UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

# Stochastik

**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Visual Library

**Definition 156.1:** Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P)$ **stochastisch unabhängig,** wenn folgende $2^n$ Gleichungen gelten:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n),$$
$$P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap A_n) = P(\bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(A_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n).$$

(Aus der ersten Gleichung entstehen die übrigen, indem man eines oder mehrere der $n$ Ereignisse durch ihre Gegenereignisse ersetzt.)

Auch in diesem allgemeinen Fall muß man nicht alle $2^n$ Gleichungen nachprüfen, um die Unabhängigkeit der $n$ Ereignisse zu gewährleisten. (Vgl. Aufgabe 163/**45**.) Satz 155.1 läßt sich ebenfalls auf $n$ Ereignisse verallgemeinern:

**Satz 156.1:** In einer Menge von stochastisch unabhängigen Ereignissen sind stets auch beliebig daraus ausgewählte Ereignisse stochastisch unabhängig.

Den **Beweis** dieses Satzes wollen wir Aufgabe 163/**44** überlassen.

Und schließlich drückt sich die stochastische Unabhängigkeit von $n$ Ereignissen auch wiederum darin aus, daß alle bedingten Wahrscheinlichkeiten genauso groß sind wie die zugehörigen unbedingten Wahrscheinlichkeiten.

## Aufgaben

### Zu 10.1.

1. Untersuche beim Roulettspiel (Seite 22f.) die Ereignisse $A :=$ »pair«, $B :=$ »douze premier« und $C :=$ »rouge« paarweise auf stochastische Unabhängigkeit, falls es sich
   **a)** um das übliche Roulett, **b)** um ein Roulett ohne die Null handelt.
2. Von *Francis Galton* (1822–1911)* stammt eine Untersuchung der Augenfarbe von 1000 Vätern und je einem ihrer Söhne. Mit $V :=$ »Vater helläugig« und $S :=$ »Sohn helläugig« fand er folgende Anzahlen:

| | $S$ | $\bar{S}$ |
|---|---|---|
| $V$ | 471 | 151 |
| $\bar{V}$ | 148 | … |

   Ergänze die Tabelle, erstelle eine vollständige 4-Feldertafel der Wahrscheinlichkeiten und beurteile die Unabhängigkeit der Augenfarben von Vater und Sohn.
3. Eine Urne enthält 3 weiße und 5 schwarze Kugeln, eine andere Urne 2 weiße und 8 schwarze Kugeln.
   **a)** Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Es sei $W_i :=$ »Aus der Urne $i$ wird eine weiße Kugel gezogen«. Sind $W_1$ und $W_2$ unabhängig?
   **b)** Die Urneninhalte werden zusammengeschüttet und mit Zurücklegen 2mal eine Kugel gezogen. Nun bedeute $W_i :=$ »Beim $i$-ten Zug wird eine weiße Kugel gezogen«. Sind $W_1$ und $W_2$ unabhängig?

* Siehe Seite 407.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**4.** In einer Urne sind 10 schwarze, 3 rote und 2 grüne Kugeln. Untersuche die Ereignisse $A :=$ »Schwarz beim 1. Zug« und $B :=$ »Kein Grün beim 5. Zug« auf stochastische Unabhängigkeit, falls die Entnahme
**a)** mit Zurücklegen, **b)** ohne Zurücklegen erfolgt.

• **5.** Aus einer Urne mit 2 roten Kugeln und 1 grünen Kugel wird zweimal nacheinander mit Zurücklegen 1 Kugel gezogen. Untersuche alle 2elementigen Ereignisse des 4elementigen Ergebnisraumes paarweise auf Unabhängigkeit.

**6.** Jemand wählt auf gut Glück eine natürliche Zahl. Untersuche folgende Eigenschaften der ausgewählten Zahl auf ihre Unabhängigkeit:
**a)** Teilbarkeit durch 2; Teilbarkeit durch 3,
**b)** Teilbarkeit durch 5; Teilbarkeit durch 10.
**c)** Löse die Aufgaben **a)** und **b)**, wenn nur eine der Zahlen $0, \ldots, 9$ gewählt werden kann.

