UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. 3. Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Visual Library

Bemerkung:
Für diese Anzahlen gibt es verschiedene Bezeichnungsweisen. Einige geläufige geben wir hier an:

Anzahl der k-Tupel (= k-Variationen) mit Wiederholung aus einer n-Menge = $= V_{\text{mW}}(n; k) = {}^{\text{W}}V_n^k$.

Anzahl der k-Tupel (= k-Variationen) ohne Wiederholung aus einer n-Menge = $= V_{\text{oW}}(n; k) = V_n^k$.

Anzahl der k-Kombinationen mit Wiederholung aus einer n-Menge = $= K_{\text{mW}}(n; k) = {}^{\text{W}}C_n^k$.

Anzahl der k-Mengen (= k-Kombinationen ohne Wiederholung) aus einer n-Menge = $K_{\text{oW}}(n; k) = C_n^k$.

Zusammenfassend illustrieren wir die vier unterschiedlichen Abzählprobleme.

Beispiel 8: Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sie
a) 3 numerierte Sitzplätze sind,
b) 3 unnumerierte Stehplätze sind?

Dabei müssen wir noch jeweils unterscheiden, ob ein Schüler
α) genau eine Karte oder
β) mehrere Karten nehmen kann.

Lösung:
aα) Jede Verteilung der 3 unterschiedlichen Karten auf die 15 Schüler stellt eine 3-Permutation aus den 15 Schülern dar. Es gibt also $\frac{15!}{(15-3)!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = = 2730$ Möglichkeiten.
aβ) Jede Verteilung der 3 unterschiedlichen Karten auf die 15 Schüler stellt ein Schülertripel dar. Es gibt also $15^3 = 3375$ Möglichkeiten.
bα) Jede Verteilung der 3 gleichwertigen Karten auf die 15 Schüler stellt eine Menge von 3 Schülern (= 3-Kombination ohne Wiederholung) dar. Es gibt also $\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ Möglichkeiten.
bβ) Jede Verteilung der 3 gleichwertigen Karten auf die 15 Schüler stellt eine Kombination von 3 Schülern (mit Wiederholung) dar. Es gibt also $\binom{15+3-1}{3} = \binom{17}{3} = 680$ Möglichkeiten.

8.3. Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Mit den in **8.2.** erarbeiteten kombinatorischen Hilfsmitteln können wir jetzt Laplace-Wahrscheinlichkeiten auch in komplizierteren Fällen berechnen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beispiel 1: In einem Studentenheim ist es Brauch, daß jeder an seinem Geburtstag alle Mitbewohner zu einer Geburtstagsfeier einlädt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einem Tag mehr als eine Feier stattfindet, wenn im Heim
a) 10 Studenten, **b)** n Studenten wohnen?*

Lösung: Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß unser Kalender keine Schalttage kennt und daß die Geburten gleichmäßig übers Jahr verteilt sind, d.h., daß jeder Tag mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{365}$ als Geburtstag für eine bestimmte Person in Frage kommt.
a) Ein möglicher Ergebnisraum Ω ist die Menge aller 10-Tupel aus den 365 Tagen des Jahres. Also gilt $|\Omega| =$ Anzahl der 10-Tupel aus einer 365-Menge $= 365^{10}$. Das Ereignis $A :=$ »Mindestens zwei Feiern finden am gleichen Tag statt« besteht aus allen 10-Tupeln, in denen mindestens zwei gleiche Elemente sind. Dieses Ereignis läßt sich nur schwer abzählen. Sehr viel einfacher bestimmt man dagegen die Mächtigkeit des Gegenereignisses $\bar{A} =$ »Alle Feste finden an verschiedenen Tagen statt«. $\bar{A}$ besteht aus allen 10-Tupeln, in denen alle 10 Elemente verschieden sind. $|\bar{A}|$ ist also die Anzahl der 10-Permutationen aus einer 365-Menge $=$
$= \dfrac{365!}{(365-10)!} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 356.$

Damit ergibt sich $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 356}{365^{10}} = 11{,}7\%$.
b) Im allgemeinen Fall haben wir anstelle der 10-Tupel jeweils die n-Tupel zu nehmen.

Wir erhalten $P(A) = 1 - \dfrac{365!}{(365-n)!\,365^n}$, falls $0 \leqq n \leqq 365$.

Für $n > 365$ gilt selbstverständlich $P(A) = 1$.

Tabelle 98.1 und Figur 98.1 zeigen den Verlauf dieser Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n.
Erstaunlicherweise ist $P(A) > \frac{1}{2}$ bereits für $n = 23$.
In einer Klasse mit 30 Schülern kann man schon mit einer Wahrscheinlichkeit von 71% damit rechnen, daß mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben.

Beispiel 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto »6 aus 49« mit einer Tippreihe
a) genau 4 Richtige,
b) mindestens 4 Richtige zu haben?

Lösung: Ein möglicher Ergebnisraum Ω ist die Menge aller 6-Mengen aus der 49-Menge $\{1, 2, \ldots, 48, 49\}$. $|\Omega|$ ist also die Anzahl der 6-Mengen, die man aus der 49-Menge bilden kann, also $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$. Da keine Veranlassung besteht anzunehmen, daß eine dieser 6-Mengen vor irgendeiner anderen ausgezeichnet ist, nehmen wir auf Ω eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

* Das Problem geht auf eine 1939 veröffentlichte Arbeit *Richard v. Mises'* (1883–1953) zurück.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

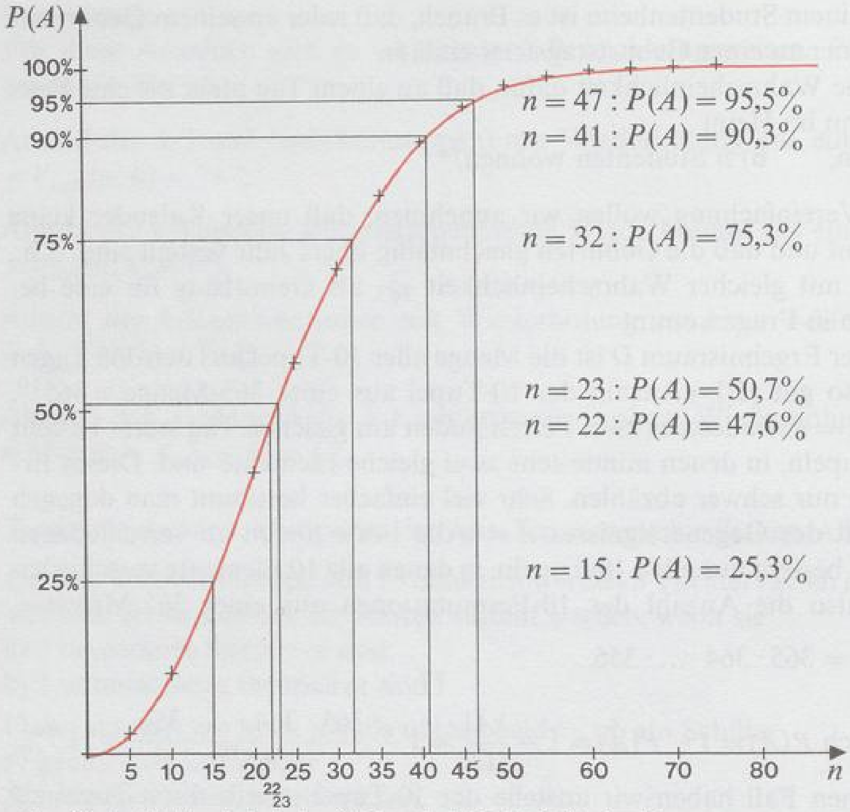

Fig. 98.1 Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit für das Zusammenfallen mindestens zweier Geburtstage von der Anzahl n der Personen

n	$P(A)$
0	0,000
5	0,027
10	0,117
15	0,253
20	0,411
25	0,569
30	0,706
35	0,814
40	0,891
45	0,941
50	0,970
55	0,986
60	0,994
65	0,998
70	0,999
75	1,000

Tab. 98.1 $P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter n Personen mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben.

a) Das betrachtete Ereignis $A :=$ »Genau 4 Richtige« besteht aus den Ziehungen von 6 Kugeln, bei denen genau 4 Kugelnummern mit 4 von den 6 auf dem Tippschein angekreuzten Zahlen übereinstimmen (siehe Bild 99.1). Zur Berechnung der Anzahl dieser günstigen Ergebnisse verwenden wir das Zählprinzip. Zunächst gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten, die 4 Treffer auf die 6 angekreuzten Zahlen zu verteilen. Dann aber gibt es noch $\binom{43}{2}$ Möglichkeiten, die beiden weiteren gezogenen Kugelnummern auf die 43 nicht angekreuzten Zahlen zu verteilen. Man erhält somit $|A| = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,545$ und damit für

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{13\,545}{13\,983\,816} = 0{,}000\,968\,6 \approx 0{,}097\,\% \approx 1\,‰.$$

b) Hier sind auch noch die Ergebnisse günstig, die genau 5 bzw. 6 Treffer enthalten. Da die Ereignisse A, $B :=$ »Genau 5 Richtige« und $C :=$ »Genau 6 Richtige« unvereinbar sind, gilt auf Grund von Satz 64.1:

P(»Mindestens 4 Richtige«) $= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) =$

$$= \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} =$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

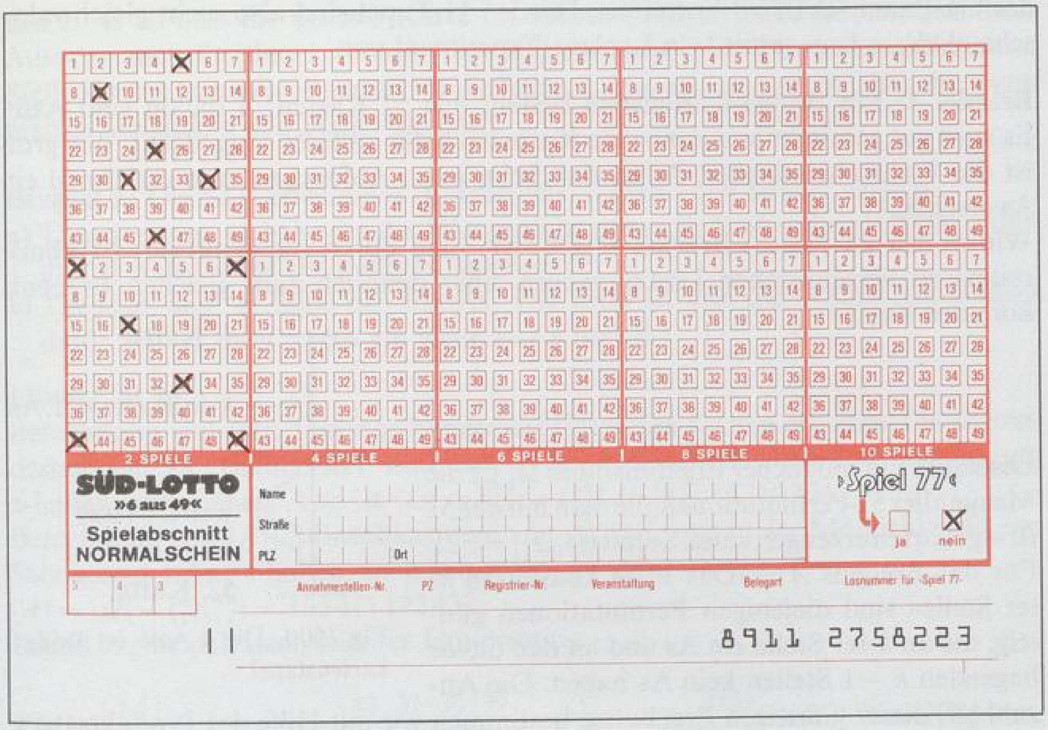

Bild 99.1 Lottoschein mit 2 ausgefüllten Spielfeldern

$$= \frac{13\,545 + 258 + 1}{13\,983\,816} = 0{,}000\,987\,1 \approx 0{,}099\% \approx 1\,‰.$$

Füllt man also sehr oft Tippzettel aus, so kann man in etwa 1 von 1000 Fällen damit rechnen, mindestens 4 Richtige getippt zu haben. Bei 2 Tippreihen pro Woche kann man also etwa alle 10 Jahre einmal ein solches Erfolgserlebnis haben!

Beispiel 3: Wegen katastrophaler Wetterverhältnisse mußten an einem Spieltag sämtliche Spiele der Bundesliga ausfallen. Für die Totospieler wurden die 11 Spiele daher ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an diesem Spieltag mit einer Tippreihe (siehe Bild 90.1) genau 9 Richtige getippt zu haben?

Lösung: Ein möglicher Ergebnisraum Ω ist die Menge aller 11-Tupel, die man aus der 3-Menge $\{0, 1, 2\}$ bilden kann. Also gilt $|\Omega| =$ Anzahl der 11-Tupel aus einer 3-Menge $= 3^{11} = 177\,147$. Das Ereignis $A :=$ »Genau 9 Richtige« besteht aus denjenigen 11-Tupeln, die an genau 9 Stellen dieselben Zahlen aufweisen wie unsere Tippreihe. Diese 9 Richtigen lassen sich auf $\binom{11}{9}$ Arten aus den 11 getippten Zahlen auswählen. Für die restlichen 2 falschen Tips gibt es jeweils 2 Möglichkeiten. Der Produktsatz liefert also $|A| = \binom{11}{9} \cdot 2^2$. Damit erhält man

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{11}{9} \cdot 2^2}{3^{11}} = \frac{220}{177\,147} \approx 0{,}001\,242 \approx 1\,‰.$$

Für einen normalen Spieltag ist diese Überlegung natürlich falsch, da die Erfahrung zeigt, daß die Zahl 1 im 11-Tupel erheblich öfter auftritt als die Zahl 0, und diese wiederum häufiger als die Zahl 2, weil die Heimmannschaft gegenüber

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

der Gastmannschaft im Vorteil ist. Die 3^{11} 11-Tupel sind also nicht gleichwahrscheinlich; es liegt somit kein Laplace-Experiment vor.

Beispiel 4: Ein Bridge-Kartenspiel besteht aus 52 Karten; 4 davon sind Asse. Es wird gut gemischt und dann eine Karte nach der anderen aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim k-ten Aufdecken zum erstenmal ein As erscheint?
Wir wollen an diesem Beispiel zeigen, wie man durch die Wahl des Ergebnisraums zu verschiedenen Lösungswegen, aber dennoch zum gleichen Ergebnis kommen kann.

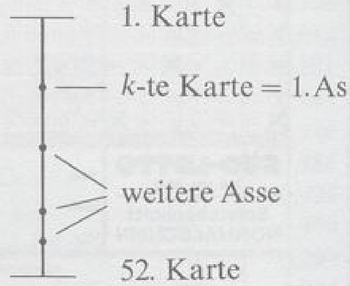

Fig. 100.1 Die 4 Asse im Bridgekartenstapel

Lösung 1: Ein möglicher Ergebnisraum Ω_1 ist die Menge aller 52-Permutationen, die man mit den 52 Bridgekarten erzeugen kann. Somit ist $|\Omega_1| = 52!$. Für das Ereignis $A := $»Das 1. As kommt an k-ter Stelle« sind diejenigen Permutationen günstig, die an k-ter Stelle ein As und an den davor liegenden $k-1$ Stellen kein As haben. Die Anzahl $|A|$ dieser günstigen Ergebnisse bestimmen wir mit Hilfe des Produktsatzes: Die ersten $k-1$ Stellen werden gebildet von den $(k-1)$-Permutationen aus der 48-Menge der 48 Nicht-Asse; das ergibt $\frac{48!}{(48-(k-1))!}$ Möglichkeiten. Für die k-te Stelle steht eines der 4 Asse zur Verfügung; das ergibt 4 Möglichkeiten. Die restlichen $52-k$ Stellen werden durch die Permutationen der noch verbliebenen $52-k$ Karten belegt; das ergibt $(52-k)!$ Möglichkeiten. Nach dem Produktsatz ist also $|A| = \frac{48!}{(49-k)!} \cdot 4 \cdot (52-k)!$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten wir somit

$$P(A) = \frac{48! \cdot 4 \cdot (52-k)!}{(49-k)! \cdot 52!} = \frac{1}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 13} \cdot \frac{(52-k)!}{(49-k)!} = \frac{(52-k)(51-k)(50-k)}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 13}.$$

Lösung 2: Wir denken uns die Stellen, an denen die Karten im Stapel liegen, von 1 bis 52 durchnumeriert. Die Nummern der Stellen, an denen die 4 Asse liegen, bilden eine 4-Menge. Ein möglicher Ergebnisraum Ω_2 ist dann die Menge aller 4-Mengen, die man aus der 52-Menge der Nummern von 1 bis 52 bilden kann. Das ergibt $|\Omega_2| = \binom{52}{4}$. Die für das Ereignis A günstigen Ergebnisse bestehen jetzt aus den 4-Mengen, die als kleinstes Element die Zahl k enthalten. Die übrigen 3 Zahlen einer solchen Menge müssen aus den nach k kommenden Nummern $k+1$, $k+2, \ldots, 52$ ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{52-k}{3}$ Möglichkeiten. Für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ erhalten wir damit auf diesem Weg den Ausdruck $P(A) = \frac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}$, der völlig anders aussieht als der in Lösung 1 errechnete. Durch eine einfache Umformung kann die Gleichheit aber leicht gezeigt werden.

Da $\binom{52-k}{3}$ mit wachsendem k monoton fällt, nimmt die Wahrscheinlichkeit für A monoton mit wachsender Platznummer k ab. Die wahrscheinlichste Stelle für

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

das 1. As ist also die oberste Karte im Stapel. Man bedenke jedoch, daß diese Aussage auch für den 1. König, die 1. Dame usw. gilt! Die wahrscheinlichste Stelle für das letzte As ist natürlich die letzte Karte, was man leicht einsieht, wenn man in Gedanken den Stapel umkehrt.

Beispiel 5: Die 52 Karten eines Bridgespiels werden auf 4 Spieler verteilt.

a) Theodor sagt, er habe ein As. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens ein weiteres As besitzt?

b) Theodor sagt, er habe das Pik-As. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens ein weiteres As besitzt?

Lösung für a):

Berechnung von $|\Omega|$: Theodor könnte auf $\binom{52}{13}$ Arten Karten erhalten. Da er mindestens ein As erhalten hat, sind die $\binom{48}{13}$ Möglichkeiten, einen Satz ohne As zu erhalten, abzuziehen. Also ist $|\Omega| = \binom{52}{13} - \binom{48}{13} = 442085310304$.

Berechnung von $|A|$: Subtrahiert man von $|\Omega|$ die Anzahl der Möglichkeiten, im Satz genau 1 As zu haben, so erhält man $|A|$. Also

$|A| = |\Omega| - \binom{4}{1}\binom{48}{12} = 163411172432$.

Damit ergibt sich nach leichter Umformung

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{52 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 - 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39} = 1 - \frac{9139}{14498} = 0{,}3696 \approx 37\%.$$

Lösung für b):

Theodor hat das Pik-As erhalten. Für seine weiteren 12 Karten gibt es noch $\binom{51}{12}$ Möglichkeiten; also ist $|\Omega| = \binom{51}{12}$. Davon sind wieder $\binom{48}{12}$ Möglichkeiten ohne As. Daher ist

$|A| = |\Omega| - \binom{48}{12}$. Somit ergibt sich

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{48}{12}}{\binom{51}{12}} = 1 - \frac{9139}{20825} = \frac{11686}{20825} = 0{,}5612 \approx 56\%.$$

Es ist zunächst erstaunlich, daß die beiden Wahrscheinlichkeiten so verschieden sind. Man muß dabei jedoch bedenken, daß den beiden Aufgaben verschiedene Wahrscheinlichkeitsräume zugrunde liegen. Im Fall **a)** besteht Ω aus all den Spielen, in denen Theodor mindestens ein As erhalten hat, im Fall **b)** hingegen aus all den Spielen, bei denen Theodor das Pik-As erhalten hat. Man erkennt also, daß die zusätzliche Information, welches As Theodor hat, erheblichen Einfluß auf das Ergebnis hat.

Ähnlich, aber leichter durchschaubar ist

Beispiel 6: Ein Vater von zwei Kindern sagt:

a) »Eines meiner zwei Kinder ist ein Junge.«

b) »Das ältere meiner zwei Kinder ist ein Junge.«

Wie groß ist in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auch das zweite Kind ein Junge ist, falls Knaben- und Mädchengeburt als gleichwahrscheinlich angenommen werden?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lösung: Ordnet man die Paare dem Alter nach, so erhält man mit J := Junge, M := Mädchen:

Fall **a)**:

$\Omega = \{(J, J), (J, M), (M, J)\}$
$A = \{(J, J)\}$
$P(A) = \frac{1}{3}$

Fall **b)**:

$\Omega = \{(J, J), (J, M)\}$
$A = \{(J, J)\}$
$P(A) = \frac{1}{2}$

Die hier berechneten Wahrscheinlichkeiten sind folgendermaßen zu verstehen: Untersucht man sehr viele Familien mit zwei Kindern unter den angegebenen Bedingungen, so wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Kinder Jungen sind, in der Nähe der angegebenen Werte liegen. Dieser Sachverhalt läßt sich gut anhand von Tabelle 11.1 veranschaulichen. Interpretiert man I als Junge und 0 als Mädchen, und faßt man zwei aufeinanderfolgende Würfe jeweils als die beiden Kinder einer zufällig herausgegriffenen Familie zusammen, so erhält man
108 Familien mit zwei Mädchen (00),
82 Familien mit der Reihenfolge Mädchen/Junge (0I),
102 Familien mit der Reihenfolge Junge/Mädchen (I0),
108 Familien mit zwei Jungen (II).

Im Fall **a)** ergibt sich als relative Häufigkeit $h_{292} = \frac{108}{82+102+108} = \frac{108}{292} = 0{,}37$.
Im Fall **b)** ergibt sich als relative Häufigkeit $h_{210} = \frac{108}{102+108} = \frac{108}{210} = 0{,}51$.

Das in Aufgabe 68/**16** für $n = 3$ gestellte Problem der vertauschten Briefe läßt sich nun mit Hilfe der Formel von *Sylvester* (Satz 66.1) allgemein lösen:

Beispiel 7: *Bernoulli-Euler*sches Problem der vertauschten Briefe.

Unbesehen werden n Briefe in n vorbereitete Umschläge gesteckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß kein Brief im richtigen Umschlag steckt?

