Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

Aufgaben

Zu 12.1.

1. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsgrößen X und Y sei wie nebenstehend definiert.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0,1	0,05	0,05
1	0,1	0,45	0,25

Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und von Y.

2. Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. X sei die Anzahl der Adler. Y sei die Nummer des Wurfs, bei dem zum ersten Mal Adler fällt. Y habe den Wert 4, falls dreimal Zahl fällt. Bestimme die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion und gib die Randwahrscheinlichkeiten an.

3. Ein Laplace-Würfel werde 3mal geworfen. Die Zufallsgröße X nehme den Wert 1 an, wenn beim 1. Wurf eine Sechs fällt, sonst den Wert 0. Y nehme den Wert 1 an, wenn mindestens eine Sechs fällt, sonst 0. Z sei die Anzahl der geworfenen Sechsen.
   a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X, Y und Z.
   b) Gib die gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y, von X und Z und von Y und Z an.

4. Von zwei Zufallsgrößen X und Y über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) sei folgendes bekannt:
   X hat die Wertemenge $\{0; 1\}$, die Wertemenge von Y ist $\{1; 2; 3\}$. Außerdem gilt $W_X(0) = 0{,}35$; $W_Y(1) = 0{,}2$; $W_Y(3) = 0{,}45$; $W_{X,Y}(1; 1) = 0{,}1$ und $W_{X,Y}(0; 2) = 0{,}2$.
   Gib die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Marginalwahrscheinlichkeiten an.

5. Aus einer Produktion wird eine Stichprobe von 4 Stück entnommen. Die Zufallsgröße X bedeute die Anzahl der Stücke ohne Defekt, die Zufallsgröße Y bedeute die Anzahl der Stücke in der Probe, die außerdem noch einer besonders scharfen Gütekontrolle standhielten. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsgrößen sei wie nebenstehend definiert.

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	0,10	0	0	0	0
1	0,15	0,05	0	0	0
2	0,35	0,10	0,05	0	0
3	0,10	0,03	0,02	0	0
4	0,02	0,02	0,01	0	0

   a) Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen für X und für Y.
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den 4 Probestücken höchstens 3 gute und darunter höchstens 1 sehr gutes ist?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens 2 Stücke der verschärften Kontrolle standhalten?
   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den 4 Probestücken höchstens 3 gute und darunter mindestens 2 sehr gute sind?

Zu 12.2.

6. Zeige: Die Zufallsgrößen $X_i :=$ »Augenzahl des i-ten Würfels«, $i \in \{1, 2\}$, beim Wurf zweier L-Würfel sind unabhängig.

7. X und Y seien unabhängige Zufallsgrößen mit folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen:

x	1	2	3
$W_X(x)$	0,2	0,3	0,5

y	10	20
$W_Y(y)$	0,2	0,8

Stelle die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion auf.

8. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsgrößen X und Y ist gegeben durch

$x \backslash y$	0	1	2
0	0,04	0,1	0,06
1	0,16	0,4	

a) Bestimme $W_{X,Y}(1; 2)$.
b) Bestimme die Randwahrscheinlichkeiten.
c) Sind X und Y unabhängig?

•9. Für das Schafkopfspiel (vgl. Aufgabe 188/**13**) werden folgende Zufallsgrößen definiert:
$A :=$ »Anzahl der Ober im Blatt des Spielers A«
$B :=$ »Anzahl der Ober im Blatt des Spielers B«
a) Berechne $P(A = a \wedge B = b)$.
b) Stelle die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $W_{A,B}$ auf.
c) Berechne zur Kontrolle die Randwahrscheinlichkeitsverteilung W_A und vergleiche sie mit W_X aus Aufgabe 188/**13**.
d) Sind A und B unabhängig?

10. Beweise: Ist eine von zwei Zufallsgrößen konstant, so sind beide unabhängig.

11. Eine Zufallsgröße X ist von sich selber unabhängig. Was läßt sich auf Grund dieser Information über X sagen?

Zu 12.3.

12. In einer Urne liegen vier Kugeln, die mit den Zahlen 0, 1, 2, 3 beschriftet sind. Wir ziehen zweimal je eine Kugel mit Zurücklegen. X sei die Zahl auf der ersten, Y die Zahl auf der zweiten gezogenen Kugel.
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und von Y.
b) Bestimme die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung.
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $A := X + Y$ und zeichne ihr Stabdiagramm.
d) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $B := X \cdot Y$ und zeichne ein Histogramm.
e) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $C := \max(X, Y)$ und zeichne ein Histogramm.
f) Berechne die Erwartungswerte von X, Y, A, B und C.
g) Berechne die Varianzwerte von X, Y, A, B und C.

13. Löse Aufgabe **12** für den Fall, daß die Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden.

•14. a) Wie berechnet sich $W_{X+Y}(a)$ aus den Werten von $W_{X,Y}$?
b) Wie berechnet sich $W_{X+Y}(a)$ aus den Werten von W_X und W_Y, falls X und Y unabhängig sind?
c) Berechne $W_{X+Y}(2)$ für die Zufallsgrößen X und Y aus Aufgabe 213/**1**.
d) Berechne $W_{A+B}(2)$ für die Zufallsgrößen A und B aus Aufgabe 214/**9**. Was bedeutet dieser Wert?

15. Zeige: Sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen, dann sind auch $X + a$ und $Y + b$ unabhängige Zufallsgrößen.

16. X sei die Zufallsgröße »Gewinn« des chuck-a-luck.
a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße $Y := X^2$ auf.
b) Stelle die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y auf.
c) Untersuche, ob die beiden Zufallsgrößen unabhängig sind.

17. Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ mit den Wahrscheinlichkeiten $W(x_i) = p_i > 0$ an. Zeige, daß dann gilt: X und X^2 sind genau dann unabhängig, wenn X^2 konstant ist.

Zu 12.4.1.

18. 3 L-Würfel werden geworfen. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße Augensumme.

19. 8 L-Münzen werden geworfen. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße $Z :=$ Anzahl der oben liegenden Adler.

20. Die Berechnung von $\mathscr{E}X$ kann sehr mühsam sein. Man kann sich aber die Rechnung vereinfachen, indem man einen günstigen Wert a wählt, so daß $\mathscr{E}(X+a)$ leicht zu berechnen ist. Unter Verwendung von Satz 204.1 erhält man für $\mathscr{E}X$ den Ausdruck $\mathscr{E}X = \mathscr{E}(X+a) - a$. Berechne nach diesem Verfahren den Erwartungswert folgender Zufallsgröße:

x	163	164	165	167	168	169	170	173
$W(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

21. **a)** Der Chef einer kleinen Firma hat die Angewohnheit, an seinem Geburtstag auf einen Zettel eine Zahl a aus der Menge der ersten hundert natürlichen Zahlen zu schreiben. Jeder der 30 Betriebsangehörigen versucht diese Zahl zu erraten. Falls es ihm gelingt, erhält er vom Chef 100 DM ausbezahlt. Mit welcher Ausgabe hat der Chef durchschnittlich pro Jahr zu rechnen, falls die Belegschaftsmitglieder jede Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit raten? Ist diese Annahme realistisch?

b) Mit welcher Ausgabe muß ein Chef rechnen, der 100 Angestellte hat, aber nur 50 DM jedem Erfolgreichen ausbezahlt?

c) Löse das Problem allgemein, wenn $a \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ist, die Firma n Angestellte hat und die Erfolgsprämie m DM beträgt.

22. *Das Treize-Spiel**. Die 13 Karten einer Farbe des Bridge werden gut gemischt und der Reihe nach gezogen. Als Treffer wertet man das Ereignis, daß die Nummer der Ziehung mit dem Zahlenwert der Karte übereinstimmt. Wie viele Treffer wird man im Mittel erreichen?

23. Zwei Urnen enthalten jeweils 10 Kugeln, die eine numeriert von 0 bis 9, die andere von 1 bis 10. Man zieht je eine Kugel und bildet das Produkt der gezogenen Zahlen. Wie groß wird dieses Produkt im Mittel sein?

Zu 12.4.2. und 12.4.3.

24. Eine L-Münze wird viermal geworfen. Berechne Erwartungswert und Varianzwert folgender Zufallsgrößen:

a) $A :=$ Anzahl der Adler **b)** $B :=$ Anzahl der Wappen

c) $L :=$ Größte Anzahl der direkt aufeinanderfolgenden Adler

d) $X :=$ Anzahl der Seitenwechsel.

25. Ein L-Würfel wird zweimal geworfen. X sei die Augenzahl des 1. Wurfs, Y die des 2. Wurfs. Berechne Erwartungswert und Varianzwert folgender Zufallsgrößen:

a) $A := X + 3$ **c)** $C := X + 2Y$ **e)** $E := |X - Y|$

b) $B := 3X$ **d)** $D := \max(X, Y)$ **f)** $F := \frac{1}{2}(X + Y)$

26. In einer Schachtel befinden sich 20 Perlen, darunter 4 wertvolle rosafarbene. Eine solche Perle koste 12 DM. Ein Besucher darf sich unbesehen 4 Perlen herausnehmen und die rosafarbenen darunter behalten. Dabei werden zwei verschiedene Verfahren angeboten:

•**a)** Die 4 Perlen werden auf einmal entnommen.

* Siehe Fußnote Seite 68.

b) Es wird 4mal je eine Perle entnommen. Ist sie nicht rosafarben, dann wird sie vor dem nächsten Zug zurückgelegt.

Berechne jeweils Erwartungswert und Varianzwert der Zufallsgröße »Wert der gewonnenen Perlen«.

27. *Cardano* (1501–1576) konnte bereits den Erwartungswert der Augensumme beim Spiel mit den blinden Würfeln (siehe Aufgabe 191/**29**) berechnen. Mach's ihm nach! – Berechne darüber hinaus die Varianz der Augensumme und vergleiche beide Werte mit denen der Zufallsgröße Augenzahl eines L-Würfels.

28. Beweise: $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var} X$.

•**29.** Für unabhängige Zufallsgrößen X und Y gilt $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$. Zeige, daß für die Standardabweichungen unabhängiger Zufallsgrößen nur

$$\sigma(X + Y) \leqq \sigma(X) + \sigma(Y)$$

gilt! Wann trifft die Gleichheit zu?

30. Ein Gerät besteht aus den Bauteilen A und B. Bauteil A fällt mit 20% Wahrscheinlichkeit während eines Jahres aus, Bauteil B unabhängig davon mit 2% Wahrscheinlichkeit. Die Reparatur von A kostet 70 DM, die von B 800 DM.

a) Berechne die mittleren Reparaturkosten für A bzw. B während eines Jahres und die zugehörigen Standardabweichungen.

b) Berechne auf zwei Arten (einmal direkt, einmal unter Verwendung der Ergebnisse aus a)) die mittleren Reparaturkosten pro Jahr für das Gerät und die zugehörige Standardabweichung.

31. Berechne unter Verwendung der Sätze 208.1 und 207.2 die Varianz der Zufallsgröße aus Aufgabe 215/**20**.

32. Hat eine Zufallsgröße die Wertemenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und sind alle Wahrscheinlichkeiten $W(x_i) > 0$, dann gilt auch die Umkehrung von Satz 208.1,(1). Formuliere diese Umkehrung und beweise sie.

33. Die Zufallsgröße X habe folgende Verteilung:

x	0	1	2	3	4
$W(x)$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

a) Bestimme den Erwartungswert μ und den Median m.

b) Zeige: $\mathscr{E}(X - a)^2$ nimmt für $a = \mu$ und $\mathscr{E}(|X - a|)$ nimmt für $a = m$ den kleinsten Wert an.

•**34.** Berechne beim *Bernoulli-Euler*schen Problem der vertauschten Briefe Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $X :=$ Anzahl der Briefe, die im richtigen Umschlag stecken, ohne die in Aufgabe 121/**80a)** aufgestellte komplizierte Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße zu benützen. Drücke dazu X durch die n Zufallsgrößen X_i aus, die folgendermaßen definiert sind:

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{falls Brief Nr. } i \text{ im Umschlag Nr. } i \text{ steckt;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu 12.5.

35. Die paarweise unabhängigen Zufallsgrößen X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ haben denselben Erwartungswert μ und dieselbe Standardabweichung σ. Berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung des arithmetischen Mittels $\bar{X}$ der Zufallsgrößen X_i für

a) $n = 10, \quad \mu = 1, \quad \sigma = 1;$

b) $n = 10, \quad \mu = 5, \quad \sigma = 3;$

c) $n = 100, \quad \mu = 5, \quad \sigma = 3.$

36. X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sind Kopien einer Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Wie groß muß man n wählen, damit die Standardabweichung des arithmetischen Mittels $\bar{X}$ der Zufallsgrößen X_i höchstens den Wert a hat?
a) $\mu = 0, \quad \sigma = 10, \quad a = 5$; **b)** $\mu = 0, \quad \sigma = 10, \quad a = 1$; **c)** $\mu = 10, \quad \sigma = 1, \quad a = \frac{1}{10}$.

37. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind paarweise unabhängige Zufallsgrößen, die alle den gleichen Erwartungswert μ und die gleiche Standardabweichung σ haben. S_n ist die Summe dieser n Zufallsgrößen, $\bar{X}$ ihr arithmetisches Mittel.
a) Gib die *Tschebyschow*-Ungleichung für S_n und $\bar{X}$ an.
b) Wie groß muß n sein, damit die Sicherheit dafür, daß sich $\bar{X}$ von seinem Erwartungswert um weniger als $t\sigma$ unterscheidet, mindestens 90% beträgt?
c) Löse **b)** für $\mu = 10, \sigma = 2$ und $t = \frac{1}{4}$.

38. Ein Ikosaeder trägt auf jeweils 2 seiner 20 dreieckigen Flächen (Bild 46.1) eine der 10 Zahlen $0, 1, \ldots, 9$. Es werde n-mal geworfen. X_i sei die Augenzahl des i-ten Wurfs.
a) Berechne Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für jedes X_i.
b) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung für die Augensumme S_n nach n Würfen. Was ergibt sich für $n = 10$ und $n = 100$?
c) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung für das arithmetische Mittel $\bar{X}$ der Augenzahlen nach n Würfen. Was ergibt sich für $n = 10$ und für $n = 100$?
d) Schätze mit der *Tschebyschow*-Ungleichung für **1)** 10, **2)** 100 Würfe die Wahrscheinlichkeit ab, daß das arithmetische Mittel der Augenzahlen in $[3; 6]$ bzw. $[4; 7]$ liegt.
e) Löse mit der *Tschebyschow*-Ungleichung: Wie oft muß man das Ikosaeder werfen, um mit höchstens 10% Wahrscheinlichkeit damit rechnen zu müssen, daß das arithmetische Mittel der Augenzahlen von seinem Erwartungswert um mehr als 2 abweicht?

39. In einer Spielbude auf einem Rummelplatz stehen zwei mit 1 und 2 gekennzeichnete Urnen. Urne 1 enthält 1 schwarze und 9 weiße Kugeln, Urne 2 ebenfalls 1 schwarze, aber 999 weiße Kugeln. Der Spieler zahlt an den Budenbesitzer 1 DM und darf dann aus einer der Urnen eine Kugel entnehmen. Zieht er die schwarze Kugel aus Urne 1, so bekommt er 10 DM ausbezahlt, zieht er sie hingegen aus Urne 2, so erhält er 1000 DM. Beim Zug einer weißen Kugel erhält er nichts. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* ab, wie oft der Spieler mit Urne 1 bzw. Urne 2 mindestens spielen muß, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das arithmetische Mittel seiner Gewinne vom Erwartungswert der Zufallsgröße »Gewinn des Spielers bei einem Spiel« um höchstens 1 DM unterscheidet, mindestens 90% beträgt.

40. Eine Firma stellt Geräte her, die aus den Bauteilen A und B bestehen. Langjährige Erfahrungen ergaben, daß im Schnitt bei 100 Geräten 10 Reparaturen des Bauteils A und 5 Reparaturen des Bauteils B pro Jahr anfallen. Die Teile A und B fallen unabhängig voneinander aus. Die Reparaturkosten für A betragen 30 DM, die für B hingegen 50 DM.
a) Es wurden 2000 Geräte verkauft. Welche Reparaturkosten kommen auf die Firma im Garantiejahr zu?
b) Die Firma will sich gegen diese zu erwartenden Reparaturkosten versichern.
1) Welche Kosten pro Gerät muß eine Versicherung im Mittel ansetzen?
2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weichen die Reparaturkosten der 2000 Geräte um mehr als 1000 DM von den zu erwartenden Reparaturkosten ab? (Abschätzung mittels der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*)
3) Die Versicherung ist nur bereit, einen solchen Vertrag abzuschließen, wenn das arithmetische Mittel der anfallenden Reparaturkosten pro Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% (95%; 99%) um höchstens 4 DM vom Erwartungswert abweicht. Wie viele Geräte müssen mindestens in die Versicherung einbezogen werden?