Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

12. 2. Stochatische Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

$W_G(g)$, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Zeile g addiert. Die vollständige Tabelle sieht dann so aus:

$g \backslash r$	1	2	3	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0	0,4
1	0,36	0,16	0,08	0,6
$W_R(r)$	0,60	0,32	0,08	1

Der gefundene Zusammenhang zwischen W_G, W_R und $W_{G,R}$ gilt offenbar allgemein:

Satz 200.1:

$$W_X(x_i) = \sum_{j=1}^{m} W_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$W_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{n} W_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle y_j aus dem Wertebereich von Y bzw. über alle x_i aus dem Wertebereich von X.

Bemerkung: Auf Grund von Satz 200.1 nennt man die einfachen Wahrscheinlichkeitsfunktionen W_X und W_Y manchmal in diesem Zusammenhang auch **Rand-** oder **Marginalwahrscheinlichkeitsverteilungen.**

12.2. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

In Kapitel **10.** wurde die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen definiert und untersucht. Wir nannten die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, wenn der Produktsatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Nun erzeugt jede Zufallsgröße X mittels der Aussagen »$X = x_i$« eine Menge von Ereignissen. Es liegt daher nahe, die stochastische Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und Y dadurch zu definieren, daß man für jedes mögliche Paar von Ereignissen »$X = x_i$« und »$Y = y_j$« die stochastische Unabhängigkeit fordert:

Definition 200.1: Zwei Zufallsgrößen X und Y, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) definiert sind, heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für alle x_i, y_j gilt:

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

oder kürzer: $W_{X,Y}(x_i, y_j) = W_X(x_i) \cdot W_Y(y_j)$

Bei mehr als zwei Zufallsgrößen unterscheidet man wie bei Ereignissen zwischen paarweiser Unabhängigkeit und Unabhängigkeit in ihrer Gesamtheit gemäß

Definition 201.1: Die Zufallsgrößen $X, Y, \dots, Z$, definiert über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), heißen

a) paarweise stochastisch unabhängig, wenn je 2 von ihnen stochastisch unabhängig sind,

b) stochastisch unabhängig in ihrer Gesamtheit, wenn für alle $x_i, y_j, \dots, z_k$ gilt:

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j \wedge \dots \wedge Z = z_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \cdot \dots \cdot P(Z = z_k).$$

Zur Veranschaulichung von Definition 200.1 untersuchen wir die Zufallsgrößen aus den Beispielen 1 und 2 des Abschnitts **12.1.** auf Unabhängigkeit. Die Gewinnpläne X und Y sind nicht unabhängig; denn es gilt z.B.

$P(X = -1 \wedge Y = -1) = \frac{1}{6}$; aber
$P(X = -1) \cdot P(Y = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Zur Untersuchung der Zufallsgrößen Geschlecht G und Religionszugehörigkeit R auf Unabhängigkeit stellen wir die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_{G,R}$ der Produkttafel der Randwahrscheinlichkeitsverteilungen gegenüber:

$W_{G,R}(g, r) = P(G = g \wedge R = r)$				
g \ r	1	2	3	$P(G = g)$
0	0,24	0,16	0	0,4
1	0,36	0,16	0,08	0,6
$P(R = r)$	0,6	0,32	0,08	1

$W_G(g) \cdot W_R(r) = P(G = g) \cdot P(R = r)$				
g \ r	1	2	3	$P(G = g)$
0	0,24	0,128	0,032	0,4
1	0,36	0,192	0,048	0,6
$P(R = r)$	0,6	0,32	0,08	1

Da die Tabellen nicht übereinstimmen, sind die Zufallsgrößen Geschlecht und Religionszugehörigkeit in der betrachteten Klasse stochastisch abhängig. Hätte man in derselben Klasse die Zufallsgröße »Religionszugehörigkeit« etwas anders definiert, nämlich

$$R^*(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Katholiken} \\ 2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ergäben sich folgende Tabellen:

$W_{G,R^*}(g, r^*) = P(G = g \wedge R^* = r^*)$

g \ r^*	1	2	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0,4
1	0,36	0,24	0,6
$W_{R^*}(r^*)$	0,6	0,4	1

$W_G(g) \cdot W_{R^*}(r^*) = P(G = g) \cdot P(R^* = r^*)$

g \ r^*	1	2	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0,4
1	0,36	0,24	0,6
$W_{R^*}(r^*)$	0,6	0,4	1

Diese Tabellen stimmen überein; also sind Geschlecht G und Religionszugehörigkeit R^* stochastisch unabhängige Zufallsgrößen.

Fazit: Durch geeignete Definition von Zufallsgrößen kann man das Ergebnis einer Untersuchung beeinflussen. Man sollte daher bei Veröffentlichungen von statistischen Untersuchungen nicht nur auf die Ergebnisse achten, sondern auch auf die Art, wie sie gewonnen wurden!

12.3. Verknüpfung von Zufallsgrößen

Zufallsgrößen sind reellwertige Funktionen auf Ω. Daher lassen sich Zufallsgrößen wie Funktionen verknüpfen. Wir beschränken uns hier auf Summe und Produkt zweier Zufallsgrößen und erinnern an die in der Analysis übliche

Definition 202.1: Sind X und Y zwei Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so gilt:

$$(X + Y)(\omega) := X(\omega) + Y(\omega) \quad \text{und} \quad (X \cdot Y)(\omega) := X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe bzw. des Produkts zweier Zufallsgrößen kann man aus ihrer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(X+Y=s) &= \\ &= \sum_{x_i + y_j = s} P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \\ &= \sum_{x_i + y_j = s} W_{X,Y}(x_i, y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} W_{X,Y}(x_i, s - x_i)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \cdot Y = k) &= \\ &= \sum_{x_i y_j = k} P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \\ &= \sum_{x_i y_j = k} W_{X,Y}(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Zur Summe zweier Zufallsgrößen bringen wir folgendes

Beispiel: Beim Wurf zweier L-Würfel hat man zwei Zufallsgrößen X und Y, nämlich die Augenzahlen des 1. bzw. 2. Würfels über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P); dabei besteht Ω aus den 36 Paaren $(a_1 | a_2)$ mit $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und P ist eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω. Für die Zufallsgrößen X und Y gilt dabei