UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

14. 3. Tabellen der Binomialverteilung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Visual Library

approximieren. (Vergleiche dazu Aufgabe 264/**27**.) Dies ist gar nicht so erstaunlich, weil ja bei großen Kugelzahlen die Entnahme einiger weniger Kugeln keine wesentliche Änderung der Anteile in der Urne bewirkt. Man kann dann also das Ziehen mit Zurücklegen als gute Näherung für das Ziehen ohne Zurücklegen nehmen. Eine Veranschaulichung geben Tabelle 234.1 und Figur 233.1.

k	$B(10;\frac{1}{5};k)$	$H(N;K;10;k)$						
		N	50	100	500	1000	100000	1000000	1000000000
		K	10	20	100	200	20000	200000	200000000
0	0,107374		0,082519	0,095116	0,104951	0,106164	0,107362	0,107373	0,107374
1	0,268435		0,266192	0,267933	0,268417	0,268431	0,268435	0,268435	0,268435
2	0,301990		0,336898	0,318170	0,305050	0,303510	0,302005	0,301991	0,301990
3	0,201327		0,217792	0,209208	0,202849	0,202085	0,201334	0,201327	0,201327
4	0,088080		0,078469	0,084107	0,087395	0,087744	0,088077	0,088080	0,088080
5	0,026424		0,016142	0,021531	0,025488	0,025959	0,026419	0,026424	0,026424
6	0,005505		0,001868	0,003541	0,005096	0,005299	0,005503	0,005505	0,005505
7	0,000786		0,000115	0,000368	0,000689	0,000737	0,000786	0,000786	0,000786
8	0,000074		0,000003	0,000023	0,000060	0,000067	0,000074	0,000074	0,000074
9	0,000004		$4\cdot 10^{-8}$	0,000001	0,000003	0,000004	0,000004	0,000004	0,000004
10	$1\cdot 10^{-7}$		$1\cdot 10^{-10}$	$1\cdot 10^{-8}$	$7\cdot 10^{-8}$	$9\cdot 10^{-8}$	$1\cdot 10^{-7}$	$1\cdot 10^{-7}$	$1\cdot 10^{-7}$

Tab. 234.1 Vergleich einer Binomialverteilung mit verschiedenen hypergeometrischen Verteilungen mit gleichem $p = \frac{K}{N}$

14.3. Tabellen der Binomialverteilung

Die Berechnung von Werten einer Binomialverteilung ist rechnerisch meist sehr aufwendig. Da die Binomialverteilung aber eine sehr häufig auftretende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, hat man sie für oft vorkommende Werte der Parameter n und p tabellarisiert. Für die ebenfalls sehr häufig auftretende hypergeometrische Verteilung würde eine Tabellarisierung wegen der 3 Parameter N, K und n zu einem äußerst umfangreichen Tabellenwerk führen, da man 3 Tabelleneingänge benötigte. Erfreulicherweise kann man aber die hypergeometrische Verteilung für $n \ll \min\{N, K, N-K\}$ durch die Binomialverteilung $B\left(n; \frac{K}{N}\right)$ recht gut approximieren, was den Wert der Binomialverteilungstabellen, kurz Binomialtabellen, noch erhöht.

Wir wollen uns nun der Erstellung solcher Binomialtabellen zuwenden. Man wählt ein n und ein p und berechnet der Reihe nach für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ die Werte $B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ein solches Vorgehen führt zu sehr vielen Rechenvorgängen und ist daher zeitraubend. Es gibt aber einen einfachen Zusammenhang zwischen den Funktionswerten an der Stelle k und der Nachbarstelle $k-1$:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)} = \frac{\binom{n}{k}\cdot p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1}\cdot p^{k-1} q^{n-k+1}} =$$

$$= \frac{n!(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!n!}\,\frac{p}{q} =$$

$$= \frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{q}.$$

Wir erhalten also die **Rekursionsformel:**

$$\boxed{B(n;p;k) = \frac{(n-k+1)p}{kq}\,B(n;p;k-1)}$$

Sie gestattet – daher der Name* –, aus der Kenntnis eines Wertes den Wert des Vorgängers und auch den des Nachfolgers zu berechnen. Es genügt also, einen einzigen Wert $B(n;p;k)$ mühsam zu errechnen. Die jeweiligen Nachbarn $B(n;p;k-1)$ und $B(n;p;k+1)$ erhält man dann daraus durch einfache Division bzw. Multiplikation. Es empfiehlt sich dabei, aus Genauigkeitsgründen einen möglichst großen Startwert $B(n;p;k)$ zu wählen. (Den größten Wert werden wir im Abschnitt **14. 6.** bestimmen.)

Wir veranschaulichen das Vorgehen an der Binomialverteilung $B(8;\frac{1}{6})$. Gemäß Figur 232.1 empfiehlt sich als Startwert

$$B\left(8;\frac{1}{6};1\right) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{625000}{1679616} = 0{,}372108\ldots$$

Die Rekursionsformel liefert nun einerseits

$$B\left(8;\frac{1}{6};2\right) = \frac{(8-2+1)\cdot\frac{1}{6}}{2\cdot\frac{5}{6}}\,B\left(8;\frac{1}{6};1\right) = \frac{7}{10}\cdot\frac{625000}{1679616} = 0{,}260476\ldots,$$

andererseits

$$B\left(8;\frac{1}{6};0\right) = \frac{1\cdot\frac{5}{6}}{(8-1+1)\cdot\frac{1}{6}}\,B\left(8;\frac{1}{6};1\right) = \frac{5}{8}\cdot\frac{625000}{1679616} = 0{,}232568\ldots$$

Dieses Verfahren läßt sich leicht programmieren. Darüber hinaus kann man sich fast, wenn nun p das Intervall $]0;1[$ durchläuft, die halbe Rechenarbeit ersparen: Ist nämlich p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so ist $q = 1-p$ die Wahrscheinlichkeit für eine Niete beim Einzelversuch. In einer *Bernoulli*-Kette der Länge n ist dann die Anzahl der Treffer nach $B(n;p)$ und die der Nieten nach $B(n;q)$ verteilt, und da

P(»Anzahl der Treffer $= k$«) $= P$(»Anzahl der Nieten $= n-k$«)

gilt, folgt das

* recurrere = zurücklaufen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Symmetriegesetz für Binomialverteilungen:

$$B(n; p; k) = B(n; q; n-k)$$

Wegen dieser Symmetrie* genügt es, die Tabellen für die Binomialverteilungen nur bis $p = 0{,}5$ zu führen. Will man z. B. den Wert $B(8; \frac{5}{6}; 3)$ ermitteln, so sucht man den symmetrischen Wert $B(8; \frac{1}{6}; 5)$ in der Binomialtabelle. Diese Umformungsdenkarbeit erspart uns ein zweiter Eingang zu den Tabellen mit den Werten für $\frac{1}{2} \leqq p < 1$. Er ist rot unterlegt im Gegensatz zum grau unterlegten ersten Eingang. Für ihn gelten dann die rechts stehenden rot unterlegten k-Werte, die sich mit den in der gleichen Zeile links stehenden grau unterlegten k-Werten jeweils zu n ergänzen, wie der nebenstehende Ausschnitt aus den *Stochastik-Tabellen*** zeigt. (Tabelle 236.1)

Nun benötigt man aber sehr oft wie beim Problem I von *de Moivre* (Seite 229) nicht die $B(n; p; k)$-Werte, sondern die Werte $F_p^n(k)$ der kumulativen Verteilungsfunktion F_p^n. Man könnte diese gemäß $F_p^n(k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i)$ natürlich jedesmal aus den Tabellen der Binomialverteilung $B(n; p)$ errechnen. Diese Summation erspart man sich, wenn man F_p^n selbst tabellarisiert.

n	k \ p	$\frac{1}{6}$	
8	0	23257	8
	1	37211	7
	2	26048	6
	3	10419	5
	4	02605	4
	5	00417	3
	6	00042	2
	7	00002	1
	8	00000	0
n		$\frac{5}{6}$	p \ k

Tab. 236.1 Die ersten 5 Dezimalstellen (gerundet) der Werte von $B(8; \frac{1}{6})$ und $B(8; \frac{5}{6})$

Aus den Symmetrie-Eigenschaften der Binomialverteilungen folgen auch solche für die Funktionen F_p^n. Daher haben auch die Tabellen der kumulativen Werte einen zweiten Eingang für $p \geqq \frac{1}{2}$. Bei dessen Benutzung muß man allerdings beachten, daß man nicht mehr $F_p^n(k)$, sondern $1 - F_p^n(k)$ erhält! Wir wollen uns dies an Hand der Wahrscheinlichkeitsbedeutung von F_p^n überlegen.

Bekanntlich gilt $F_p^n(k) = P(Z \leqq k)$, wenn Z die Anzahl der Treffer in der *Bernoulli*-Kette ist. Gehen wir nun von den Treffern zu den Nieten über, dann erhalten wir $P(Z \leqq k) = P(\text{»Anzahl der Nieten} \geqq n-k\text{«})$.

Die Anzahl der Nieten gehorcht aber andererseits der Binomialverteilung $B(n; q)$. Damit gewinnen wir

$$\begin{aligned} F_p^n(k) &= P(\text{»Anzahl der Treffer} \leqq k\text{«}) = \\ &= P(\text{»Anzahl der Nieten} \geqq n-k\text{«}) = \\ &= 1 - P(\text{»Anzahl der Nieten} < n-k\text{«}). \end{aligned}$$

Ist $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, so kann man dafür schreiben

$$F_p^n(k) = 1 - P(\text{»Anzahl der Nieten} \leqq n-k-1\text{«}) = 1 - F_q^n(n-k-1).$$

Somit gilt das folgende

* Der Name Symmetriegesetz wird durch Satz 246.1 noch verständlicher werden.

** *Barth, Bergold, Haller*: Stochastik-Tabellen, Ehrenwirth Verlag.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Symmetriegesetz für kumulative binomiale Verteilungsfunktionen:

$$F_p^n(k) = 1 - F_{1-p}^n(n-k-1), \qquad \text{falls } k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Die Symmetriebeziehung für $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$ ist ohne praktische Bedeutung. Tabelle 237.1 zeigt uns einen Ausschnitt aus den *Stochastik-Tabellen*, an Hand dessen wir die Tafelbenutzung erklären wollen. Suchen wir z. B. den Wert $F_{5/6}^8(6)$, so könnten wir dafür $1 - F_{1/6}^8(8-6-1) = 1 - F_{1/6}^8(1)$ schreiben, $F_{1/6}^8(1)$ mit Hilfe des grauen Eingangs zu 0,60468 bestimmen und schließlich $F_{5/6}^8(6) = 1 - 0{,}60468 = 0{,}39532$ errechnen. Benutzen wir hingegen für p den roten Eingang unten, so müssen wir die rechts stehenden rot unterlegten k-Werte nehmen. Wir lesen zu $p = \frac{5}{6}$ und $k = 6$ unmittelbar den Wert 0,60468 ab; die Subtraktion dieses Wertes von 1 bleibt uns leider nicht erspart. Andererseits benötigt man bei vielen Aufgaben gerade den Wert $1 - F_p^n(k)$, den man für $p \geqq \frac{1}{2}$ dann direkt mit Hilfe des roten Eingangs aus der Tabelle entnehmen kann. Sucht man z. B. für $n = 8$ und $p = \frac{5}{6}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) = 1 - F_{5/6}^8(3)$, so liest man diesen Wert in Tabelle 237.1 mit Hilfe des roten Eingangs direkt ab zu $P(X \geqq 4) = 0{,}99539$.

n	k \ p	$\frac{1}{6}$	
8	0	23257	7
	1	60468	6
	2	86515	5
	3	96934	4
	4	99539	3
	5	99956	2
	6	99998	1
	7		0
n		$\frac{5}{6}$	p \ k

$F_p^n(k) = 1 -$ Tafelwert

Tab. 237.1 Die ersten 5 Dezimalstellen (gerundet) der kumulativen Verteilungsfunktionen $F_{1/6}^8$ und $F_{5/6}^8$.
Man beachte, daß sich die grau unterlegten k-Werte mit den rot unterlegten k-Werten nur zu $n-1$ ergänzen!

14.4. Veranschaulichung von Binomialverteilungen durch Experimente

Beispiel 1: Wir wollen die Werte von $B(10; \frac{1}{2})$ experimentell durch relative Häufigkeiten angenähert herstellen. Dazu müssen wir z. B. den 10fach-Wurf einer Laplace-Münze sehr oft ausführen und zählen, wie oft wir dabei 0 Adler, 1 Adler, ..., 10 Adler erhalten. Wir werten Tabelle 11.1 demgemäß aus: Je 2 untereinanderstehende Fünfergruppen werden als ein Ergebnis eines 10fach-Wurfes aufgefaßt. Es ergibt sich folgende Häufigkeitsverteilung:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl des Auftretens von k Adlern	0	0	4	10	14	23	16	10	2	1	0
Häufigkeit	0	0	0,0500	0,1250	0,1750	0,2875	0,2000	0,1250	0,0250	0,0125	0
$B(10; \frac{1}{2}; k)$	0,0010	0,0098	0,0439	0,1172	0,2051	0,2461	0,2051	0,1172	0,0439	0,0098	0,0010

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN