



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

15. 1. Problemstellung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83580](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83580)

bemerkt er, daß die Verallgemeinerung auf $p \neq \frac{1}{2}$ leicht sei. Die Richtigkeit seiner Behauptung ließ er – so 1755 sein Biograph *Matthew Maty* – durch Versuche überprüfen.

De Moivre gewann diese Erkenntnisse, indem er – in unserer Sprechweise – für die Anzahl X der Treffer in einer *Bernoulli*-Kette von erheblicher Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{npq} = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ die Wahrscheinlichkeit $P(|H_n - p| \leq \frac{\sigma}{n})$ abzuschätzen suchte. Sein wesentlich neuer Gedanke bestand darin, als Schranke ε die von ihm *modulus* genannte Standardabweichung $\frac{\sigma}{n}$ der Zufallsgröße H_n bzw. ein Vielfaches davon zu wählen.

$$\begin{aligned} \text{Nun gilt } P\left(|H_n - p| \leq \frac{\sigma}{n}\right) &= P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \frac{\sigma}{n}\right) = P(|X - np| \leq \sigma) = \\ &= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \sum_{\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma} B(n; p; k). \end{aligned}$$

Es ging also darum, die in das Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ fallenden Werte $B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ für große n zu berechnen oder zumindest möglichst genau abzuschätzen. Dies machte und macht auch heute noch erhebliche numerische Schwierigkeiten, weil der erste Faktor $\binom{n}{k}$ sehr groß wird, während der zweite Faktor $p^k q^{n-k}$ fast den Wert null ergibt. Da zudem die Verteilungen $B(n; p)$ mit wachsendem n immer niedriger werden, sind die interessierenden Werte $B(n; p; k)$ also noch dazu sehr klein.

Zur Lösung dieses Problems verlassen wir den historischen Weg und machen einen kleinen Umweg.

15.2. Standardisierte Zufallsgrößen

Das einzige Hilfsmittel, das wir bisher zur Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(|X - \mu| < t\sigma)$, wie sie in **15.1.** angesprochen wurden, zur Verfügung haben, ist die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*. Diese wird besonders einfach für solche Zufallsgrößen X , deren Erwartungswert $\mathcal{E}X = 0$ und deren Standardabweichung $\sigma(X) = 1$ sind. Aus $P(|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$ wird dann nämlich $P(|X| \geq t) \leq \frac{1}{t^2}$, woraus man vermuten kann, daß die Verteilungen solcher Zufallsgrößen zueinander ähnlich sind. Man führt daher eine besondere Bezeichnung ein:

Definition 278.1: Eine Zufallsgröße heißt **standardisiert**, wenn ihr Erwartungswert den Wert 0 und ihre Standardabweichung den Wert 1 haben.

Durch eine einfache Transformation kann man jeder nicht konstanten Zufallsgröße X mit endlichem $\mathcal{E}X$ eine standardisierte Zufallsgröße U_X zuordnen*:

* Der Buchstabe U kommt vom englischen Wort *unit*. Man beachte: Die standardisierte Zufallsgröße ist immer dimensionslos, auch wenn man, abweichend von unserem Vorgehen, Zufallsgrößen als benannte Größen zuläßt.