Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

9. 1. Einführung

9. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

9.1. Einführung

Problem: Leben deutsche Frauen länger als deutsche Männer?
Ein Blick in das *Statistische Jahrbuch* gibt uns erste Informationen: Am 1. 1. 1970 waren 4,8 Millionen von den 61,2 Millionen Einwohnern der Bundesrepublik Deutschland mindestens 70 Jahre alt. Von den 29,2 Millionen Männern waren 1,7 Millionen über 70 Jahre alt (siehe Figur 128.1). Der Anteil der Männer an der Gesamtbevölkerung betrug damals also $\frac{29{,}2 \text{ Mill.}}{61{,}2 \text{ Mill.}} \approx 47{,}7\%$, der Anteil der Männer an den mindestens 70jährigen jedoch $\frac{1{,}7 \text{ Mill.}}{4{,}8 \text{ Mill.}} \approx 35{,}4\%$.
Der Anteil der Männer unter den »Alten« ist somit kleiner als unter der Gesamtbevölkerung. (Das Bild des Altersaufbaus auf Seite 29 zeigt dies anschaulich.) Daraus könnte man vorschnell schließen, daß die deutschen Frauen tatsächlich länger lebten als die deutschen Männer. Eine genauere Untersuchung müßte jedoch auch noch weitere Faktoren berücksichtigen, wie etwa den Einfluß von Kriegen, von Lebensgewohnheiten wie etwa Rauchen oder Trinken usw. Dementsprechend müßte dann auch die Fragestellung präzisiert und die Antwort differenziert werden.

	S	$\bar{S}$	
M	1,7 Mill.		29,2 Mill.
$\bar{M}$			
	4,8 Mill.		61,2 Mill.

Fig. 128.1 Vierfeldertafel mit den Informationen über alte Männer in der Bundesrepublik Deutschland

Überlegungen der vorstehenden Art führen uns zu einem neuen Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dazu denken wir uns die oben berechneten Anteile als Wahrscheinlichkeiten des Zufallsexperiments »Auswahl einer Person auf gut Glück«. Der Ergebnisraum Ω ist hier die Menge der Einwohner der Bundesrepublik Deutschland. Die Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, ist für jeden Einwohner gleich groß; also liegt ein Laplace-Experiment vor. Wir betrachten dabei folgende Ereignisse:
$M :=$ »Die Person ist männlich« und
$S :=$ »Die Person ist mindestens 70 Jahre alt«.
Damit gilt: $P(M) = \frac{292}{612}$ und $P(S) = \frac{48}{612}$ und $P(M \cap S) = \frac{17}{612}$.
Läßt sich nun das oben berechnete Verhältnis $\frac{17}{48} \approx 35{,}4\%$ der Männer zu den »Alten« auch als Wahrscheinlichkeit deuten? Der Quotient zeigt, daß es sich tatsächlich um eine Laplace-Wahrscheinlichkeit handeln kann, allerdings über einem neuen Ergebnisraum $\Omega' := S =$ Menge der mindestens 70jährigen, auf dem man eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P' festlegt. $P'(M)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine aus den mindestens 70jährigen ausgewählte Person ein Mann ist.

Es gilt $P'(M) = \dfrac{|M \cap S|}{|S|} = \dfrac{17}{48}$. Diese Zahl läßt sich auch als Quotient zweier Wahrscheinlichkeiten über dem ursprünglichen Ergebnisraum Ω deuten: Es gilt nämlich

$$\frac{|M \cap S|}{|S|} = \frac{|M \cap S| / |\Omega|}{|S| / |\Omega|} = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}.$$

Dieser Quotient wird üblicherweise als »(bedingte) Wahrscheinlichkeit von M unter der Bedingung S« bezeichnet. Man verwendet dafür das Symbol $P_S(M)$ und definiert allgemein:

Definition 129.1: (Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ist B ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit und A ein beliebiges Ereignis,

dann heißt $P_B(A) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

die **(bedingte) Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.**

Bemerkungen:

1) Für $P_B(A)$ sind außer der angegebenen Sprechweise auch noch andere im Gebrauch. So liest man $P_B(A)$ auch als »Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
   - unter der Voraussetzung, daß B eingetreten ist«
   - unter der Annahme, daß B eingetreten ist«
   - unter der Voraussetzung, daß B eintritt«
   - unter der Annahme, daß B eintritt«
   - , wenn man schon weiß, daß B bereits eingetreten ist«
   - , falls B«
   - unter der Hypothese B«.
2) Statt $P_B(A)$ findet man in der Literatur auch die Bezeichnung $P(A|B)$, die allerdings problematisch ist, da es sich bei $A|B$ um keine Menge und damit auch um kein Ereignis handelt. Darüber hinaus macht das Symbol $P(A|B)$ nicht ausreichend klar, daß es sich bei der bedingten Wahrscheinlichkeit um eine im allgemeinen von der ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung P verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilung P_B handelt.

In Definition 129.1 gaben wir dem Quotienten $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ den Namen einer Wahrscheinlichkeit. Wir müssen noch zeigen, daß dies zulässig ist, d.h., daß es sich bei P_B überhaupt um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.

Satz 129.1: Sind (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $P(B) \neq 0$, dann ist $P_B: A \mapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω.

Beweis: Wir benützen, daß P als Wahrscheinlichkeitsverteilung die 3 Axiome von *Kolmogorow* (Seite 80) erfüllt, und weisen nach, daß dies auch für P_B gilt.

1) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geqq 0$, da Zähler und Nenner nicht negativ sind.

2) $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

3) Offensichtlich folgt aus der Unvereinbarkeit von A_1 und A_2 auch die Unvereinbarkeit von $A_1 \cap B$ und $A_2 \cap B$. (Siehe Figur 130.1 und Aufgabe 139/7.) Damit gilt dann

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{P([A_1 \cup A_2] \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P([A_1 \cap B] \cup [A_2 \cap B])}{P(B)} = \\
&= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\
&= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\
&= P_B(A_1) + P_B(A_2).
\end{aligned}$$

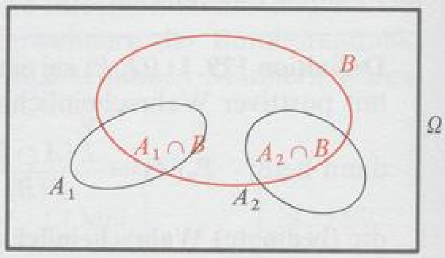

Fig. 130.1
$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$

Den Übergang von P zu P_B kann man sich anschaulich folgendermaßen vorstellen. Man hält am einmal gewählten Ergebnisraum Ω fest und ordnet allen Elementarereignissen $\{\omega_i\}$ mit $\omega_i \notin B$ die Wahrscheinlichkeit 0 zu. Dadurch wird die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 neu verteilt auf diejenigen Elementarereignisse $\{\omega_k\}$, für die $\omega_k \in B$ gilt. Für diese $\{\omega_k\}$ erhält man dann

$$P_B(\{\omega_k\}) = \frac{1}{P(B)} \cdot P(\{\omega_k\}).$$

Die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten dieser Elementarereignisse werden also mit dem Faktor $\frac{1}{P(B)}$ multipliziert, was jedoch im allgemeinen nicht für beliebige Ereignisse A gilt! Wegen der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsbelegung der Elementarereignisse aus Ω durch P_B ist also P_B insbesondere keine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω, selbst dann nicht, wenn P gleichmäßig ist.
Im übrigen könnte man auf bedingte Wahrscheinlichkeiten völlig verzichten, wenn man den Ergebnisraum wechselt und B als neuen Ergebnisraum Ω' wählt.

Diese Überlegungen sollen verdeutlicht werden durch das folgende
Beispiel: Eine Urne enthält 4 rote, 3 schwarze und eine grüne Kugel. Man zieht zweimal ohne Zurücklegen je eine Kugel. Auf Seite 55 errechneten wir auf $\Omega = \{\text{rr, rs, rg, sr, ss, sg, gr, gs}\}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung P:

ω	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs
$P(\{\omega\})$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{56}$

Wählt man als Bedingung das Ereignis $B :=$ »Die erste Kugel ist rot« $= \{\text{rr, rs, rg}\}$ mit $P(B) = \frac{1}{2}$, so erhält man die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung P_B auf Ω:

ω	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs
$P_B(\{\omega\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	0	0	0

Es wird also die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf diejenigen Ergebnisse verteilt, die r an erster Stelle haben; z.B.

$$P_B(\{rs\}) = \frac{1}{P(B)} \cdot P(\{rs\}) = \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{7}.$$

Wählen wir B als neuen Ergebnisraum Ω', so können wir auf den Begriff »bedingte Wahrscheinlichkeit« verzichten. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitsverteilung P' auf $\Omega' = \{rr, rs, rg\}$. Dabei beschreiben die Ergebnisse aus Ω' die Farbe der zweiten Kugel, die aus einer Urne mit 3 roten, 3 schwarzen und einer grünen Kugel gezogen wird. Diese neue Urne entsteht aus der ursprünglichen Urne durch Ziehen einer roten Kugel. Es gilt:

ω'	rr	rs	rg
$P'(\{\omega'\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

Der Anfänger neigt dazu, $P_B(A)$ mit $P(A \cap B)$ zu verwechseln, weil die umgangssprachlichen Beschreibungen dieser Wahrscheinlichkeiten sehr ähnlich klingen. (Vgl. Aufgabe 138/**1**.) In beiden Fällen handelt es sich tatsächlich ja auch um dieselbe Menge $A \cap B$. Bei $P(A \cap B)$ bezieht man die Überlegungen auf die Gesamtmenge Ω. Bei $P_B(A)$, was ja dasselbe ist wie $P_B(A \cap B)$ – vergleiche Aufgabe 139/**6. a)** –, ist die Bezugsmenge jedoch nur noch die Teilmenge B. Die 4-Feldertafel von Figur 131.1 veranschaulicht diesen Unterschied. Man achte also sorgfältig auf die gegebene Aufgabenstellung, um die Verwechslung zu vermeiden.

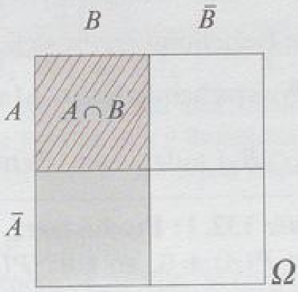

Fig. 131.1 $A \cap B$ als Teilmenge von Ω bzw. als Teilmenge von B

9.2. Die Wahrscheinlichkeit von *Und*-Ereignissen und die 1. Pfadregel

Figur 132.1 zeigt das Baumdiagramm für zweimaliges Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 4 roten, 3 schwarzen und einer grünen Kugel. Dabei bedeute z.B. $R_i :=$ »Rot beim i-ten Zug«. Über den Ergebnissen der jeweiligen Stufe sind die Ereignisse notiert, zu denen der Pfad bis dahin führt. Die Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen entpuppen sich nach dem, was wir gerade gelernt haben, als bedingte Wahrscheinlichkeiten über Ω. So gilt z.B. für die Wahrscheinlichkeit, beim 2. Zug eine rote Kugel zu ziehen, falls der 1. Zug eine rote Kugel ergab, $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{7}$.