Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

15. 5. Die Funktionen φ[...] und Φ[...]

15.5. Die Funktionen $\varphi_{\mu\sigma}$ und $\Phi_{\mu\sigma}$

Beim Beweis des lokalen und des integralen Grenzwertsatzes haben wir die binomial verteilten Zufallsgrößen standardisiert. Die Näherungsfunktionen φ und Φ approximierten also die standardisierte Dichtefunktion φ_n bzw. die standardisierte kumulative Verteilungsfunktion $u \mapsto F_p^n(u)$ der binomial verteilten Zufallsgröße. Macht man nun die Standardisierung bei den Funktionen φ bzw. Φ rückgängig, dann erhält man Funktionen, die die ursprüngliche Dichtefunktion f_n bzw. die ursprüngliche kumulative Verteilungsfunktion $x \mapsto F_p^n(x)$ approximieren. Ihre Terme gewinnt man durch folgende Überlegungen.

Auf Grund des lokalen Grenzwertsatzes lassen sich die Werte $\mathrm{B}(n; p; k)$ durch $\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ approximieren. Wir haben in **15.3.** die Funktion φ in Abhängigkeit vom Argument $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ diskutiert. Natürlich kann man auch x als unabhängige Variable nehmen. Man erhält dann eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\varphi_{\mu\sigma}$, die noch von den beiden Parametern μ und σ abhängt.

Definition 299.1: $\varphi_{\mu\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Die Eigenschaften von $\varphi_{\mu\sigma}$ ergeben sich auf Grund der Überlegungen von Seite 290 über die Funktion φ, die in der Form von Definition 299.1 sich als $\varphi_{0;1}$ schreibt. Der Graph von $\varphi_{\mu\sigma}$ geht nun aus dem Graphen von φ durch folgende geometrische Konstruktion hervor: Zunächst wird der Graph von φ in x-Richtung um μ verschoben. Dann wird der Abstand a eines Graphenpunkts von der Symmetrieachse $x = \mu$ mit σ multipliziert und gleichzeitig seine Ordinate $\varphi(a)$ durch

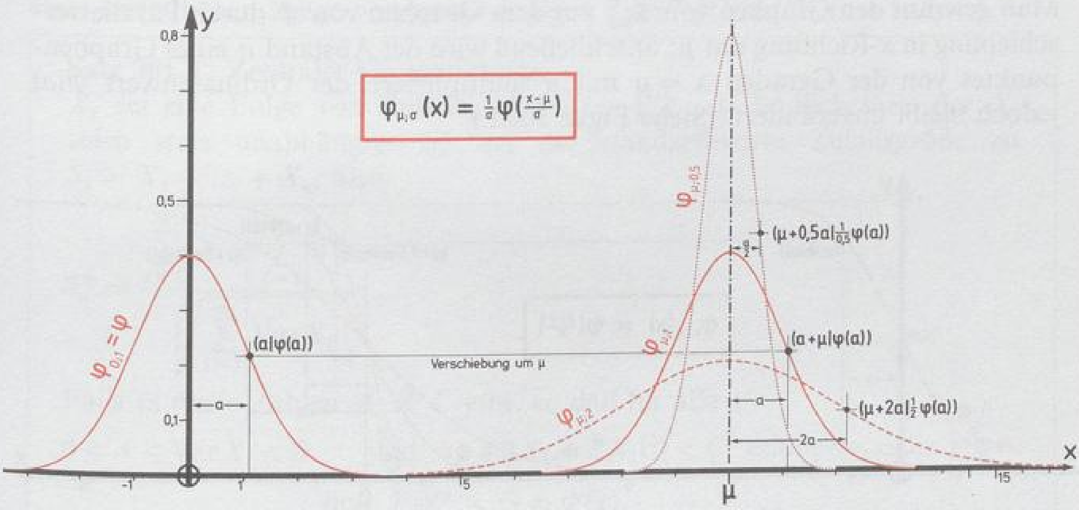

Fig. 299.1 Zusammenhang der Graphen von $\varphi_{\mu\sigma}$ mit dem Graphen von φ

σ dividiert, d.h., der Punkt $(a|\varphi(a))$ geht über in den Punkt $(\mu + a|\frac{1}{\sigma}(\varphi(a))$.
(Vergleiche Figur 299.1.) Der Graph von $\varphi_{\mu\sigma}$ ist also achsensymmetrisch zur Geraden $x = \mu$; dort nimmt $\varphi_{\mu\sigma}$ das Maximum $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ an. An den Stellen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegen die Wendepunkte mit den Ordinaten $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.
Mit Hilfe der Funktion $\varphi_{\mu\sigma}$ schreibt sich die Aussage des lokalen Grenzwertsatzes kurz in der Form:

$$\boxed{B(n; p; k) \approx \varphi_{\mu\sigma}(k).}$$

Die Funktion Φ wurde als Integralfunktion der Funktion φ definiert. Analog setzen wir fest:

Definition 300.1: $\Phi_{\mu\sigma}(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu\sigma}(t)\,dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Offensichtlich ist $\Phi_{0;1}$ die *Gauß*sche Integralfunktion Φ.
Es gilt

Satz 300.1: $\Phi_{\mu\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Beweis: Mit Hilfe der Substitution $u := \frac{t-\mu}{\sigma}$ erhält man

$$\Phi_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sigma\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Man gewinnt den Graphen von $\Phi_{\mu\sigma}$ aus dem Graphen von Φ durch Parallelverschiebung in x-Richtung um μ; anschließend wird der Abstand a eines Graphenpunktes von der Geraden $x = \mu$ mit σ multipliziert, der Ordinatenwert $\Phi(a)$ jedoch bleibt unverändert. (Siehe Figur 300.1.)

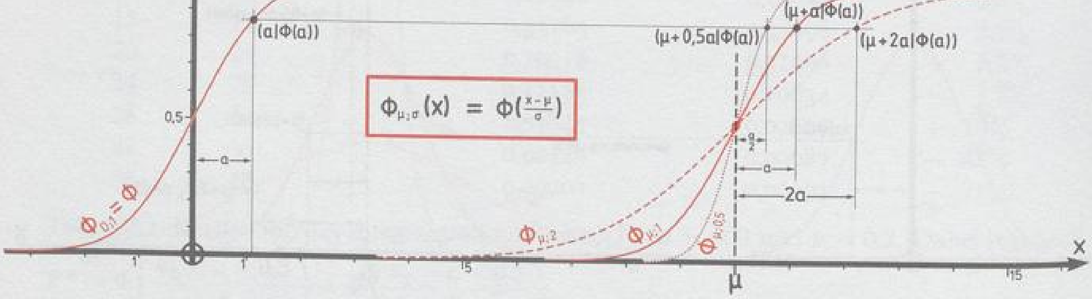

Fig. 300.1 Zusammenhang der Graphen von $\Phi_{\mu\sigma}$ mit dem Graphen von Φ