**7.** Eine Statistik über das Rauchen bei amerikanischen Frauen (Februar 1955):

| Einkommen in $ | Anzahl der befragten Personen | gewohnheitsmäßiger täglicher Zigarettenverbrauch in % 1 bis 9 | 10 bis 20 | 21 bis 40 |
|---|---|---|---|---|
| ohne | 3335 | 13,4 | 15,1 | 0,8 |
| unter 1000 | 1677 | 14,1 | 11,2 | 0,5 |
| 1000 bis 1999 | 1117 | 14,5 | 11,0 | 3,0 |
| 2000 bis 2999 | 956 | 12,2 | 15,5 | 0,6 |
| mind. 3000 | 375 | 10,2 | 27,6 | 2,1 |
| insgesamt | 7460 | 13,4 | 14,3 | 1,1 |

Aus der befragten Personenmenge wird eine Frau beliebig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
**a)** verdient sie mindestens 3000 Dollar,
**b)** raucht sie regelmäßig 10 bis 20 Zigaretten täglich,
**c)** verdient sie mindestens 3000 Dollar und raucht 10 bis 20 Zigaretten täglich?
**d)** Sind die Ereignisse **a)** und **b)** unabhängig?

**8.** Theodor und Dorothea sind öfters montags krank, und zwar Theodor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und Dorothea mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Es kommt nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ vor, daß sie am Montag beide im Unterricht anwesend sind. Man prüfe durch Rechnung, ob die montägliche Erkrankung von Theodor und Dorothea unabhängige Ereignisse sind.

**9.** Ein Angestellter geht an 10 von 30 Tagen vorzeitig aus dem Büro weg. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 ruft ein Kunde kurz vor Dienstschluß bei ihm an. Wie wahrscheinlich ist es, daß ein Kunde verärgert wird? (Rechtfertige auch die Unabhängigkeitsannahme!)

**10.** Herr A stellt fest, daß bei 20 Fahrten mit der S-Bahn einmal seine Fahrkarte kontrolliert wird. Er beschließt daraufhin verwerflicherweise, auf Kosten anderer zu fahren und bei 3% seiner Fahrten keine Fahrkarte zu lösen. Dies hat zur Folge, daß er in 2 von 1000 Fahrten von einer Kontrolle ohne Fahrkarte überrascht wird.
Lege eine Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten an. Sind die Ereignisse »A besitzt eine gültige Fahrkarte« und »A wird kontrolliert« stochastisch unabhängig?

**11.** In einem Hotel übernachten 3 Reisegruppen. Die erste besteht aus 2 Damen und 6 Herren, die zweite aus 4 Damen und 20 Herren und die dritte aus 7 Damen und 13 Herren. An einem Empfang soll ein Vertreter aus diesen drei Gruppen teilnehmen. Er wird durch das Los bestimmt. Wir betrachten die Ereignisse $D :=$ »Es wird eine Dame ausgelost« und $G_i :=$ »Es wird ein Mitglied der Gruppe Nr. $i$ ausgelost«. Untersuche folgende Ereignispaare auf Unabhängigkeit:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**a)** $D$ und $G_i$ $(i = 1, 2, 3)$; **b)** $G_i$ und $G_k$ $(i \neq k)$; **c)** $D$ und $G_i \cup G_k$ $(i \neq k)$.

**12.** Die Beleuchtung eines Ganges kann von zwei Enden aus geschaltet werden. Sind beide Schalterhebel oben oder beide unten, brennt die Lampe, sonst nicht. Die Schalter werden unabhängig voneinander regellos bedient. In einem beliebig gewählten Beobachtungszeitpunkt steht jeder Schalter mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf »oben«.
**a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt das Licht im Beobachtungszeitpunkt?
**b)** Sind die Ereignisse »Schalter 1 (bzw. 2) oben« und »Licht brennt« unabhängig?

**13.** Wir fassen Tabelle 10.1 als eine Serie von 600 Doppelwürfen auf. Tabelle 158.1 zeigt die Auswertung. Von jedem der 36 möglichen Ergebnisse ist angegeben, wie oft es bei den 600 Versuchen aufgetreten ist. Zum Beispiel: »Doppel-Eins« 20mal, »Eins-Sechs« 12mal, »Sechs-Eins« 15mal.

| Augenzahl beim 1. Wurf | Augenzahl beim 2. Wurf: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 23 | 7 | 10 | 23 | 12 |
| 2 | 12 | 25 | 18 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 18 | 21 | 21 | 16 | 20 | 12 |
| 4 | 10 | 19 | 16 | 13 | 9 | 8 |
| 5 | 17 | 21 | 17 | 14 | 16 | 16 |
| 6 | 15 | 23 | 17 | 13 | 22 | 19 |

Tab. 158.1 600 Doppelwürfe eines Würfels

**a)** Wie oft trat die Eins (Zwei, ...) beim 1. Wurf auf, wie oft beim 2. Wurf?
●**b)** Wir wollen annehmen, die relativen Häufigkeiten von Eins usw. beim 1. bzw. 2. Wurf seien genau gleich den Wahrscheinlichkeiten $P$(»Eins beim 1. Wurf«) usw. und die Augenzahlen treten beim 1. und 2. Wurf unabhängig voneinander auf. Welche »Idealwerte« (Brüche!) würden sich daraus für die 36 Felder der Tabelle ergeben?
(Die mathematische Statistik hätte die Frage zu klären, ob die Abweichungen der wirklich erschienenen Werte von den Idealwerten noch als »zufällig« betrachtet werden können.)

**14.** Erfahrungsgemäß haben 12% eines Abiturjahrgangs die 7. Klasse, 9% die 9. Klasse wiederholt. Nimm an, daß das Wiederholen dieser Klassen unabhängig erfolgt. Wieviel Prozent haben
**a)** keine der beiden Klassen,
**b)** die 7., aber nicht die 9. Klasse wiederholt?

**15.** Von den Autos, die in regelloser Folge auf einer Straße gefahren kommen, sind $\frac{2}{3}$ Pkw und $\frac{1}{3}$ Lkw. 75% der Pkw sind nur mit 1 Person besetzt, 10% der Lkw sind mit 2 oder mehr Personen besetzt.
**a)** Zeige die Abhängigkeit folgender Ereignisse: »Das nächste Fahrzeug ist ein Lkw« – »Im nächsten Fahrzeug sitzen mindestens 2 Personen«.
**b)** Bei welchem anderen Anteil der Lkw und sonst unveränderten Daten wären die Ereignisse unabhängig?

**16.** Beweise: $P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$.

**17. a)** Ist die Relation »stochastisch unabhängig« transitiv, d.h., gilt der folgende Satz?

$$\left.\begin{array}{l}A \text{ und } B \text{ stochastisch unabhängig} \\ B \text{ und } C \text{ stochastisch unabhängig}\end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ und } C \text{ stochastisch unabhängig}$$

Hinweis: Verwende die Erkenntnisse von Aufgabe **1. b)**.
**b)** Zeige an einem Gegenbeispiel, daß die Relation »stochastisch abhängig« nicht transitiv ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**18. a)** Von der 4-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten für die unabhängigen Ereignisse $A$ und $B$ sind die 2 Zahlen von Figur 159.1a gegeben. Berechne $P(A)$ und $P(B)$ und vervollständige die Tafel.

**•b)** Gleiche Aufgabe wie **a)** mit den Zahlen der Figur 159.1b.

a)

| | $B$ | $\bar{B}$ |
|---|---|---|
| $A$ | 0,4 | 0,1 |
| $\bar{A}$ | | |

b)

| | $B$ | $\bar{B}$ |
|---|---|---|
| $A$ | 0,12 | |
| $\bar{A}$ | | 0,32 |

Fig. 159.1 Zu Aufgabe **18**

**19.** Die Ereignisse $A$ und $B$ seien unabhängig, $a$ und $b$ ihre Wahrscheinlichkeiten. Gib mit Hilfe von $a$ und $b$ die Wahrscheinlichkeit an, daß

**a)** weder $A$ noch $B$, **b)** entweder $A$ oder $B$,

**c)** wenigstens eines der Ereignisse, **d)** nicht beide Ereignisse eintreten.

**20.** Die Annahme der Unabhängigkeit spielt in der Praxis eine besonders wichtige Rolle im Versicherungswesen. Die ersten Rechengrundlagen für Lebensversicherungen sind die »Allgemeinen Sterbetafeln« (siehe Tabelle 159.1)*

| $x$ | $l_x$ männl. | $l_x$ weibl. | $x$ | $l_x$ männl. | $l_x$ weibl. | $x$ | $l_x$ männl. | $l_x$ weibl. | $x$ | $l_x$ männl. | $l_x$ weibl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100000 | 100000 | | | | | | | | | |
| 1 | 97400 | 98016 | 26 | 94705 | 96694 | 51 | 87104 | 92260 | 76 | 35601 | 56774 |
| 2 | 97249 | 97888 | 27 | 94555 | 96632 | 52 | 86369 | 91806 | 77 | 32373 | 53323 |
| 3 | 97152 | 97810 | 28 | 94405 | 96567 | 53 | 85574 | 91323 | 78 | 29212 | 49702 |
| 4 | 97067 | 97745 | 29 | 94253 | 96499 | 54 | 84717 | 90813 | 79 | 26137 | 45934 |
| 5 | 96989 | 97690 | 30 | 94097 | 96429 | 55 | 83789 | 90272 | 80 | 23167 | 42046 |
| 6 | 96918 | 97641 | 31 | 93937 | 96355 | 56 | 82779 | 89696 | 81 | 20321 | 38076 |
| 7 | 96854 | 97597 | 32 | 93773 | 96276 | 57 | 81673 | 89078 | 82 | 17619 | 34071 |
| 8 | 96795 | 97558 | 33 | 93604 | 96190 | 58 | 80460 | 88411 | 83 | 15083 | 30091 |
| 9 | 96741 | 97523 | 34 | 93429 | 96098 | 59 | 79130 | 87689 | 84 | 12735 | 26204 |
| 10 | 96692 | 97492 | 35 | 93245 | 95997 | 60 | 77675 | 86903 | 85 | 10595 | 22478 |
| 11 | 96647 | 97465 | 36 | 93049 | 95886 | 61 | 76087 | 86044 | 86 | 8678 | 18974 |
| 12 | 96604 | 97439 | 37 | 92838 | 95764 | 62 | 74357 | 85101 | 87 | 6990 | 15744 |
| 13 | 96561 | 97413 | 38 | 92610 | 95632 | 63 | 72477 | 84062 | 88 | 5529 | 12826 |
| 14 | 96515 | 97384 | 39 | 92361 | 95488 | 64 | 70440 | 82915 | 89 | 4287 | 10245 |
| 15 | 96459 | 97349 | 40 | 92089 | 95331 | 65 | 68242 | 81647 | 90 | 3251 | 8016 |
| 16 | 96383 | 97305 | 41 | 91794 | 95161 | 66 | 65882 | 80250 | 91 | 2407 | 6139 |
| 17 | 96273 | 97251 | 42 | 91475 | 94975 | 67 | 63361 | 78713 | 92 | 1735 | 4597 |
| 18 | 96118 | 97189 | 43 | 91131 | 94773 | 68 | 60685 | 77027 | 93 | 1215 | 3362 |
| 19 | 95927 | 97124 | 44 | 90761 | 94551 | 69 | 57864 | 75179 | 94 | 824 | 2400 |
| 20 | 95732 | 97059 | 45 | 90363 | 94308 | 70 | 54909 | 73157 | 95 | 539 | 1671 |
| 21 | 95541 | 96996 | 46 | 89934 | 94042 | 71 | 51838 | 70948 | 96 | 339 | 1134 |
| 22 | 95357 | 96934 | 47 | 89468 | 93750 | 72 | 48673 | 68539 | 97 | 204 | 750 |
| 23 | 95182 | 96874 | 48 | 88958 | 93427 | 73 | 45438 | 65920 | 98 | 117 | 483 |
| 24 | 95016 | 96815 | 49 | 88398 | 93072 | 74 | 42161 | 63084 | 99 | 64 | 303 |
| 25 | 94858 | 96755 | 50 | 87781 | 92683 | 75 | 38872 | 60033 | 100 | 33 | 185 |

Tab. 159.1 Allgemeine Sterbetafel 1970/72 für die Bundesrepublik Deutschland
Quelle: Statistisches Jahrbuch 1975 für die Bundesrepublik Deutschland

* Man gewinnt sie aus den wirklichen Sterbeziffern. Mit Hilfe von Ausgleichsverfahren wird eine Folge von Sterbewahrscheinlichkeiten für alle 0-, 1-, 2-, ...jährigen errechnet. Ausgehend von einem willkürlichen Ausgangswert $l_0$ (z.B. 100000) erhält man dann die Anzahl $l_x$ der im Alter $x$ wahrscheinlich noch Lebenden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

International sind folgende Bezeichnungen üblich:
Mit $x$ wird das Alter in Jahren angegeben. Dabei zählt eine Person als $x$-jährig, wenn ihr Lebensalter dem Intervall $[x; x+1[$ angehört. Ferner bedeuten
$(x) :=$ eine Person ist $x$-jährig.
$l_x :=$ Anzahl der lebenden $x$-jährigen
$p_x := \frac{l_{x+1}}{l_x} =$ Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$-jähriger mindestens $(x+1)$-jährig wird
($p_x$ heißt Erlebenswahrscheinlichkeit im Alter $x$.)
$q_x := 1 - p_x$ heißt Sterbewahrscheinlichkeit im Alter $x$.
${}_np_x :=$ Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$-jähriger mindestens $(x+n)$-jährig wird. Offensichtlich ist ${}_1p_x = p_x$.

**a)** Beweise die Richtigkeit folgender Aussagen:

**1)** ${}_np_x = \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}$

**2)** $l_x = {}_xp_0 \cdot l_0$

**3)** $l_{x+n} = {}_np_x \cdot l_x$

**b)** Berechne unter Verwendung von Tabelle 159.1

**1)** die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_0$ und $q_1$ (Was besagen diese Ergebnisse?),

**2)** die Wahrscheinlichkeit, daß ein 20jähriger, ein 40jähriger, ein 60jähriger bzw. ein 80jähriger mindestens 1 Jahr älter werden,

**3)** die Wahrscheinlichkeit, daß ein 20jähriger zwar 40jährig, aber nicht mehr 50jährig wird.

**c)** Welche Werte ergeben sich in Aufgabe **b)** für Frauen?

**d)** Ein 35jähriger Mann heiratet eine 10 Jahre jüngere Frau. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren

**1)** beide noch leben,
**2)** keiner mehr lebt,
**3)** genau einer noch am Leben ist,
**4)** die Frau den Mann überlebt,
**5)** der Mann die Frau überlebt,
**6)** höchstens einer noch lebt?

**21.** Es bedeuten $K :=$ »Knabe« und $L :=$ »Linkshänder«. Welche Folgerungen können aus $P(K \cap L) < P(K) \cdot P(L)$ bzw. $P(K \cap L) > P(K) \cdot P(L)$ gezogen werden?

**•22.** »Wer lügt, der stiehlt«. – Angenommen, dieses Vorurteil wäre stichhaltig. Ich treffe Herrn $X$. Welche Ungleichung müßte für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $L :=$ »Herr X. ist ein Lügner«, $D :=$ »Herr X. ist ein Dieb« und $L \cap D$ bestehen?

**23.** Zeige: **a)** Das sichere Ereignis und jedes andere Ereignis sind unabhängig.
**b)** Das unmögliche Ereignis und jedes andere Ereignis sind unabhängig.

**•24. a)** »Wenn $A$ und $B$ unvereinbar sind, dann sind $A$ und $B$ abhängig.«
Welche Voraussetzung muß über $P(A)$ und $P(B)$ noch gemacht werden, damit die Behauptung wahr wird? Beweise sie.

**b)** Formuliere den Kehrsatz des Satzes aus **a)** und zeige an einem Beispiel, daß er *falsch* ist.

**25.** Nenne alle Ereignisse $A$, für die gilt: $A$ und $A$ sind unabhängig.

**26.** Die nicht-transitiven Würfel von *Bradley Efron*. Vier L-Würfel werden beschriftet, und zwar Würfel I mit 3mal 1 und 3mal 5, Würfel II mit 2mal 0 und 4mal 4, Würfel III mit lauter Dreiern und Würfel IV schließlich 4mal mit 2 und 2mal mit 6. Dorothea gestattet Theodor, einen der Würfel zu wählen. Sie nimmt dann einen der drei restlichen. Dann werfen beide ihren Würfel. Sieger ist derjenige, der die größere Augenzahl geworfen hat.

**a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt I gegen II, II gegen III und III gegen IV? Welcher Würfel ist wohl der beste?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt I gegen IV?
Welcher der beiden Spieler ist bei geschicktem Spiel im Vorteil?
Warum nennt man die Würfel nicht-transitiv?

c) Untersuche **a)** und **b)** für die Würfel
2, 3, 3, 9, 10, 11 – 0, 1, 7, 8, 8, 8 – 5, 5, 6, 6, 6, 6 – 4, 4, 4, 4, 12, 12.

**27.** Nicht-transitive Glücksräder nach *Dietrich Morgenstern.* Drei Glücksräder mit jeweils gleich großen Sektoren tragen die Aufschriften 1, 6, 8 bzw. 3, 5, 7 bzw. 2, 4, 9. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schlägt jedes Glücksrad in zyklischer Reihenfolge das darauffolgende?

**28.** In einer Urne befinden sich zwölf von 1 bis 12 numerierte Kugeln. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Als Ergebnisraum verwende man $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$.

**a)** Zeige, daß die Ereignisse $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{1, 4, 7, 10\}$ unabhängig sind.

**b)** Gib ein zum Ereignis $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ unabhängiges Ereignis $C$ mit $P(C) = 0{,}5$ an. – Wie viele derartige Ereignisse $C \subset \Omega$ gibt es?

**c)** Begründe, warum zwei Ereignisse $D \subset \Omega$ und $E \subset \Omega$ mit $P(D) = P(E) = \frac{3}{4}$ abhängig sind.

**29.** In Urne 1 liegen 1 weiße und 1 schwarze Kugel, in Urne 2 dagegen 2 weiße und 1 schwarze Kugel. Es werde jeweils 2mal eine Kugel mit Zurücklegen entnommen. Wir definieren $S_i^j :=$ »Beim $i$-ten Zug wird aus Urne $j$ eine schwarze Kugel gezogen«, $i, j \in \{1; 2\}$.

**a)** Zeige, daß $S_1^j$ und $S_2^j$ für $j = 1; 2$ stochastisch unabhängig sind.

**b)** Nun werde vor dem Ziehen eine L-Münze geworfen. Fällt Adler, so wird nur aus Urne 1 gezogen, andernfalls nur aus Urne 2. Es bedeute $S_i :=$ »Beim $i$-ten Zug wird eine schwarze Kugel gezogen«, $i = 1; 2$. Untersuche, ob $S_1$ und $S_2$ stochastisch unabhängig sind.

**c)** Das Verfahren von **b)** wird nun so abgeändert, daß vor *jedem* Zug die L-Münze geworfen wird. Untersuche für diesen Fall die stochastische Unabhängigkeit von $S_1$ und $S_2$.

**d)** Das Verfahren von **b)** werde jetzt folgendermaßen abgeändert: Die L-Münze bestimmt, aus welcher Urne der erste Zug erfolgt. Zieht man eine weiße Kugel, so wird die Urne für den zweiten Zug gewechselt; andernfalls behält man sie bei. Untersuche $S_1$ und $S_2$ auf stochastische Unabhängigkeit.

**e)** Beim Verfahren **b)** zeigte sich, daß durch das Werfen einer L-Münze die stochastische Unabhängigkeit verlorengeht. Man nehme daher ein Glücksrad, das in zwei Sektoren aufgeteilt ist, die die Nummern 1 und 2 tragen. Es werden die beiden Züge aus derjenigen Urne getan, deren Nummer das Glücksrad bestimmt. Welchen Winkel muß der Sektor 1 tragen, damit die Ereignisse $S_1$ und $S_2$ stochastisch unabhängig sind?

**f)** Die $S_i$ konnten in den Aufgaben **b)** – **e)** umgangssprachlich gleich beschrieben werden. Die verschiedenen Resultate sind also darauf zurückzuführen, daß die Unabhängigkeit in verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen untersucht wurde. Gib zu den Experimenten aus **a)** – **e)** jeweils einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P)$ an.

## Zu 10.2.

**30.** Gegeben ist: $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}2$; $P(C) = 0{,}3$. Fülle eine 8-Felder-Tafel (Muster: Figur 154.1) so aus, daß $A$, $B$ und $C$ unabhängig werden.

**31.** Die Ereignisse $A$, $B$ und $C$ seien stochastisch unabhängig. Ergänze die in Figur 162.1 teilweise gegebenen 8-Felder-Tafeln der Wahrscheinlichkeiten. Anleitung zu **a)**: Berechne zuerst der Reihe nach $P(A \cap B)$, $P(C)$, $P(B \cap C)$, $P(A)$ und $P(B)$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

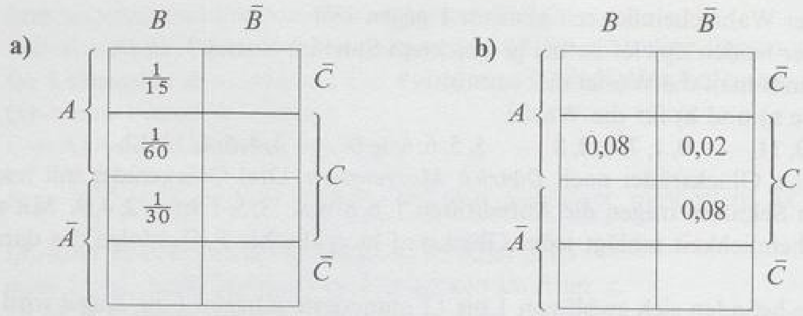


Fig. 162.1 Zu Aufgabe **31**

**32.** Bei einem Einbruch beschreiben die Zeugen den Täter als langhaarigen jungen Mann, der mit einer Lederjacke und mit Jeans bekleidet war. Es wurde ein Mann festgenommen, auf den diese drei Eigenschaften zutreffen. Er leugnet, aber der Staatsanwalt argumentiert: »$\frac{1}{4}$ unserer jungen Männer sind langhaarig; jeder zwanzigste trägt eine Lederjacke und $\frac{3}{4}$ tragen Jeans. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese 3 Eigenschaften zusammentreffen, beträgt $\frac{3}{320}$, also weniger als 1%. Damit sind Sie überführt!«
Was sagst du als Verteidiger zu dieser Beweisführung?

**33.** In einer Volkshochschule, die u. a. Kurse in Englisch, Französisch und Spanisch anbietet, haben sich 500 Hörer eingeschrieben. 311 Hörer haben mindestens einen der Sprachkurse belegt. 6 Hörer besuchen alle 3 Kurse, 21 nehmen nur am Spanischunterricht teil. Englisch findet mehr Interesse als Französisch.

**a)** Stelle eine 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten auf unter der Voraussetzung, daß die Ereignisse »Ein beliebig ausgewählter Hörer belegte Sprachkurs X« ($X \in \{$Englisch, Französisch, Spanisch$\}$) unabhängig sind.

**b)** Wie viele Hörer belegten
**1)** Englisch, **2)** nur Englisch, **3)** Französisch und Spanisch,
**4)** Französisch oder Spanisch, **5)** Französisch, aber nicht Spanisch?

**c)** Erstelle eine 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten bezogen auf die Grundmenge derjenigen Hörer, die mindestens eine der Sprachen belegt haben. Sind jetzt die Ereignisse aus **a)** noch unabhängig?

**34.** Vier Sonntagsjäger mit der Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ bzw. $\frac{5}{10}$ schießen gleichzeitig auf einen Hasen.

**a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Hase
**1)** überhaupt getroffen, **2)** genau einmal getroffen?

•**b)** Welche Trefferanzahl ist am wahrscheinlichsten?

**35.** Beispiel von *Bernschtein*: Von den 4 Flächen eines Tetraeders ist eine rot, die zweite grün und die dritte blau bemalt. Die vierte Fläche zeigt alle drei Farben. $R$ bedeute »Das Tetraeder fällt auf eine Fläche, die rote Farbe trägt«. Analog sind die Ereignisse $B$ und $G$ definiert. Zeige, daß $R$, $G$ und $B$ paarweise stochastisch unabhängig sind, insgesamt aber abhängig.

**36.** In einer Urne liegen je eine rote, grüne, blaue und schwarze Kugel. Man zieht eine Kugel und betrachtet die Ereignisse
$A :=$ »Die gezogene Kugel ist rot oder grün«,
$B :=$ »Die gezogene Kugel ist rot oder blau«,
$C :=$ »Die gezogene Kugel ist rot oder schwarz«.
Zeige, daß diese 3 Ereignisse paarweise unabhängig sind, insgesamt aber abhängig.

•**37.** Anton und Berta wetteifern im Bogenschießen. Sie treffen das Ziel mit den Wahrscheinlichkeiten 0,6 bzw. 0,7. Es wird je zweimal geschossen; wer öfter trifft, hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anton?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

**38.** 5 Freunde besuchen öfters eine Wirtschaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man sie an einem beliebig herausgegriffenen Tag alle versammelt, wenn sie
**a)** regelmäßig kommen, der erste jeden 2. Tag, der 2. jeden 3. Tag, ..., der 5. jeden 6. Tag, und wenn sie heute alle zusammen sind?
**b)** regellos kommen, der erste mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}, \ldots$, der fünfte mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$?

**39.** $E_1, \ldots, E_n$ seien unabhängige Ereignisse mit $P(E_k) = \frac{1}{k+1}$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Berechne $P$(»Keines der $E_k$ tritt ein«).

**40.** Zeige, daß 3 Ereignisse bereits stochastisch unabhängig sind, wenn 4 Gleichungen, die geeignet aus den 8 Gleichungen von Definition 153.1 ausgewählt wurden, erfüllt sind.

•**41.** Ein Zufallsmechanismus liefert die Zahlen 1 bis 16 mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Es sind die Ereignisse $A := \{1, \ldots, 8\}$, $B := \{2, \ldots, 5, 9, \ldots, 12\}$ und $C := \{4, \ldots, 8, 11, 12, 13\}$ zu untersuchen. Zeige, daß für sie 4 der Gleichungen aus Definition 153.1 gelten und die Ereignisse trotzdem abhängig sind.

•**42.** In manchen Lehrbüchern findet man folgende Definition der stochastischen Unabhängigkeit von 3 Ereignissen:
$A$, $B$ und $C$ heißen stochastisch unabhängig dann und nur dann, wenn die folgenden 4 Gleichungen erfüllt sind:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),\ P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A) \quad \text{und}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Zeige, daß diese Definition und unsere Definition 153.1 äquivalent sind.

**43. a)** Zeige: Das *Simpson*-Paradoxon (Aufgabe 140/**18**) kann nicht eintreten, wenn z.B. die Ereignisse $B$ und $C$ stochastisch unabhängig sind.
**b)** Weise nach, daß die betreffenden Ereignisse $B$ und $C$ aus Aufgabe 140/**18** stochastisch abhängig sind.

••**44.** Beweise Satz 156.1.

••**45.** In manchen Lehrbüchern definiert man: Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig dann und nur dann, wenn

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

für alle $k$-Mengen aus $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ mit $2 \leqq k \leqq n$ erfüllt ist.
**a)** Wie viele Gleichungen sind zu überprüfen?
**b)** Zeige, daß diese Definition und Definition 156.1 äquivalent sind.

**46.** $A_1, A_2, \ldots, A_5$ sind stochastisch unabhängig. Zeige, daß dann beispielsweise auch die Ereignisse $\bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$ und $A_5$ stochastisch unabhängig sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN