \cdot 5 \text{ mm}$, d.h., mit $a = 10 \text{ cm}$, $v_n < 100 \text{ cm}^3$.

Das Volumen des Schichtkörpers nähert sich mit wachsendem n beliebig dem Wert 100 cm^3 .

24. a) $l_i = \pi \cdot r_i = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$, (geometrische Folge)

$$L_n = l_1 + \dots + l_n = 2\pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$L_n < 2\pi$; L_n nähert sich beliebig dem »Grenzwert« 2π .

b) 1. Fall: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$x_{2k+1} = -1 + \underbrace{(r_1 + r_3 + \dots + r_{2k-1})}_{\text{geom. Reihe}} = -1 + \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right)$$

x_{2k+1} strebt wachsend gegen $\frac{1}{3}$.

2. Fall: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$x_{2k} = 1 - \underbrace{(r_2 + r_4 + \dots + r_{2k-2})}_{\text{geom. Reihe}} = 1 - \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right)$$

x_{2k} strebt abnehmend gegen $\frac{1}{3}$.

Ergebnis: Der zu $x = \frac{1}{3}$ gehörende Punkt ist »Grenzpunkt« der Punkte P_n , $n \in \mathbb{N}$.

Anmerkung: Man kann x_n auch ohne Fallunterscheidung berechnen. Es gilt

$$x_n = -1 + 2(r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + \dots + (-1)^{n-2} r_{n-1}).$$

In der Klammer steht eine geometrische Reihe, hier mit $q = -\frac{1}{2}$. Man erhält
 $x_n = -1 + \frac{4}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1})$.

c) $r_{i+2} = \frac{1}{4}r_i \Rightarrow A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2 \cdot (1 - \frac{1}{16}) = \frac{15}{32}\pi r_i^2 = \frac{15}{8}\pi \cdot (\frac{1}{4})^i$

$$S_n = \frac{15}{32}\pi \underbrace{(r_1^2 + \dots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = \frac{5}{8}\pi(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

S_n nähert sich mit wachsendem n beliebig der Zahl $\frac{5}{8}\pi$.

Einfacherer Weg: Die Sichelflächen bedecken gerade das aus den Halbkreisen mit den Radien r_1 und r_2 bestehende Gebiet. Es hat den Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{8}\pi.$$

d) 1)

a) $l_i = \pi \cdot (\frac{3}{4})^{i-1}, i \in \mathbb{N}$

$$L_n = 4\pi(1 - (\frac{3}{4})^n); \quad L_n \text{ strebt mit wachsendem } n \text{ gegen } 4\pi.$$

b) $x_n = -1 + 2 \underbrace{(r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + \dots + (-1)^{n-2}r_{n-1})}_{\text{geom. Reihe mit } q = -\frac{3}{4}}$

$$x_n = -1 + \frac{8}{7}(1 - (-\frac{3}{4})^{n-1})$$

Es existiert ein »Grenzpunkt« mit $x = \frac{1}{7}$.

c) $r_{i+2} = \frac{9}{16}r_i$

$$A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2(1 - (\frac{9}{16})^2) = \frac{175}{512}\pi r_i^2 = \frac{175}{512}\pi \cdot (\frac{9}{16})^{i-1}$$

$$S_n = \frac{175}{512}\pi \underbrace{(r_1^2 + \dots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = \frac{25}{32}\pi(1 - (\frac{9}{16})^n)$$

S_n strebt gegen $\frac{25}{32}\pi$.

Einfacherer Weg: $A = \frac{1}{2}\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi(1 + \frac{9}{16}) = \frac{25}{32}\pi$.

d) 2)

a) $l_i = \pi \cdot 0,9^{i-1}, i \in \mathbb{N}$

$$L_n = 10\pi(1 - 0,9^n); \quad L_n \text{ strebt gegen } 10\pi.$$

b) $x_n = -1 + 2 \underbrace{(r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + \dots + (-1)^{n-2}r_{n-1})}_{\text{geom. Reihe mit } q = -0,9}$

$$x_n = -1 + \frac{20}{19}(1 - (-0,9)^{n-1})$$

Es existiert ein »Grenzpunkt« mit $x = \frac{1}{19}$.

c) $r_{i+2} = 0,81r_i$

$$A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2(1 - 0,81^2) = 0,17195\pi r_i^2 = 0,17195\pi \cdot (0,81)^{i-1}$$

$$S_n = 0,17195\pi \underbrace{(r_1^2 + \dots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = 0,905\pi(1 - (0,81)^n)$$

S_n strebt gegen $0,905\pi$.

Einfacherer Weg: $A = \frac{1}{2}\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi(1 + 0,81) = 0,905\pi$.

d) 3)

a) $l_i = \pi \cdot 0,99^{i-1}, i \in \mathbb{N}$

$L_n = 100\pi(1 - 0,99^n); L_n$ strebt gegen 100π .

b) $x_n = -1 + 2 \underbrace{(r_1 - r_2 + \dots + (-1)^{n-2} \cdot r_{n-1})}_{\text{geom. Reihe mit } q = -0,99}$

$x_n = -1 + \frac{200}{199}(1 - (-0,99)^{n-1})$

Es existiert ein »Grenzpunkt« mit $x = \frac{1}{199}$.

c) $r_{i+2} = 0,9801r_i$

$A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2(1 - 0,9801^2) = 0,019701995\pi r_i^2$

$S_n = 0,019701995\pi \underbrace{(r_1^2 + \dots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = 0,99005\pi(1 - 0,9801^n)$

S_n strebt gegen $0,99005\pi$.

Einfacherer Weg: $\frac{1}{2}\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi(1 + 0,9801) = 0,99005\pi$.

143/25. a) $z_n = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4} + \dots + 37 \cdot 10^{-2n}$

Die Summanden bilden eine geometrische Folge mit $q = 10^{-2}$.

b) $z_n = \frac{37}{99}(1 - 10^{-2n})$.

z_n kommt $y = \frac{37}{99}$ beliebig nahe.

$y = \frac{37}{99} = 0,37$; also $y = z = \frac{37}{99}$.

c) 1) $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$

2) $0,\overline{06} = \frac{6}{99} = \frac{2}{33}$

3) $0,\overline{481} = \frac{481}{999} = \frac{13}{27}$

4) $0,\overline{4321} = \frac{4321}{9999}$

26. a) $3,\overline{15} = 3\frac{5}{33}$

b) $0,\overline{06} = \frac{1}{15}$

c) $0,\overline{518} = \frac{57}{110}$

d) $10,\overline{70185} = 10\frac{379}{540}$

Aufgaben zu 6.3

145/1. a) 0; 2; 4; 6; $a_{20} = 38$

b) 10; 9; 8; 7; $a_{20} = -9$

c) -16; -13,5; -11; -8,5; $a_{20} = 31,5$

2. $a_n + a_{n+2} = (a + (n-1)d) + (a + (n+1) \cdot d) = 2a + 2nd =$
 $= 2(a + n \cdot d) = 2a_{n+1};$

also $a_{n+1} = (a_n + a_{n+2}) : 2$

3. a) $s_{20} = 380$; $s_{100} = 9900$

b) $s_{20} = 10$; $s_{100} = -3950$

c) $s_{20} = 155$; $s_{100} = 10725$

4. a) $d = -6$; $a = 11$

b) $d = 0,8$; $a = -0,8$

c) $d = \frac{1}{4}$; $a = -\frac{17}{12}$

- 145/5. a) 25; 38; 51; 64 ($d = 13$)
 b) 25; 32,8; 40,6; 48,4; 56,2; 64 ($d = 7,8$)
 c) 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43; 46; 49; 52; 55; 58; 61; 64 ($d = 3$)

6. a) $a = 4$; $d = 1,5$ b) $L = \{(a, d) | a + 2d = 4\}$
 c) $a = -5$; $d = 2,5$ d) $a = 6$; $d = -1,5$

7. Sie erhalten $9\frac{7}{16}$, $9\frac{9}{16}$, $9\frac{11}{16}$, $9\frac{13}{16}$, $9\frac{15}{16}$, $10\frac{1}{16}$, $10\frac{3}{16}$, $10\frac{5}{16}$, $10\frac{7}{16}$ und $10\frac{9}{16}$ Scheffel Gerste.

8. Der erste erhält 17,2 Schekel, jeder weitere um jeweils 1,6 Schekel weniger (!).
 [Die Numerierung – »achter Bruder« – und die Formulierung »hat sich erhoben« passen nicht zusammen.]

- 146/9. a) $d = 9\frac{1}{6}$ Brote; sie erhielten $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$ und $38\frac{1}{3}$ Brote.
 b) $d = -9\frac{1}{6}$ Brote; sie erhielten $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{5}{6}$ und $1\frac{2}{3}$ Brote.
 [Verteilung in umgekehrter Reihenfolge gegeben über a)!]

10. a) Ja, denn $s_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$.

b) Ja, denn $s_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) = na + n(n-1) \frac{d}{2}$.

11. a) $n^2 - 4n - 60 = 0$ hat in $\mathbb{N}$ nur die Lösung $n = 10$.

- b) $n^2 - 9n + 14 = 0$ hat in $\mathbb{N}$ die Lösungen $n_1 = 7$ und $n_2 = 2$.
 (Tatsächlich gilt $-6 - 4,5 - 3 - 1,5 + 0 + 1,5 + 3 = -6 - 4,5$.)

- c) $d = -1,2$; $n^2 - 16n + 48 = 0$ hat zwar die Lösungen $n_1 = 12$ und $n_2 = 4$. Laut Angabe muß aber $n \geq 6$ gelten; also $n = 12$.

12. a) $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$

b) $1 + 2 + \dots + 10^4 = 5000 \cdot 10001 = 50005000$

c) $7 + 14 + \dots + 994 = 7 \cdot (1 + 2 + \dots + 142) = 7 \cdot 143 \cdot 71 = 71071$

13. a) $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = 2n \cdot \frac{n}{2} = n^2$

b) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} = \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n} \cdot (1 + n) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$

c) $T_n = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{(1+n) \cdot n}{n^2 \cdot 2} = \frac{1+n}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$

T_n strebt mit wachsendem n gegen $\frac{1}{2}$.

d) $U_n = \frac{1}{n^2} (1 + 3 + \dots + 2n - 1) = \frac{n^2}{n^2} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. (Vgl. a))

147/14. $d = -1$; $5 = 12 + (n-1) \cdot (-1) \Leftrightarrow n = 8$; $s_8 = 68$.

Es sind 68 Rohre gestapelt.

Man könnte noch $(4 + 3 + 2 + 1) = 10$ weitere Rohre auflegen.

147/15. Das Dach besteht aus 846 Ziegeln. Man benötigt $846 + 5 \cdot 8,46 \approx 888$ Ziegel, also 9 Paletten.

16. a) 1285 Sitze.

b) Für die arithmetische Folge mit $a_1 = 120$ und $a_{280} = 480$ gilt tatsächlich $s_{280} = 8400$. Es handelt sich aber um eine Folge mit $d = \frac{360}{279}$, was in diesem Anwendungsbeispiel sinnwidrig ist.

17. a) Trommeldurchmesser D ,

Durchmesser der i -ten Windung $D_i = D + (i - 1) \cdot 0,5 \text{ mm}$.

$2000 \text{ mm} = \pi(2D + 15 \cdot 0,5 \text{ mm}) \cdot 8$; $D \approx 36,0 \text{ mm}$.

b) $D_i = 20 \text{ mm} + (i - 1) \cdot 1 \text{ mm}$.

$20\,000 \text{ mm} = \pi(40 \text{ mm} + (n - 1) \cdot 1 \text{ mm}) \cdot \frac{n}{2}$; $n \approx 95,0$.

Man erhält 95 Windungen.

Aufgaben zu 6.4

150/1. a) $25\,000 \text{ DM} \cdot 1,04^5 \approx 30\,416,32 \text{ DM}$ b) $25\,000 \text{ DM} \cdot 1,06^{10} \approx 44\,771,19 \text{ DM}$

2. a) 7472,58 DM b) 5607,02 DM

3. a) $p \approx 4,50\%$ b) $p \approx 8,25\%$

4. a) 6,5% b) 3,9% c) 8,0% d) 26,0%

5. 1) a) 30 504,75 DM 1) b) 45 350,46 DM

2) a) 30 524,92 DM 2) b) 45 484,92 DM

6. a) 10375 DM b) 29041,95 DM c) 70735,44 DM

7. a) 1) 7057,11 DM ($\approx 7100 \text{ DM}$) 2) 5704,12 DM ($\approx 5700 \text{ DM}$)

b) 100 607,77 DM bei 1) bzw. 99 927,65 DM bei 2)

8. a) Monatszins $\frac{2}{3}\%$; Zahl der Zinsmonate $= 11 + 10 + \dots + 1 = 66$;
Zins im 1. Jahr $= 5 \text{ DM} \cdot \frac{2}{3} \cdot 66 = 220 \text{ DM}$;
Kontostand am Jahresende $= 6220 \text{ DM} = 12,44 \cdot 500 \text{ DM}$.

b) $6220 \text{ DM} (1,08 + 1) = 12\,937,60 \text{ DM}$

c) $6220 \text{ DM} (1,08^4 + 1,08^3 + \dots + 1) = 36\,490,26 \text{ DM}$

d) $500 \text{ DM} (1,006^{59} + 1,006^{58} + \dots + 1) \approx 36\,738 \text{ DM}$

151/9. a) 26 752,60 DM b) Nein; Endwert 26 764,51 DM

10. a) 1) 1253,88 DM 2) 1469,30 DM 3) 1729,70 DM

b) $1000 \text{ DM} \cdot 1,0814^7 \approx 1729,45 \text{ DM}$

11. a) $p \approx 8,33\%$ b) 1) $p \approx 8,00\%$ 2) $p \approx 7,75\%$

151/12.	Jahr	Schuld am Jahresanfang	Schuld-zinsen	Jahres-rate	Tilgung
	1.	40000,—	3000,—	10000,—	7000,—
	2.	33000,—	2475,—	10000,—	7525,—
	3.	25475,—	1910,63	10000,—	8089,37
	4.	17385,63	1303,92	10000,—	8696,08
	5.	8689,55	651,72	9341,27	8689,55

Die Restzahlung am Ende des 5. Jahres beträgt 9341,27 DM.

152/13.	Jahr	Schuld am Jahresanfang	Schuld-zinsen	Tilgung	Jahres-rate
	1.	40000,—	3000,—	8000,—	11000,—
	2.	32000,—	2400,—	8000,—	10400,—
	3.	24000,—	1800,—	8000,—	9800,—
	4.	16000,—	1200,—	8000,—	9200,—
	5.	8000,—	600,—	8000,—	8600,—

Die Restzahlung am Ende des 5. Jahres beträgt 8600 DM.

14. a) 1) $2000 \text{ DM} \cdot 1,01^5 - 200 \text{ DM} \frac{1,01^5 - 1}{0,01} = 1081,82 \text{ DM}$ 2) 508,58 DM

b) Letzte Rate: 117,97 DM

[Entweder (Restschuld nach 10 Monaten) $\cdot 1,01 \approx 117,97 \text{ DM}$ oder $200 \text{ DM} - (\text{Guthaben nach Zahlung von 11 vollen Raten}) \approx 117,97 \text{ DM}$]

15. a) 13300 DM; letzte Rate 12721,23 DM

b) 9100 DM; letzte Rate 8154,20 DM

16. a) Restschuld nach 15 Jahren: 107230,67 DM

b) Restschuld nach 27 Jahren: 9595,17 DM.

Im 28. Jahr sinkt diese Restschuld nach Zahlung der 1. Rate auf $[9595,17 \text{ DM} \cdot 1,02 - 3375 \text{ DM} =]$ 6412,07 DM, nach Zahlung der 2. Rate auf 3165,31 DM. Zur völligen Tilgung müssen als 3. Rate noch 3228,62 DM gezahlt werden.

17. a) 150000 DM

b) 117817,77 DM ($\approx 118 \cdot 10^3 \text{ DM}$)

Aufgaben zu 7.1

157/1. a) 7 b) -5 c) -1 d) -2 e) -4,5 f) $\frac{1}{3}$

2. a) $\log_{\frac{3}{2}}(\frac{729}{64}) = 6$ b) $\log_{\frac{27}{8}}(\frac{2187}{128}) = \frac{7}{3}$

- 158/3. a) 1) $[2; 3], [2,3; 2,4], [2,32; 2,33], [2,321; 2,322]$
 2) $[1; 2], [1,5; 1,6], [1,56; 1,57], [1,568; 1,569]$
 3) $[0; 1], [0,2; 0,3], [0,23; 0,24], [0,235; 0,236]$
 4) $[-1; 0], [-0,2; -0,1], [-0,18; -0,17], [-0,179; -0,178]$
 5) $[-2; -1], [-1,6; -1,5], [-1,52; -1,51], [-1,513; -1,512]$
 6) $[3; 4], [3,1; 3,2], [3,18; 3,19], [3,180; 3,181]$

- b) 1) $\log_3 5 \approx 1,46$ 2) $\log_7 0,7 \approx -0,183$
 3) $\log_{0,5} \frac{5}{3} \approx -0,737$ 4) $\log_{15} \sqrt{2} \approx 0,128$

4. a) 2 b) 4 c) 4 d) n
 e) 10 f) 3 g) 3 h) 4
5. a) -1 b) -1 c) -2 d) -4
 e) -1 f) -3 g) -2 h) -2
6. a) -3 b) -4 c) -2 d) -4
 e) -7 f) -3 g) 3 h) -3
7. a) 2 b) -2 c) 2 d) -2
 e) 3 f) -4 g) -4 h) -3
8. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$
 e) $-\frac{3}{4}$ f) $-\frac{4}{3}$ g) $\frac{10}{7}$ h) $\frac{2}{3}$
 i) $\frac{3}{2}$ k) $\frac{2}{3}$ l) $-\frac{1}{2}$ m) $\frac{5}{2}$
9. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{4}{9}$
 e) $-\frac{3}{5}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) $-\frac{2}{7}$ h) $-\frac{3}{5}$
 i) $-\frac{3}{2}$ k) $\frac{2}{7}$ l) $-\frac{1}{4}$ m) $\frac{5}{3}$
10. a) 2 b) -6 c) 30 d) -6
 e) $\frac{12}{7}$ f) $-\frac{12}{5}$ g) $-\frac{4}{3}$ h) $\frac{2}{3}$
11. a) 6 b) -8 c) $4\frac{1}{15}$

- 159/12. a) 0 b) 1 c) 2 d) n
 e) -1 f) -2 g) $-n$ h) $\frac{1}{2}$
 i) $\frac{1}{3}$ k) $\frac{2}{5}$ l) $-\frac{3}{7}$ m) $\frac{15}{4}$
13. a) -2 b) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{2}{3}$
 e) $2n$ f) $-\frac{2}{3}$ g) 6 h) -8
14. a) 8 b) $\frac{1}{25} (= 0,04)$ c) 3 d) $\sqrt[3]{2}$
 e) 11 f) $\frac{13}{9}$ g) $\sqrt{2}$ h) $\sqrt{0,5} (= 2^{-\frac{1}{2}})$
 i) 16 k) ± 49 l) 4 m) $x > -2,5 \wedge x \neq -2$

- 159/15. a) 2,378 b) 237,8 c) 23,78
 d) 0,4444 e) 1000 f) 0,1230

16. a) $\{1, 10, 100\}$ b) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
 c) $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$ d) $\{1, 10, 100\}$

17. Es soll gelten: $\sqrt[n]{n} = 10^r$ mit $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r \leq 3$,
 also $n = 10^{2r}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r \leq 3$.

10^{2r} stellt nur für $2r \in \mathbb{N}_0$ eine ganze Zahl dar.

Damit erhält man folgende Lösungen:

r	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

18. Für alle Beispiele a) bis f) gilt, daß $\log_b a$ positiv ist, da $a > 1$ und $b > 1$.
 ($x = \log_b a \Leftrightarrow a = b^x$; $x \mapsto b^x$ echt monoton wachsend und $b^0 = 1$.) Bei der Annahme
 $\log_b a = \frac{m}{n}$ können daher m und n als natürliche Zahlen vorausgesetzt werden.

a) $\log_{10} 2 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = 10^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow 2^n = 10^m \Leftrightarrow 2^n = 2^m \cdot 5^m$

Da in der letzten Gleichung der Primfaktor 5 links nicht vorkommt, ist sie –
 wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung – falsch und damit auch die
 Annahme.

b) $\log_{10} 5 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 5^n = 10^m \Leftrightarrow 5^n = 2^m \cdot 5^m$. Falsch! (vgl. Primfaktor 2)

c) $\log_{10} 6 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 6^n = 10^m \Leftrightarrow 2^n \cdot 3^n = 2^m \cdot 5^m$. Falsch! (vgl. Primfaktoren 3 u. 5)

d) $\log_2 3 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 3^n = 2^m$. Falsch!

e) $\log_5 9 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 9^n = 5^m \Leftrightarrow 3^{2n} = 5^m$. Falsch!

f) $\log_q p = \frac{m}{n} \Leftrightarrow q^n = p^m$. Falsch, da p und q verschiedene Primzahlen sind.

19. $\log_x y = x \Leftrightarrow y = x^x$; $x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x$ ganzzahlig $\Rightarrow x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Man erhält folgende Lösungen

x	2	3	4	5	6	7
y	4	27	256	3125	46656	823543

20. Die Gleichung $1^x = a$ hat für $a \neq 1$ keine und für $a = 1$ unendlich viele Lösungen, sie
 ist damit nicht eindeutig nach x auflösbar.
21. Für die Addition und die Multiplikation gilt das Kommutativgesetz; daher ist es
 gleichgültig, ob bei einer Summe (einem Produkt) der erste oder der zweite Summand
 (Faktor) gesucht ist. Bei Potenzen ist i.a. $a^b \neq b^a$; daher stellt die Bestimmung der
 Basis eine andere Aufgabe dar als die Bestimmung des Exponenten (wenn jeweils die
 anderen Stücke der Gleichung $a^b = c$ gegeben sind).

161/1. Mit $x := \log_a u$ und $y := \log_a v$ gilt $a^x = u$ und $a^y = v$.

Also ist $\frac{u}{v} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ und damit

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a (a^{x-y}) = x - y, \quad \text{d.h.} \quad \log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v.$$

2. a) $\log_a 3 + \log_a u + \log_a v$ b) $\log_a 2 + \log_a m + \log_a n + \log_a v$
 c) $-\log_a 5 - \log_a u - \log_a v$ d) $\log_a u + \log_a w - \log_a 3 - \log_a v$
 e) $2\log_a 2 + \log_a x + \log_a y - 3\log_a 3 - \log_a z$
 f) $2\log_a 3 + \log_a 5 + 2\log_a c + \log_a d + \log_a e$
 g) $2\log_a 2 - \log_a 3 + \log_a p - \log_a r$

3. a) $\log_a 2 + \log_a 3$ b) $3\log_a 2 + \log_a 3$ c) $2\log_a 5 + \log_a 3$
 d) $4\log_a 3$ e) $3(\log_a 2 + \log_a 5)$ f) $2\log_a 2 - \log_a 7$
 g) $-\log_a 11$ h) $2\log_a 2 + \log_a 3 - 2\log_a 5$
 i) $-2\log_a 5$ k) $2\log_a 13 - 2\log_a 2 - \log 5$
 l) $\frac{1}{2}\log_a 3$ m) $\frac{3}{5}\log_a 2 + \frac{1}{5}\log_a 3$

- 162/4. a) $\log_a 6$ b) $\log_a \frac{5}{7}$ c) $\log_a \frac{2}{11}$
 d) $\log_a 32$ e) $\log_a 32$ f) $\log_a 1$

5. a) $3\log_a u$ b) $\log_a 2 + 4\log_a c$
 c) $3(\log_a 3 - \log_a u - \log_a v)$ d) $2\log_a u + \log_a v - 3(\log_a 2 + \log_a w)$
 e) $\frac{1}{4}\log_a u$ f) $\frac{5}{6}\log_a u - \frac{1}{6}\log_a v$
 g) $-\frac{2}{3}\log_a r - \frac{1}{3}\log_a s - \frac{1}{3}\log_a t$ h) $\frac{2}{3}\log_a p + \frac{1}{2}\log_a 2 + \frac{1}{2}\log_a q$

6. a) nein $[\log_b x + 2 = \log_b (x \cdot b^2) \neq \log_b (x + 2)]$
 b) nein $[\log_b a^2 = 2 \cdot \log_b a \neq (\log_b a)^2]$
 c) nein, drei verschiedene Terme
 $[\log_b (a^2)^3 = 6 \cdot \log_b a; (\log_b a^2)^3 = 8 \cdot (\log_b a)^3; ((\log_b a)^2)^3 = (\log_b a)^6]$

7. a) $\log_a (m^2 n^3)$ b) $\log_a \sqrt{\frac{q}{p}}$ c) $\log_a (cd^9)$
 d) $\log_a ac$ e) $\log_a \frac{a^2}{u^2 v}$ f) $\log_a \frac{n}{a^2}$

8. a) 1 b) 2 c) -1 d) 3 e) 3 f) $-\frac{3}{4}$

9. a) 2 b) 1 c) -1 d) $2 + 3\log_7 2$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $2,5 + 2\log_9 11$

10. a) 1 b) 2 c) 1 d) 1 e) 0

11. a) $x = 7$ b) $x = 3$ (-5 gehört nicht zur Definitionsmenge!)
 c) $x_1 = 3; x_2 = -7$ d) $x_1 = 2; x_2 = 5$ e) $L = \{ \}$ f) $x = 3$

163/12. a) 3 b) 4 c) 4 d) 4 e) 2 f) 1 g) 8

13. a) $x = \frac{5}{9}$

b) $x = 5a$

c) $x = \frac{81}{64}$

d) $x = -\frac{32}{b^2}$

e) $x = \frac{1}{c}$

f) $x = 1$

g) $x = \frac{1}{8}$

h) $x = 10^{-\frac{3}{2}} \left(= \frac{1}{\sqrt{1000}} \right)$

14. a) $x_1 = 10^{-4}; x_2 = -10^{-4}$

b) $x = 10^{-4}$

c) $x_1 = 10^{-4}; x_2 = -10^{-4}$

d) $x_1 = \frac{1}{25}; x_2 = -\frac{1}{25}$

e) $x_1 = \frac{14}{27}; x_2 = \frac{13}{27}$

f) $x = 103$

Aufgaben zu 7.3.1

164/1. a) $3 \cdot \log_8 2 \quad (=1)$

b) $3 \cdot \log_8 3$

c) $\frac{3}{4} \cdot \log_8 5$

d) $\frac{3}{2} \cdot \log_8 u$

e) $\frac{3}{4} \cdot \log_8 v$

f) $\frac{3}{5} \cdot \log_8 w$

2. a) $\frac{\log_2 5}{\log_2 7}$

b) $\frac{\log_5 1,7}{\log_5 3}$

c) $\frac{3}{\log_4 5}$

d) $\frac{-2}{\log_7 1,1}$

e) $\frac{\log_3 2}{2}$

f) $2 \cdot \log_{25} 1,63$

3. a) $\frac{1}{\log_{10} 2}$

b) $\frac{2}{\log_{10} 5}$

c) $\frac{\log_{10} 5}{2}$

d) $\frac{\log_{10} 2}{3}$

e) $\frac{3}{\log_{10} 2}$

f) $\frac{3}{1 + \log_{10} 2}$

g) $-\log_{10} 7$

h) $\frac{1}{2 \log_{10} 3}$

i) $2 \log_{10} 6$

k) $-\frac{3}{\log_{10} 2}$

l) $\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3}$

m) $-\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$

n) $\frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}{-\log_{10} 9} = -\frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 9}$

o) $\frac{\log_{10} 523}{\log_{10} 11}$

p) $\frac{\log_{10} 49}{\log_{10} 0,16} = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 0,4} = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4 - 1}$

4. $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \Rightarrow \log_b a \cdot \log_a b = 1$

5. a) $\log_{a^n} x^n = \frac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \frac{n \cdot \log_a x}{n} = \log_a x$

b) Nein! $\log_{a^n} x^n$ existiert, falls $a^n > 0$, $a^n \neq 1$ und $x^n > 0$. Das läßt bei geradem n auch $a < 0$, $a \neq -1$ oder $x < 0$ zu; in diesen Fällen ist $\log_a x$ nicht definiert. Falls $\log_{a^n} x^n$ existiert, gilt aber: $\log_{a^n} x^n = \log_{|a|} |x|$.

165/6. a) $\log_2 x = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 3 \Rightarrow x = 3$

b) $x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \sqrt{5}$

c) $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$

d) $x = 49^2 = 2401$

e) $\log_a x^2 = 2 - \log_a 2 = \log_a \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$f) \log_{\sqrt{a}}(x-3) = \log_{\sqrt{a}}\sqrt{x+3} \Rightarrow x-3 = \sqrt{x+3} \Rightarrow x=6$$

$$g) \log_9(1 + \log_2 x) = \log_9 4 \Rightarrow 1 + \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 8$$

$$h) \log_3(1 + \log_2 x) = -\log_3 2 \Rightarrow 1 + \log_2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Aufgaben zu 7.3.2

166/1. a) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 b) -1; -2; -3; -4; -5; -6 c) 3; -5; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$; 6; 9

2. a) 3,5413; 2,5413; 0,5413; -1,4587 b) 3,7783; 5,7783; 0,7783; -0,2217
c) 2,7716; -2,2284; 4,7716; -0,2284 d) 1,3222; 5,3222; -3,6778; 0,3222
e) 2,3032; 3,3032; -0,6968; 1,3032

167/3. a) $(\lg z = \lg a + k \wedge 0 \leq \lg a < 1) \Rightarrow k \leq \lg z < k+1$

b) 1) 0 2) 1 3) 3 4) 5

Die Kennzahl ist um 1 kleiner als die Zahl der Stellen vor dem Komma.

c) 1) -1 2) -2 3) -5 4) -3

Man erhält die Kennzahl, indem man die Anzahl der Nullen, mit denen die Dezimalzahl beginnt (die Null vor dem Komma mitgezählt), mit -1 multipliziert.

168/4. a) Nach Voraussetzung besteht zwischen den beiden Zahlen x_1 und x_2 eine Gleichung $x_1 = x_2 \cdot 10^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Daher gilt: $\lg x_1 = \lg x_2 + k$, also $\lg x_1 - \lg x_2 = k$.

b) Aus $\lg x_1 - \lg x_2 = k$, $k \in \mathbb{Z}$ folgt $x_1 = x_2 \cdot 10^k$ und damit die Behauptung.

5. a) 2,195; 219,5; $2195 \cdot 10^2$; 0,2195

b) 5994; 0,05994; $5994 \cdot 10$; 0,00005994

c) 56,92; 5,692; 0,0005692; 5692

d) 1,744; $1744 \cdot 10^3$; 0,001744; 174,4

6. a) 224,6 b) 0,2397 c) 26,93 d) $2,895 \cdot 10^{-13}$

e) 1,030 f) 1,343 g) 19,05 h) $6,310 \cdot 10^{12}$

i) 0,2563 k) 0,9234 l) $1,409 \cdot 10^{-3}$ m) $2,319 \cdot 10^{-6}$

7. a) 2,81 b) 0,827 c) -1,10 d) -6

e) 72,5 f) 1,30 g) -5,29 h) 6,64

8. a) 1,206 b) -3,511 c) -0,7429 d) 0,4071

9. a) 31 b) 302 c) 105 d) 241 e) 101 f) 198

g) 155 h) 695975 i) 489 k) 45 l) 163 m) 287

10. a) Endziffer 5 (gilt für jede Potenz 5^n mit $n \in \mathbb{N}$);

Anfangsziffer 7, da $\lg 5^{150} = 0,84 \dots + 104$ und damit $5^{150} = 7,0 \dots \cdot 10^{104}$.

b) 150 Endnullen, Anfangsziffer 7 ($50^{150} = 5^{150} \cdot 10^{150}$, vgl. a))

- c) Die letzte Ziffer heißt 6, da die Folge der Endziffern der Potenzen von 2 reinperiodisch mit der 4stelligen Periode 2, 4, 8, 6 ist.

Aus $\lg 2^{1000} \approx 301,03$ folgt, daß die Mantisse dieses Logarithmus zwischen 025 und 035 liegt. In beiden Fällen beginnt der Numerus mit 10... Also hat 2^{1000} als erste Ziffer 1 und als zweite Ziffer die 0.

- d) 1) Erste Ziffer 1, letzte Ziffer 6

2) Erste Ziffer 3, letzte Ziffer 3, da die Endziffern der Potenzen von 7 die Periode 7, 9, 3, 1 haben und $7^7 = 4n + 3$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).

3) Erste Ziffer 3, letzte Ziffer 1 (Periode der Endziffern: 3, 9, 7, 1)

169/11. a) 1) 1 2) 7 3) 10 b) 1) -1 2) -6 3) 0,5

c) 1) 9,966 2) 4,322 3) -0,3219 4) 1,161

12. a) 1) $1 = \underline{1} \cdot 2^0 =: \underline{1}_2$; $[\lg 1] + 1 = 0 + 1 = 1$

2) $5 = \underline{1} \cdot 2^2 + \underline{0} \cdot 2^1 + \underline{1} \cdot 2^0 =: \underline{101}_2$; $[\lg 5] + 1 = 2 + 1 = 3$

3) $32 = \underline{100000}_2$; $[\lg 32] + 1 = 5 + 1 = 6$

4) $100 = \underline{1100100}_2$; $[\lg 100] + 1 = 6 + 1 = 7$

Die Ergebnisse entsprechen der Behauptung.

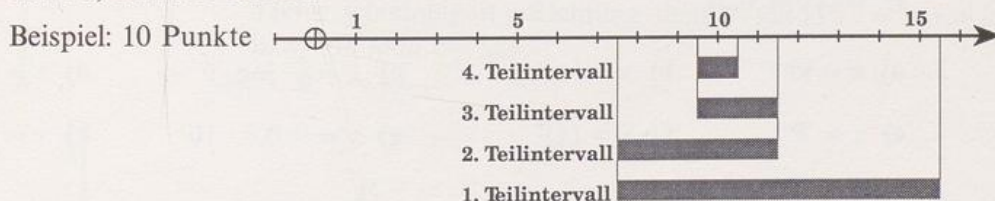
- b) Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $k \in \mathbb{N}_0$, so daß $2^k \leq n < 2^{k+1}$ gilt (2^k ist die größte in n enthaltene Zweierpotenz). Dann lautet die Darstellung von n im Zweiersystem $n = 1 \cdot 2^k + z_{k-1} \cdot 2^{k-1} + z_{k-2} \cdot 2^{k-2} + \dots + z_1 \cdot 2^1 + z_0 \cdot 2^0$, $z_i \in \{0, 1\}$, also kurz $n = \underline{1z_{k-1}z_{k-2}\dots z_1z_0}_2$; die Darstellung ist also $(k+1)$ -stellig.

Aus $2^k \leq n < 2^{k+1}$ folgt $k \leq \lg n < k+1$, also $[\lg n] = k$. Damit gilt $[\lg n] + 1 = k+1$; das ist die Stellenzahl von n im Zweiersystem.

13. a) Man wendet das Halbierungsverfahren an:

1. Frage: »Ist die Zahl kleiner als 8?« Die Antwort bestimmt die richtige Hälfte des Punktingtervalls, die noch 8 Zahlen enthält.

Mit der 2., 3. und 4. Frage schränkt man analog die Zahl der Möglichkeiten auf 4, dann 2, dann 1 Zahl ein.



- b) Die Gegenstände seien mit 1 bis n numeriert. Zu $n > 1$ gibt es eindeutig $k \in \mathbb{N}$, so daß $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Man wendet das Halbierungsverfahren auf die Folge 1, 2, 3, ..., 2^k (bzw. auf das Intervall $[0, 5; 2^k + 0,5]$) an. Nach i Schritten enthält die verbleibende Teilfolge noch $\frac{2^k}{2^i} = 2^{k-i}$ Zahlen, also nach k Schritten genau 1 Zahl. Man benötigt also höchstens k Fragen. Wegen $2^{k-1} < n \leq 2^k$ gilt $k-1 < \lg n \leq k$. Im Fall $\lg n = k$, also $n = 2^k$, ist $[\lg n] = k$; ansonsten gilt $[\lg n] = k-1$.

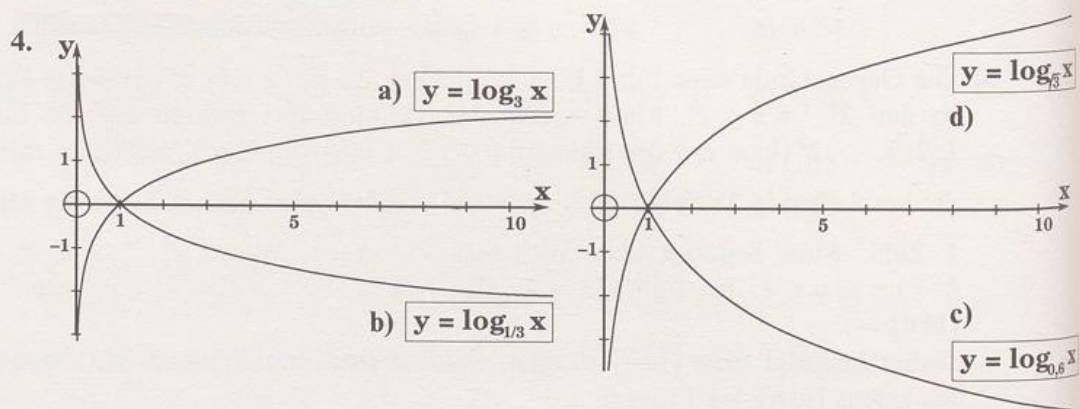
Daher benötigt man $[\lg n]$ Fragen, wenn n eine Zweierpotenz ist, ansonsten höchstens $[\lg n] + 1$ Fragen.

Aufgaben zu 7.3.3

- 170/1. a) $[0; 1]$, $[0,5; 1]$, $[0,5; 0,75]$, $[0,625; 0,75]$, $[0,625; 0,6875]$
 b) $[-1; 0]$, $[-1; -0,5]$, $[-0,75; -0,5]$, $[-0,75; -0,625]$, $[-0,6875; -0,625]$
 c) $[3; 4]$, $[3; 3,5]$, $[3,25; 3,5]$, $[3,25; 3,375]$, $[3,3125; 3,375]$
 d) $[2; 3]$, $[2; 2,5]$, $[2; 2,25]$, $[2,125; 2,25]$, $[2,1875; 2,25]$
 e) $[-1; 0]$, $[-0,5; 0]$, $[-0,25; 0]$, $[-0,125; 0]$, $[-0,125; -0,0625]$
 f) $[1; 2]$, $[1,5; 2]$, $[1,75; 2]$, $[1,875; 2]$, $[1,875; 1,9375]$
2. Wenn man mit einem Intervall der Länge 1 beginnt und das Halbierungsverfahren anwendet, hat das 7. Intervall die Länge $\frac{1}{64}$. Seine Intervallmitte m_7 hat dann vom gesuchten Logarithmus einen Abstand, der kleiner als $\frac{1}{128}$, also kleiner als $\frac{1}{100}$ ist.
- a) $[1; 2]$, $[1; 1,5]$, $[1; 1,25]$, $[1,125; 1,25]$, $[1,1875; 1,25]$, $[1,21875; 1,25]$,
 $[1,21875; 1,234375]$;
 $\log_6 9 = 1,2265625 \pm 0,0078125$.
- b) $[-1; 0]$, $[-0,5; 0]$, $[-0,5; -0,25]$, $[-0,375; -0,25]$, $[-0,375; -0,3125]$,
 $[-0,34375; -0,3125]$, $[-0,328125; -0,3125]$;
 $\lg 0,8 = -0,3203125 \pm 0,0078125$.
- c) $[2; 3]$, $[2; 2,5]$, $[2; 2,25]$, $[2; 2,125]$, $[2,0625; 2,125]$, $[2,0625; 2,09375]$,
 $[2,078125; 2,09375]$;
 $\lg 123 = 2,0859375 \pm 0,0078125$.

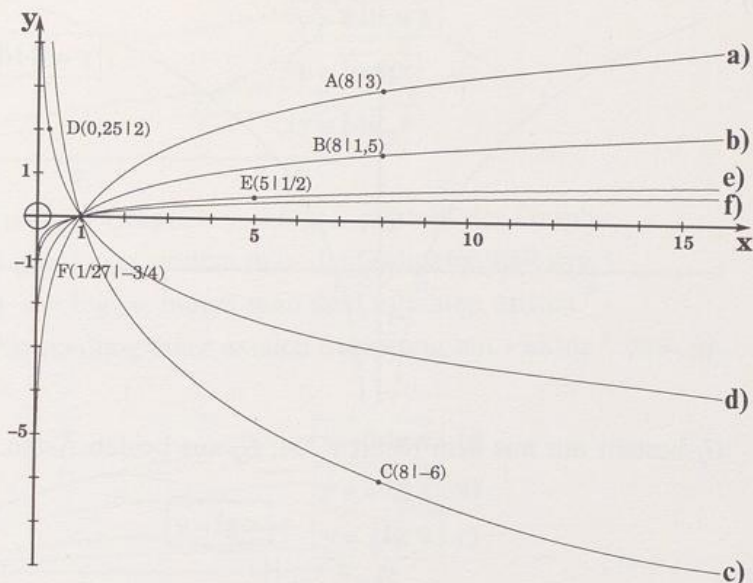
Aufgaben zu 7.4

- 179/1 a) $\mathbb{R}^+$ b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ c) $\mathbb{R}^+$ d) $\{x | x > 2,5\}$ e) $\{x | x > -2,5\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{1,5\}$
2. a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e) $\{x | |x - 2| > 3\} = \mathbb{R} \setminus [-1; 5]$
 f) $\mathbb{R} \setminus \{-4; 0,5\}$
3. a) $x = \lg y$ b) $x = \log_{\frac{1}{3}} y$ c) $x = \frac{1}{2} \cdot \log_5 y$ d) $x = 2 - \log_{0,1} y$
 e) $x = 2^y$ f) $x = (\frac{2}{3})^y$ g) $x = -0,5 \cdot 10^y$ h) $x = 0,1^{2y}$

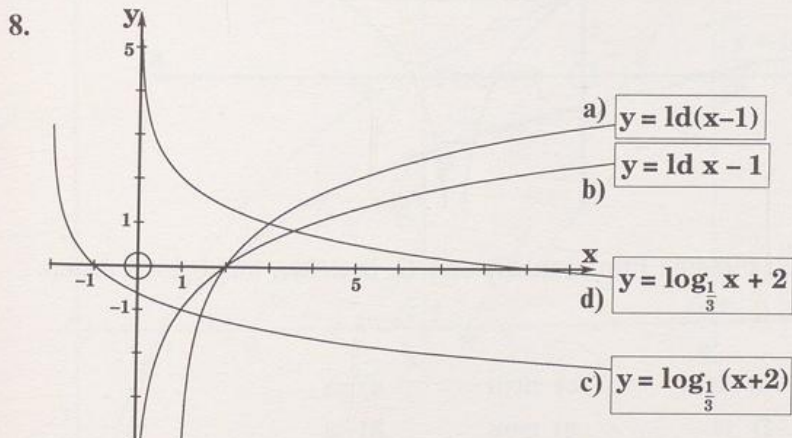
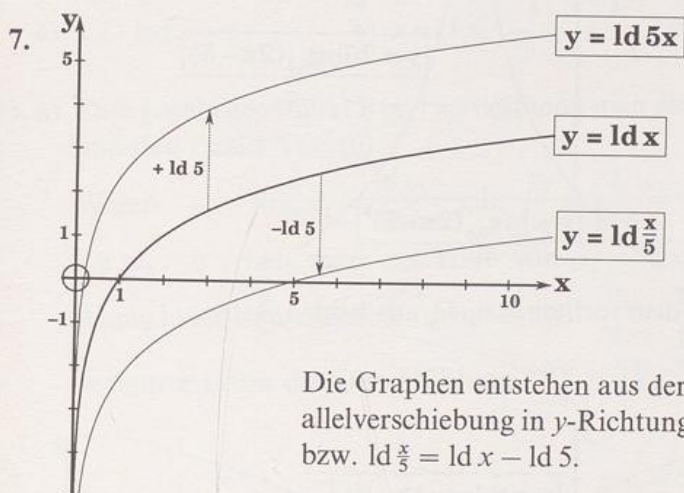


179/5. Basis b : a) 2 b) 4 c) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d) 0,5 e) 25 f) 81

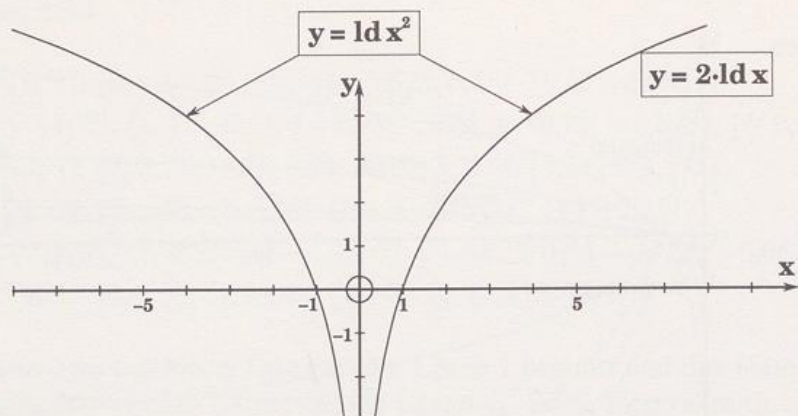
Graphen:



6. Zu den Punkten $P(x|y)$ mit $x > 0$, $x \neq 1$ und $y \neq 0$ gibt es genau eine, zu den Punkten $Q(1|y)$ mit $y \neq 0$ gibt es keine Logarithmusfunktion. Durch $E(1|0)$ geht der Graph jeder Logarithmusfunktion.

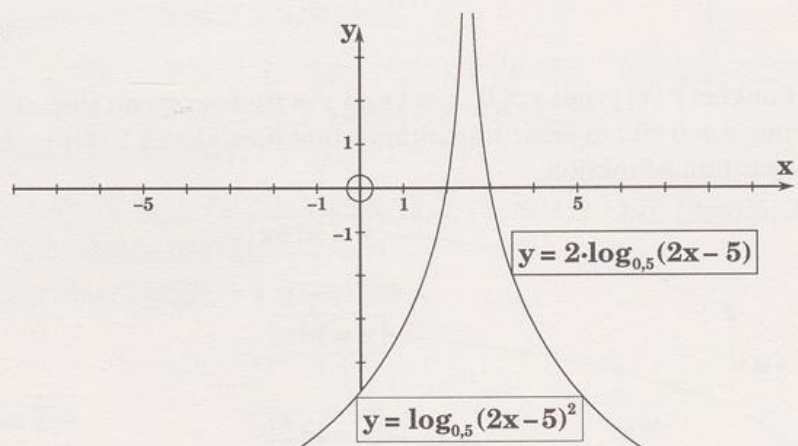


179/9. a)



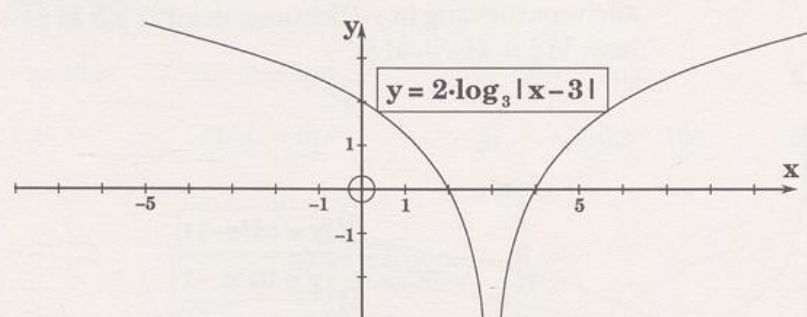
G_f besteht nur aus dem rechten Ast, G_g aus beiden Ästen.

b)



G_f besteht nur aus dem rechten Ast, G_g aus beiden Ästen.

c)



f und g sind dieselbe Funktion. G_f und G_g bestehen aus beiden Ästen.

10. a) ja

b) nein

c) nein

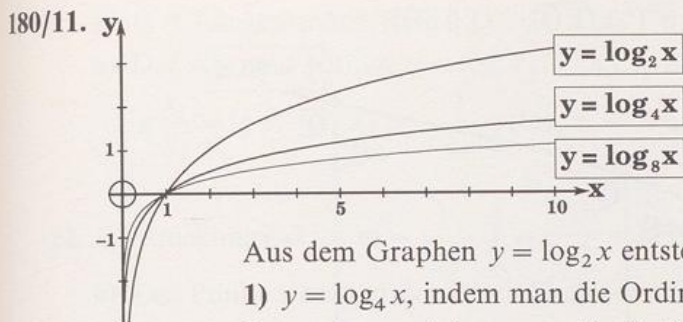
d) ja

e) nein

f) ja

g) nein

h) ja

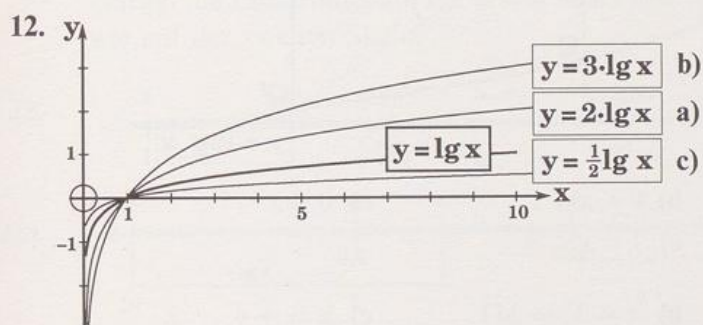


Aus dem Graphen $y = \log_2 x$ entsteht der Graph

1) $y = \log_4 x$, indem man die Ordinaten halbiert,

2) $y = \log_8 x$, indem man die Ordinaten drittelt.

(Anwendung einer axialen Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$)



Es handelt sich wieder um die Graphen von Logarithmusfunktionen, und zwar um

a) $x \mapsto \log_{\sqrt{10}} x$

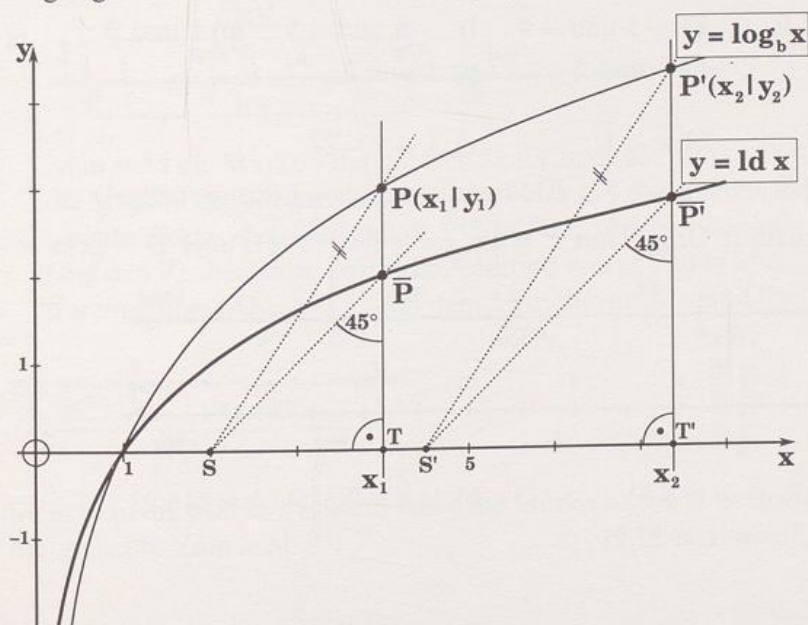
b) $x \mapsto \log_{\sqrt[3]{10}} x$

c) $x \mapsto \log_{100} x$

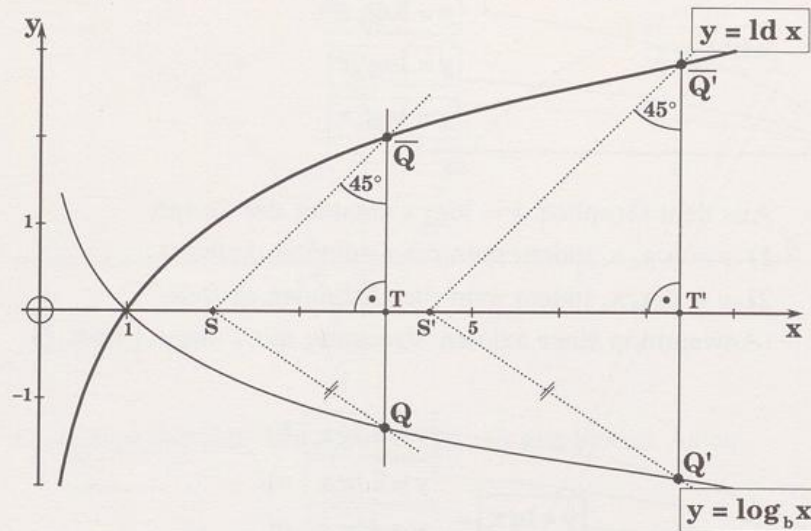
13. a) Zum gegebenen Punkt $P(x_1 | y_1)$ bestimmt man den Punkt $\bar{P}(x_1 | \bar{y}_1)$ mit $\bar{y}_1 = \lg x_1$ und den Punkt $T(x_1 | 0)$.

Wegen $y_1 = \log_b x_1 = \frac{\lg x_1}{\lg b}$ gilt $\frac{y_1}{\bar{y}_1} = \frac{1}{\lg b} = \text{const.}$

Zu $x_2 > 0$ erhält man mit Hilfe von $\bar{y}_2 = \lg x_2$ das gesuchte y_2 durch eine Ähnlichkeitskonstruktion, denn es gilt $\frac{y_2}{\bar{y}_2} = \frac{y_1}{\bar{y}_1}$. Die Abbildung zeigt eine geeignete Form der Durchführung. ($\overline{ST} = \overline{TP}$, $\overline{S'T'} = \overline{T'P'}$, $S'P' \parallel SP$)



b) Analog zu a) ($\overline{ST} = \overline{TQ}$, $\overline{S'T'} = \overline{T'Q'}$, $S'Q' \parallel SQ$)



180/14. a) $x > 1$

d) $x > 5$

b) $0 < x < 1$

e) $1 < x < 5$

c) $0 < x < 1$

15. a) $x = 4$

d) $x_1 = 4; x_2 = -2$

b) $x = 3^5 = 243$

e) $x = 125$

c) $x = \pm 4$

f) $x = \sqrt[4]{0,2} \approx 0,66874$

16. a) $\log_2 5 < \log_2 7$

c) $\log_7 \frac{3}{5} < \log_7 \frac{5}{8}$

e) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 15 < \log_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} 0,15$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 7$

d) $\log_{0,2} 0,7 < \log_{\frac{1}{5}} 0,699$

f) $\log_{\pi} 1 > \log_{\pi} \frac{12}{13}$

17. Der Logarithmus liegt zwischen

a) 2 und 3

b) 3 und 4

c) 0 und 1

d) 1 und 2

e) 3 und 4

f) -1 und 0

g) -7 und -6

h) -3 und -2

i) -1 und 0

k) -5 und -4

l) -6 und -5

m) 1 und 2

n) 2 und 3

o) 1 und 2

p) 1 und 2

18. a) $x < \sqrt{5}$

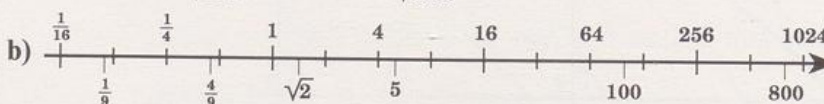
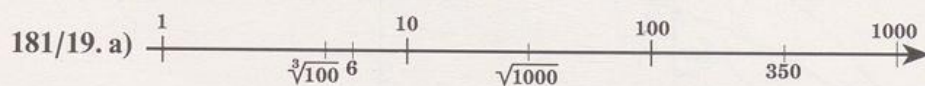
b) $x \geq 11$

c) $1 < x < 27$

d) $3 \leq x \leq 8$

e) $x > -\frac{1}{4}$ (Definitionsmenge = Lösungsmenge!)

f) $x > \frac{1}{4}$ (quadrat. Unglg. mit $L' = \{x | x < -1 \vee x > \frac{1}{4}\}$, aber $D = \{x | x > -\frac{1}{2}\}$)



20. a) $\lg a = 0,8 \Rightarrow a \approx 6,31$

c) $\lg c = 1,36 \Rightarrow c \approx 22,91$

b) $\lg b = 2,5 \Rightarrow b \approx 316,23$

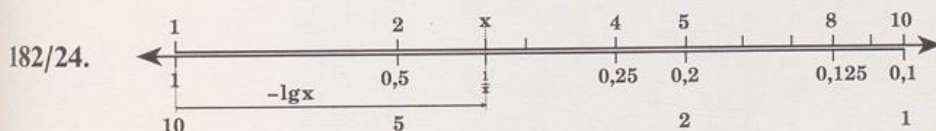
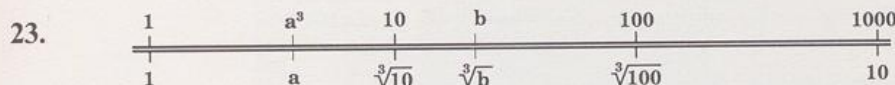
181/21. a) 1) 1 Längeneinheit (LE) 2) 3 LE 3) 2 LE

b) Der Abstand beträgt $d = \log_b x_1 - \log_b x_2$ Längeneinheiten.

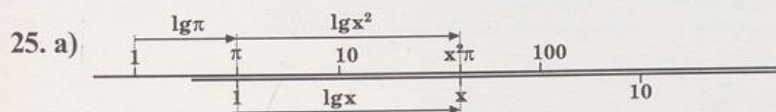
$$\lg \frac{x_1}{x_2} = \lg x_1 - \lg x_2 = \frac{1}{\log_b 10} (\log_b x_1 - \log_b x_2). \text{ Also ist } d = \log_b 10 \cdot \lg \frac{x_1}{x_2}.$$

22. a) Streckungsfaktor $m = \frac{1}{\lg 2} \left(= \frac{\lg 10}{\lg 2} = \lg 10 \right).$

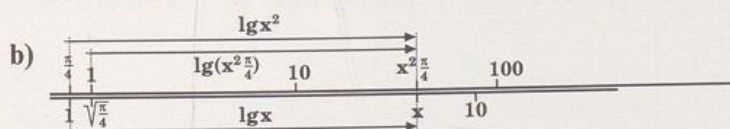
b) Der Punkt x hat auf der ersten Skala vom Punkt 1 die Entfernung $\lg x$, auf der zweiten Skala vom Punkt 1 die Entfernung $\lg x$. Nach der Streckung mit $m = \frac{1}{\lg 2}$ beträgt die Entfernung auf der ersten Skala $\lg x \cdot \frac{1}{\lg 2} = \lg 2$, ist also ebenso groß wie auf der zweiten Skala.



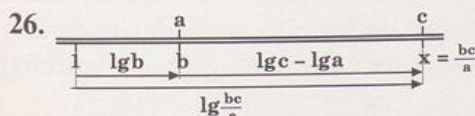
Auf der unteren, von rechts nach links orientierten Skala hat der Punkt $\frac{1}{x}$ vom Punkt 1 die Entfernung $-\lg x = \lg \frac{1}{x}$; die Kehrwertskala ist also eine logarithmische Skala. (Bei den Rechenstäben wird i. a. die in der unteren Zeile angegebene Beschriftung mit 1 bis 10 verwendet.)



Man stellt die Marke 1 der unteren Skala unter die Marke π der oberen. Dann hat in der oberen Skala der über x (unten) liegende Punkt von 1 die Entfernung $\lg \pi + \lg x^2 = \lg(x^2 \pi)$; man liest also den Inhalt $x^2 \pi$ der Kreisfläche ab.

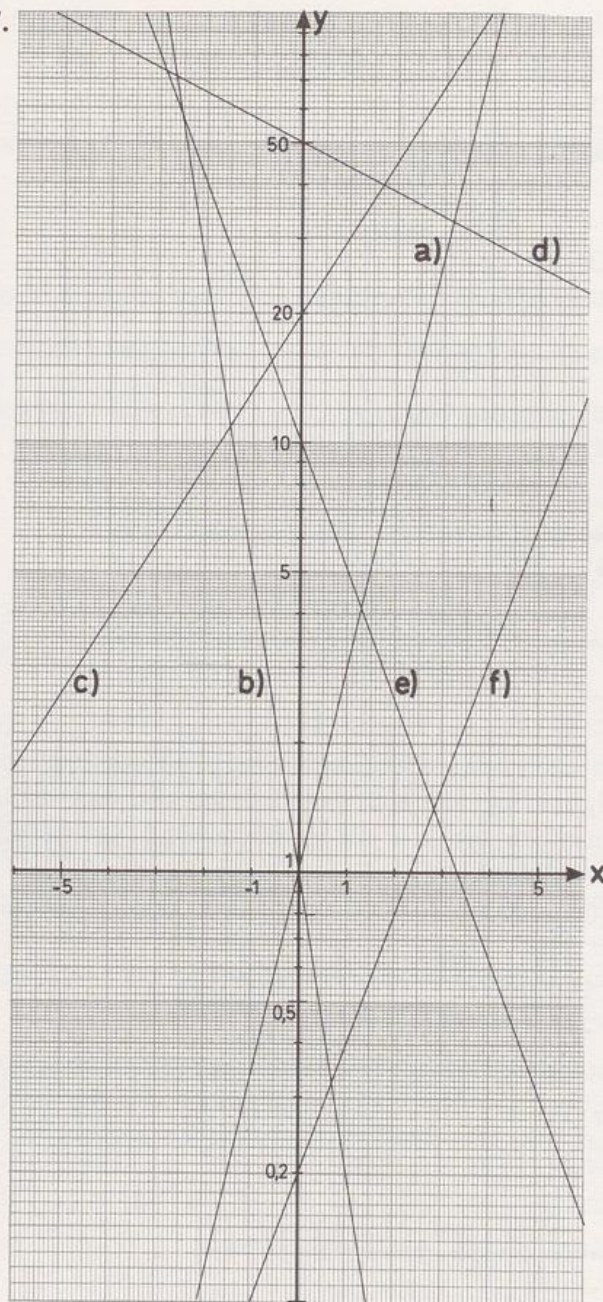


Man stellt die Marke 1 der unteren Skala unter die Marke $\frac{\pi}{4} (< 1)$ der oberen bzw. die Marke 1 der oberen Skala über die Marke $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ der unteren. Dann liest man über x (untere Skala) den Kreisinhalt $x^2 \frac{\pi}{4}$ auf der oberen Skala ab. (Bei den Rechenstäben wird die Addition von $\lg \frac{\pi}{4}$ zu $\lg x^2$ mit einem sog. Läufer durchgeführt (Abb. 175.1), auf dem 2 Striche mit Abstand $|\lg \frac{\pi}{4}|$ angebracht sind.)



Stellt man die Marke b (unten) unter die Marke a (oben), so liest man unter c (oben) die gesuchte Zahl x ab.

182/27.



28. a) $x \mapsto 100 \cdot 0,1^x$

b) $x \mapsto (\sqrt{10})^x$

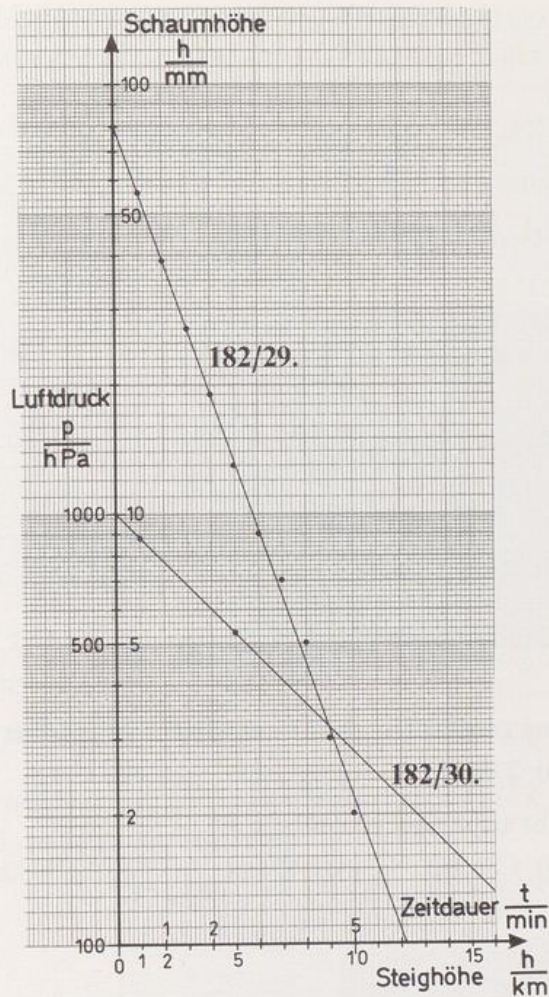
c) $x \mapsto 80 \cdot 2^x$

d) $x \mapsto 4 \cdot 0,5^x$

29. Da die Punkte mit guter Näherung auf einer Geraden liegen, kann man die Meßreihe als Bestätigung der Behauptung betrachten. Die Gerade verbindet ungefähr die Punkte $(0|80)$ und $(6|1)$. Die Gleichung der entsprechenden Exponentialfunktion lautet

$$h = 80 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{1}{80}}\right)^t, \text{ also } h \approx 80 \cdot 0,48^t. \text{ (Abbildung auf Seite 93)}$$

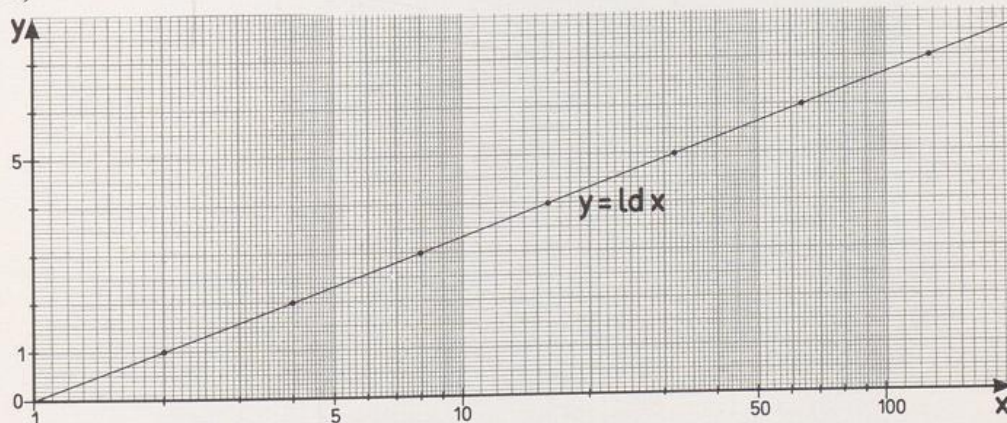
Abbildung
zu den
Aufgaben
182/29.
und
182/30.



30. Aus der Zeichnung ergibt sich $p_0 \approx 1000 \text{ hPa}$, $p(10) \approx 280 \text{ hPa}$.

(Die Aufgabe kann auch rechnerisch gelöst werden: Aus $879 \text{ hPa} = p_0 \cdot b^{-1}$ und $533 \text{ hPa} = p_0 \cdot b^{-5}$ folgt $879 : 533 = b^4$, also $b = \sqrt[4]{879 : 533} \approx 1,133$ und $p_0 = 879 \text{ hPa} \cdot b \approx 996 \text{ hPa}$, $p(10) \approx 285 \text{ hPa}$.)

183/31. a)

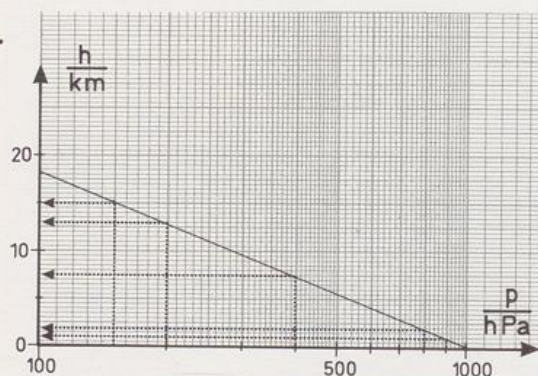


Der Graph ist vermutlich eine Gerade.

- b) Legt man auf die logarithmisch geteilte x -Achse eine äquidistant geteilte t -Achse so, daß $t = 0$ mit $x = 1$ und $t = 1$ mit $x = 10$ zusammenfällt, so gilt allgemein $t = \lg x$.

Wegen $y = \log_b x = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{1}{\lg b} \cdot \lg x$ hat die Funktion $x \mapsto \log_b x$ im (t, y) -System eine Gleichung der Form $y = a \cdot t$, mit $a = \frac{1}{\lg b} \neq 0$. Ihr Graph ist somit eine Gerade durch den Punkt $t = 0, y = 0$ bzw. $x = 1, y = 0$.

183/32.



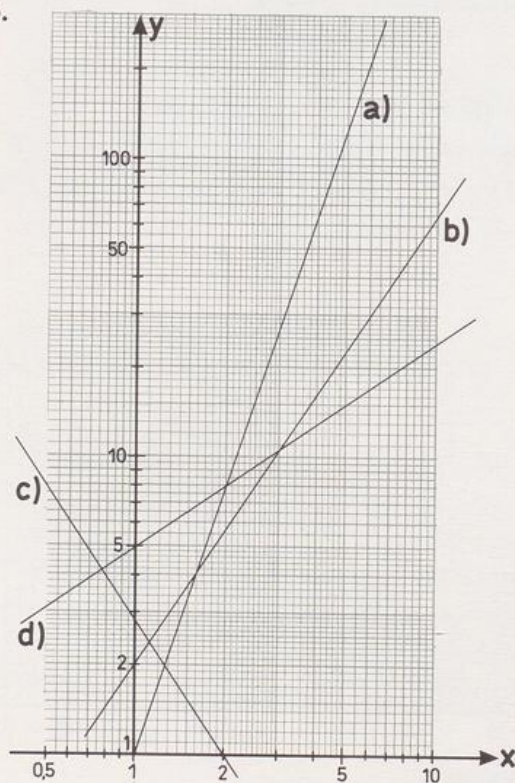
Aus der Zeichnung erhält man etwa folgende Näherungswerte:

- a) 1 km b) 2 km c) 7,5 km d) 13 km e) 15 km

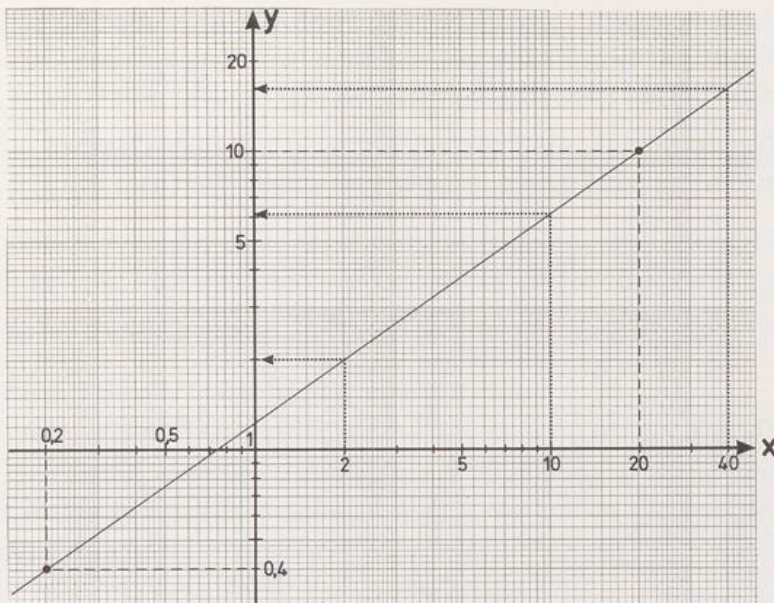
(Berechnung ergibt als genauere Werte:

- a) 0,92 km b) 1,86 km c) 7,40 km d) 12,94 km e) 15,24 km)

33.



183/34. a)



- 1) $y \approx 1,2$
- 2) $y \approx 2,0$
- 3) $y \approx 6,2$
- 4) $y \approx 16$

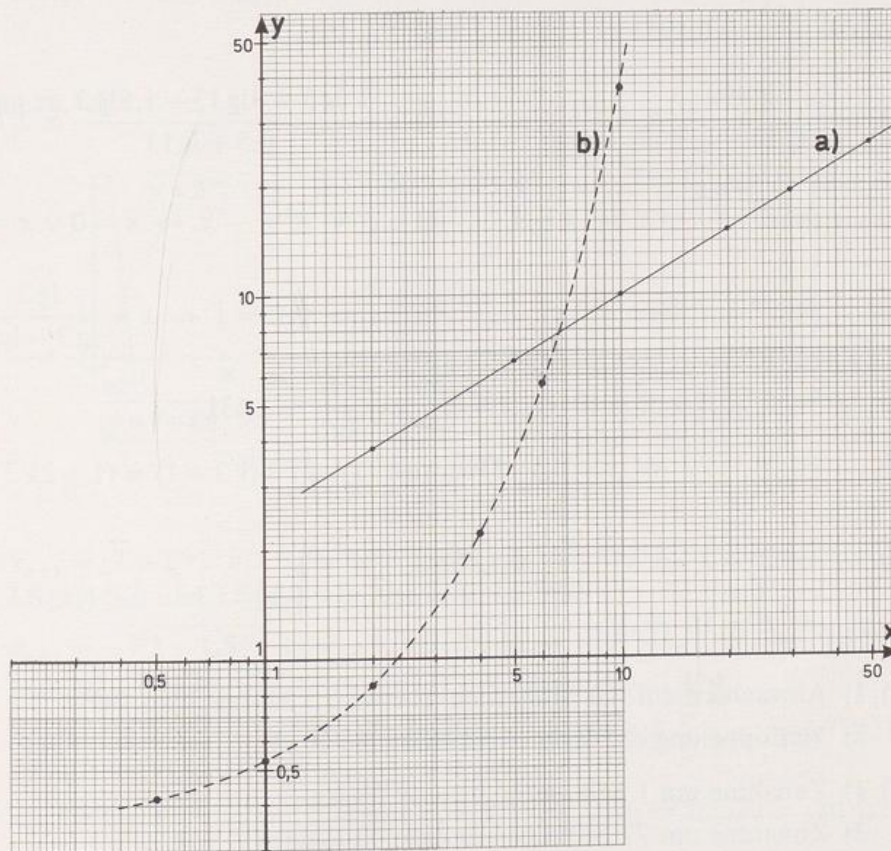
$$\text{b) } \begin{cases} 0,4 = C \cdot 0,2^e \\ 10 = C \cdot 20^e \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{0,4} = \left(\frac{20}{0,2}\right)^e \Leftrightarrow 25 = 100^e \Leftrightarrow e = (\lg 25) : 2 = \lg 5$$

$$10 = C \cdot 20^{\lg 5} = C \cdot 5 \cdot 2^{\lg 5} \Leftrightarrow C = \frac{2}{2^{\lg 5}} = 2^{1 - \lg 5} = 2^{\lg 2}$$

(Letzteres wegen $1 - \lg 5 = \lg 10 - \lg 5 = \lg \frac{10}{5} = \lg 2$).

Die Funktionsgleichung lautet also $y = 2^{\lg 2} \cdot x^{\lg 5}$.

35.



- a) Die Tabelle entspricht einer Potenzfunktion, da im doppelt-logarithmischen Koordinatensystem die Punkte mit sehr guter Näherung auf einer Geraden liegen. [y ist jeweils der auf 1 Stelle nach dem Komma gerundete Wert von $y = 2,5 \cdot x^{0,6}$.]
- b) Keine Potenzfunktion, die Punkte liegen nicht auf einer Geraden. [y ist jeweils der auf 2 geltende Ziffern gerundete Wert von $y = \frac{1}{3} \cdot 1,6^x$.]

Aufgaben zu 7.5.1

185/1. a) $x = 3$

b) $x = \frac{\lg 11}{\lg 3} \approx 2,183$

c) $x = \frac{1}{\lg 3 - \lg 7} \approx -2,718$

d) $x = \frac{\lg 0,6}{\lg 1,2} \approx -2,802$

2. a) $x = 5 + \frac{\lg 6}{\lg 4} \approx 6,292$

b) $x = \frac{7}{3}$

c) $x_1 = 1; x_2 = -1$

d) $x = 3 - \frac{\lg 0,5}{\lg 0,4} \approx 2,244$

3. a) $x = 3$

b) $x = \frac{-\lg 2}{1 - \lg 3,1} \approx -0,5918$

c) $x = \frac{4(\lg 5 - \lg 9) - \lg 2 + 1}{\lg 4 + \lg 5 - \lg 9} \approx -0,9289$

4. a) $x = \frac{\lg 5}{\lg 15} \approx 0,5943$

b) $x = 2$

c) $x = \frac{\lg 490}{\lg 32 - \lg 7} \approx 4,076$

d) $x = \frac{\lg 3 + 4\lg 13 - 1,5\lg 2}{0,5 + \lg 13} \approx 2,777$

186/5. a) $\dots \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = 4$

b) $\dots \Leftrightarrow x^2 = -x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

6. a) $\dots \Leftrightarrow 7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1$

b) $\dots \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg 3 - \lg 2} \approx 1,710$

7. a) $\dots \Leftrightarrow 5^x = 5 \vee 5^x = 10 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{\lg 5} \approx 1,431$

b) $\dots \Leftrightarrow 3^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0,5$ [Hinweis: $1 + 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = (1 + 2\sqrt{3})^2$]

8. a) $\dots \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1,585$

b) $\dots \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$

9. a) 1) Anwachsen auf 6,0 Milliarden in etwa 8,3 Jahren, also 1999
2) Verdoppelung der Weltbevölkerung bis 2037

- b) 1) Zunahme um 1 Million in etwa $4\frac{1}{2}$ Tagen
2) Zunahme um 77 Millionen in etwa 350 Tagen

Aufgaben zu 7.5.2

187/1. a) $x = 3^{1,5} \approx 5,196$ b) $x = \frac{1}{256} = 3,90625 \cdot 10^{-3}$ c) $x = 10^{0,1} \approx 1,259$

2. a) Die 1. Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -6$, die 2. nur die Lösung $x_1 = 1$.

Bemerkung: Es gilt $\lg[(x+4) \cdot (x+1)] = 1 \Leftrightarrow (x+4) \cdot (x+1) = 10$, aber $\lg(x+4) + \lg(x+1) = 1 \Leftrightarrow (x+4) \cdot (x+1) = 10 \wedge x+4 > 0 \wedge x+1 > 0$.

- b) Nein, die erste Gleichung hat $L_1 = \{ \}$, die zweite $L_2 = \{5\}$.

- c) Es gilt (1) $\Leftrightarrow (rx+s)(ux+v) = b^c$

und (2) $\Leftrightarrow (rx+s)(ux+v) = b^c \wedge rx+s > 0 \wedge ux+v > 0$.

Das heißt, von den Lösungen der Gleichung (1) sind nur diejenigen auch Lösungen von (2), welche zusätzlich die beiden Ungleichungen erfüllen; also $L_2 \subset L_1$.

188/3. a) $x = 14$ b) $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{3} \approx 1,721$

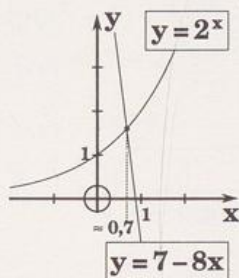
4. a) $x = 2$ b) $x = -1$ c) $x_1 = -1; x_2 = -21$

5. a) $x_1 = 7; x_2 = \frac{13}{9}$ b) $x = 0$

6. a) $x = 17$ b) $x = 7$

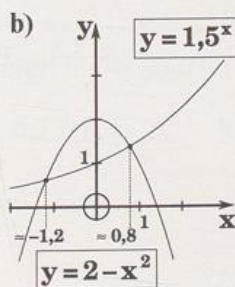
Aufgaben zu 7.5.3

192/1. a)



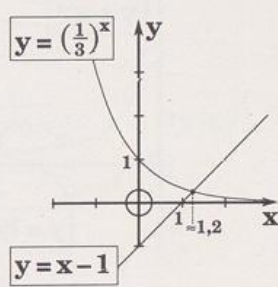
$x \approx 0,7$

b)



$\xi_1 \approx -1,2; \xi_2 \approx 0,8$

c)



$x \approx 1,2$

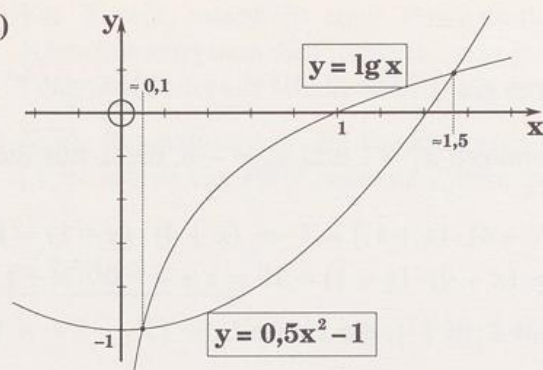
2. a) $x_{n+1} = (7 - 2^{x_n}) : 8$; $x_0 = 0,7$ ergibt $x_4 = 0,67538\dots$, $x_5 = 0,67537\dots$ mit $LS(x_4) > 0$ und $LS(x_5) < 0$; also $x \approx 0,6754$.

- b) $x_{n+1} = -\sqrt{2 - 1,5^{x_n}}$; $x_0 = -1,2$ ergibt $x_2 = -1,1745\dots$, $x_3 = -1,1742\dots$.
Da $LS(-1,1745) > 2$, $LS(-1,174) < 2$, gilt $\xi_1 \approx -1,174$.

$x_{n+1} = \sqrt{2 - 1,5^{x_n}}$; $x_0 = 0,8$ ergibt $x_6 = 0,78924\dots$, $x_7 = 0,78921\dots$ mit $LS(x_6) > 2$, $LS(x_7) < 2$; also $\xi_2 \approx 0,7892$.

- c) $x_{n+1} = 1 + 3^{-x_n}$; $x_0 = 1,2$ ergibt $x_5 = 1,2526\dots$, $x_6 = 1,2525\dots$ mit $LS(x_5) < 0$, $LS(x_6) > 0$; also $x \approx 1,253$.

192/3. a)



$$\xi_1 \approx 0,1$$

$$\xi_2 \approx 1,5$$

b) In der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ der Gleichung gilt:

$$0,5x^2 - 1 = \lg x \Leftrightarrow x^2 = 2(\lg x + 1) \Leftrightarrow x = \sqrt{2(\lg x + 1)}.$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2(\lg x_n + 1)}; x_0 = 1,5 \text{ ergibt } x_5 = 1,54131\dots, x_6 = 1,54135\dots$$

Für $f(x) := 0,5x^2 - 1 - \lg x$ gilt $f(x_6) < 0$, $f(1,5415) > 0$; also $\xi_2 \approx 1,541$

Die andere Lösung kann man mit dieser Iteration nicht berechnen.

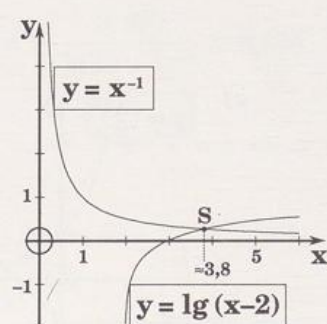
c) Für $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\sqrt{2}\}$ gilt

$$0,5x^2 - 1 = \lg x \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 2x \lg x \Leftrightarrow x = \frac{2x \lg x}{x^2 - 2}.$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n \cdot \lg x_n}{x_n^2 - 2}; x_0 = 0,1 \text{ ergibt } x_6 = 0,10114\dots, x_7 = 0,10116\dots \text{ Es gilt}$$

$f(x_7) > 0$, $f(0,1012) < 0$; also $\xi_1 \approx 0,1012$.

4. a)



$$x_s \approx 3,8; y_s \approx 0,3$$

b) $\frac{1}{x} = \lg(x-2) \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{x}} + 2 = x$ (für $x > 2$).

$$x_{n+1} = 10^{\frac{1}{x_n}} + 2; x_0 = 3,8 \text{ ergibt } x_3 = 3,826\dots, x_4 = 3,825\dots$$

Für $f(x) := \frac{1}{x} - \lg(x-2)$ gilt $f(x_3) < 0$, $f(x_4) > 0$; also $x_s \approx 3,83$ und $y_s \approx 0,26$.

193/5. a)

x	$x < 0$	0	1	$x > 1$
y	$y < -7$	-7	3	$y > 3$

, also Nullstellen in $[0; 1]$.

$$x_{n+1} = \lg(9 - 2^{x_n}); x \approx 0,8567.$$

b)

x	$x < 0$	0	1	2	3	4	$x > 4$
y	$y > 5$	5	-3	-3	-1	1	$y > 1$

,

also Nullstellen ξ_1, ξ_2 in $[0; 1]$ bzw. $[3; 4]$.

$$5 - x \cdot 2^{4-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2^{4-x}} = 2^x \cdot \frac{5}{16} = 2^x : 3,2.$$

$x_{n+1} = 2^{x_n} : 3,2$ liefert $\xi_1 \approx 0,4173$ (aber nicht ξ_2).

$$5 - x \cdot 2^{4-x} = 0 \Leftrightarrow 2^x = 3,2x \Leftrightarrow x = \frac{\lg(3,2x)}{\lg 2} \quad (\text{für } x > 0).$$

$$x_{n+1} = \frac{\lg(3,2x_n)}{\lg 2} \quad \text{liefert } \xi_2 \approx 3,475 \quad (\text{aber nicht } \xi_1).$$

Auch aus der Umformung $x \cdot (5 - x \cdot 2^{4-x}) = 0$ lassen sich brauchbare Iterationsformeln gewinnen:

$$x_{n+1} = \frac{3,2x_n^2}{2^{x_n}} \quad \text{liefert } \xi_2, \quad x_{n+1} = \sqrt{(x_n \cdot 2^{x_n}) : 3,2} \quad \text{liefert } \xi_1.$$

c)

x	$0,5 < x < 1$	1	2	$x > 2$
y	$y < 0$	-2	1,47...	$y > 0$

, also Nullstelle in $[1; 2]$.

$$\lg(2x-1) + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 - \lg(2x-1)}{3}.$$

$$x_{n+1} = \frac{5 - \lg(2x_n - 1)}{3} \quad \text{liefert } x \approx 1,558.$$

d)

x	$x < 4$	4	4,5	4,7	$4,7 < x < 5$
y	$y > 0$	0,954...	0,327...	-0,373...	$y < 0$

Es gibt eine Nullstelle in $[4,5; 4,7]$.

$$\lg(x^2 + 1) + \lg(5 - x) = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 2^{-\lg(x^2 + 1)}$$

$$x_{n+1} = 5 - 2^{-\lg(x_n^2 + 1)} \quad \text{liefert } x \approx 4,607.$$

6. a) $x_{n+1} = \cos x_n$; $x \approx 0,7391$ b) $x_{n+1} = \sqrt{\sin x_n}$; $x \approx 0,8767$

c) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan x_n}}$; $x \approx 0,7274$

7. a) $J(r) = \frac{P}{4r^2\pi}$. $J(r)$ ist bei konstanter Leistung proportional zu $\frac{1}{r^2}$.

b) 0 phon

c) 1) $10J_0$ 2) 10^4J_0 3) 10^8J_0 4) $10^{13}J_0$

d) Intensität in 1 m Entfernung: $J(1) = 10^4J_0$ (vgl. c))

Intensität in x m Entfernung: $J(x) = \frac{1}{x^2} \cdot J(1)$ (vgl. a))

Es muß gelten:

$$J(x) \leq J_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot 10^4J_0 \leq J_0 \Rightarrow x \geq 100.$$

Man muß sich mindestens 100 m von der Schallquelle entfernen.

- e) In 10 m Entfernung ist die Intensität 40^2 mal so groß wie in 400 m Entfernung.
Also gilt:

$$\begin{aligned} L(10) &= 10 \lg \left(\frac{J(10)}{J_0} \right) \text{ phon} = 10 \cdot \lg \left(\frac{1600 \cdot J(400)}{J_0} \right) \text{ phon} = \\ &= 10 \lg \left(\frac{J(400)}{J_0} \right) \text{ phon} + 10 \cdot \lg 1600 \text{ phon} = 80 \text{ phon} + 32 \text{ phon} = 112 \text{ phon}. \end{aligned}$$

f) 1) $L = 10 \lg \left(\frac{8 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} \right) \text{ phon} = 79 \text{ phon}$

2) $1,26 \cdot 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ bei 1 phon,
 $10^{-10} \text{ W m}^{-2}$ bei 20 phon,
 10^{-2} W m^{-2} bei 100 phon,
 10 W m^{-2} bei 130 phon.

3) $J(5) = \frac{5}{\pi} \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$; $L(5) = 10 \lg \left(\frac{5}{\pi} \cdot 10^{10} \right) \text{ phon} = 102 \text{ phon}$

$J(10) = \frac{5}{4\pi} \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$; $L(10) = 10 \lg \left(\frac{5}{4\pi} \cdot 10^{10} \right) \text{ phon} = 96 \text{ phon}$

$J(50) = \frac{5}{\pi} \cdot 10^{-4} \text{ W m}^{-2}$; $L(50) = 10 \lg \left(\frac{5}{\pi} \cdot 10^8 \right) \text{ phon} = 82 \text{ phon}$

- g) Für einen Ton von 125 Hz ergeben sich die Intensitäten

$1,26 \cdot 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$ bei 1 phon,
 10^{-7} W m^{-2} bei 20 phon,
 10 W m^{-2} bei 100 phon,
 10^4 W m^{-2} bei 130 phon.

194/8. a) $J_1 : J_2 = \sqrt{10} : 1$, d.h., $J_1 \approx 3,16 \cdot J_2$.

b) 1) $\beta \approx 3,0 \text{ dB}$ 2) $\beta = 10 \text{ dB}$ 3) $\beta = 20 \text{ dB}$

c) Wegen $\frac{J_2}{J_1} = \frac{P_2}{P_1}$ gilt auch $\beta = 10 \lg \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \text{ dB}$.

$20 \text{ dB} = 10 \lg \left(\frac{P_2}{0,05 \text{ W}} \right) \text{ dB} \Rightarrow P_2 = 5 \text{ W}$.

d) $10 \cdot \lg \left(\frac{J_2}{J_1} \right) \text{ dB} = n \text{ dB} \Rightarrow J_2 = J_1 \cdot 10^{\frac{n}{10}}$;

$L_1 = 10 \lg \left(\frac{J_1}{J_0} \right) \text{ phon}$;

$L_2 = 10 \lg \left(\frac{J_1 \cdot 10^{\frac{n}{10}}}{J_0} \right) \text{ phon} = L_1 + 10 \cdot \frac{n}{10} \text{ phon} = L_1 + n \text{ phon}.$

Die Lautstärke ändert sich um n phon.