Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

18. 3. Beurteilungskriterien für Schätzfunktionen

$$L(p) := P_p(X_1 = a_1 \wedge X_2 = a_2 \wedge \ldots \wedge X_n = a_n).$$

Da in der Stichprobe die X_i stochastisch unabhängig sind, erhält man

$$L(p) = P_p(X_1 = a_1) \cdot P_p(X_2 = a_2) \cdot \ldots \cdot P_p(X_n = a_n).$$

Betrachten wir nun ein spezielles Stichprobenergebnis mit genau k Einsen, dann gilt

$$L(p) = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Das Maximum dieser Wahrscheinlichkeit finden wir durch Differenzieren von $L(p)$ nach p. Für $0 < k < n$ erhalten wir – die Fälle $k = 0$ und $k = n$ erledigt man analog –

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L(p)}{\mathrm{d}p} &= kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - (n-k)p^k(1-p)^{n-k-1} = \\ &= -p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(np-k).\end{aligned}$$

Als Nullstelle ergibt sich $p = \frac{k}{n}$; der Vorzeichenwechsel von $\frac{\mathrm{d}L(p)}{\mathrm{d}p}$ zeigt, daß es sich um eine Maximumstelle handelt.

$\hat{p}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ ist der Maximum-Likelihood-Schätzwert für den Kugelanteil p in der Urne. Die zugehörige Maximum-Likelihood-Schätzgröße $\hat{p}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist aber nichts anderes als die uns längst bekannte Zufallsgröße relative Häufigkeit H_n.

Es ist erfreulich, daß auch das Maximum-Likelihood-Prinzip die relative Häufigkeit eines Ereignisses als brauchbare Schätzgröße für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses liefert. Auf Grund der Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten, die durch die Gesetze der großen Zahlen wissenschaftlich abgesichert ist, war die relative Häufigkeit immer schon ein brauchbarer »Meßwert« für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

18.3. Beurteilungskriterien für Schätzfunktionen

Das Maximum-Likelihood-Prinzip ist ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen. Wie sollen wir uns aber entscheiden, wenn wir uns durch verschiedene Betrachtungsweisen mehrere Schätzfunktionen verschafft haben? Eine Festlegung auf eine Schätzfunktion ist nicht eindeutig möglich, da die Eignung einer Stichprobenfunktion zur Schätzung eines Parameters nach sehr unterschiedlichen Gesichtspunkten beurteilt werden kann. In den Jahren 1921 und 1925 hat *Ronald Aylmer Fisher* (1890–1962) vier Kriterien zur Beurteilung von Schätzfunktionen entwickelt.

1. Von einer Schätzgröße T_n für den Parameter ϑ wird man erwarten, daß ihre Werte, d.h. also die Schätzwerte, nach beiden Seiten um den unbekannten Wert

ϑ streuen, und zwar so, daß der Erwartungswert $\mathscr{E}T_n$ der Zufallsgröße Schätzgröße T_n gleich dem unbekannten Parameter ϑ ist. Schätzfunktionen, die diese Bedingung nicht erfüllen, weisen im Mittel einen systematischen Fehler, eine Tendenz nach einer Seite auf. Es lohnt sich daher

Definition 379.1: Eine Schätzgröße T_n für den Parameter ϑ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X heißt **erwartungstreu**, wenn $\mathscr{E}T_n = \vartheta$ ist.

Statt erwartungstreu findet man auch die Termini **unverzerrt**, **biasfrei** oder **unbias(s)ed**.*
2. Der allgemeine Wunsch, daß mit wachsendem Stichprobenumfang n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der aus der Stichprobe gewonnene Schätzwert in der unmittelbaren Umgebung des zu schätzenden Parameters ϑ liegt, schlägt sich nieder in

Definition 379.2: Eine Folge von Schätzgrößen T_n für den Parameter ϑ heißt **konsistent**** oder **asymptotisch zutreffend** bezüglich ϑ, wenn für $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} P(|T_n - \vartheta| \geqq \varepsilon) = 0$$

3. Bekanntlich ist die Varianz einer Zufallsgröße ein Maß dafür, wie stark die Werte der Zufallsgröße um ihren Erwartungswert streuen. Man wird daher unter den erwartungstreuen Schätzgrößen diejenigen bevorzugen, die eine kleine Varianz besitzen. Mit ihnen wird man den gesuchten Parameter »genauer« treffen. *Fisher* nannte eine erwartungstreue Schätzfunktion **effizient** oder **wirksamst**, wenn es keine andere erwartungstreue Schätzfunktion gibt, deren Varianz noch kleiner ist.
In der Praxis nimmt man oft in Kauf, daß eine Schätzgröße nicht erwartungstreu ist, wenn sie dafür eine sehr kleine Varianz besitzt und ihr Erwartungswert nahe genug beim zu schätzenden Parameter liegt; dann kann nämlich der mittlere Fehler kleiner sein als der bei einer erwartungstreuen, aber sehr weit gestreuten Schätzfunktion.
4. Auf den Begriff der **Suffizienz** wollen wir nicht eingehen.

In den folgenden Abschnitten wenden wir die gewonnenen Kriterien auf Schätzgrößen für die Parameter p, μ und σ^2 an.

18.4. Die relative Häufigkeit H_n als Schätzgröße

Nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip ist die relative Häufigkeit H_n eine brauchbare Schätzgröße für den Parameter Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses. Ist H_n erwartungstreu und konsistent?

* Das englische *bias* [gesprochen: baiəs] = *Neigung, Schräge, Tendenz* stammt vermutlich vom lateinischen *bifax* = *doppelblickend, schielend* ab, das aus *bis* (= *zweierlei*) und *facies* (= *Gesicht*) entstanden sein soll.

** consistere = sich hinstellen, an einer Stelle zum Stehen kommen.