Lösung: Es gibt insgesamt $n!$ Möglichkeiten, die n Briefe auf die n Umschläge zu verteilen; also gilt $|\Omega| = n!$.
Bezeichnen wir nun die Briefe und die zugehörigen Umschläge mit der gleichen Nummer i $(1 \leqq i \leqq n)$, so bedeute E_i das Ereignis »Der Brief i liegt im Umschlag i«. Dafür gibt es $|E_i| = 1 \cdot [(n-1)!]$ Möglichkeiten. Es gilt also

$$P(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Das uns interessierende Ereignis $E :=$ »Kein Brief liegt in seinem Umschlag« läßt sich durch die E_i folgendermaßen ausdrücken:

$$E = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap \ldots \cap \bar{E}_n = \overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n}$$

Damit erhalten wir

$$P(E) = P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n}) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$$

Zur Berechnung des Subtrahenden benötigen wir die Formel von *Sylvester* (Satz 66.1). Für die darin auftretenden Wahrscheinlichkeiten gilt:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$P(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad i < j;$$

$$P(E_i \cap E_j \cap E_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \quad i < j < k;$$

....

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = \frac{(n-n)!}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Damit gilt:

$$P(E) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j}^{n} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - + \ldots \right) =$$

$$= 1 - \left(\binom{n}{1} \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!} \right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

wie 1708 *Montmort* (1678–1719) in seinem *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* zeigte. – Figur 103.1 gibt die Abhängigkeit dieser Wahrscheinlichkeit $P(E)$ von der Anzahl n der Briefe wieder. Erstaunlicherweise ändert sich $P(E)$ praktisch nicht mehr ab $n = 7$. Das heißt, daß die Wahrscheinlichkeit $1 - P(E)$ dafür,

n	$P(E)$
1	0,0000
2	0,5000
3	0,3333
4	0,3750
5	0,3667
6	0,3681
7	0,3679
8	0,3679
9	0,3679
10	0,3679
. .	. .
$+\infty$	$\frac{1}{e} = 0{,}367879\ldots$

Tab. 103.1 $P(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keiner von n Briefen im richtigen Umschlag steckt.

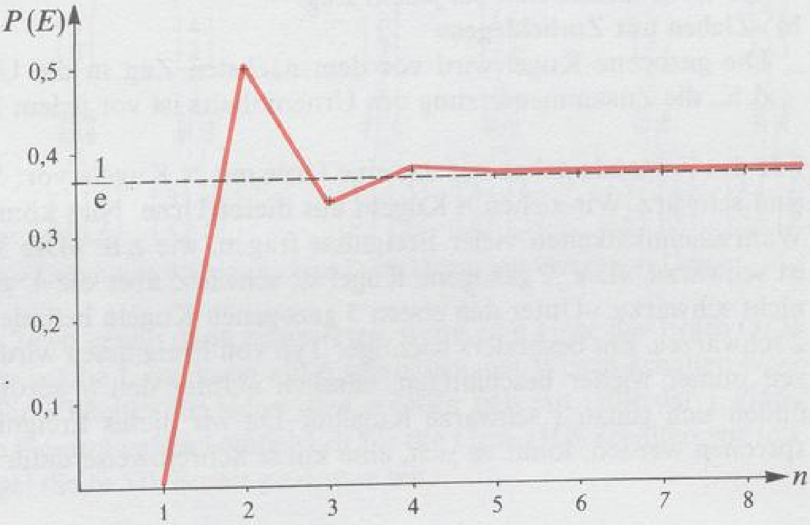

Fig. 103.1 Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit von n beim *Bernoulli-Euler*schen Problem der vertauschten Briefe.

daß mindestens ein Brief richtig ankommt, ab $n = 7$ praktisch unabhängig von der Anzahl der Briefe durch $1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212$ gut approximiert wird, wie 1708 *Montmort* und 1751 *Leonhard Euler* (1707–1783) zeigten. (Siehe auch die Fußnote auf Seite 68.)

8.4. Das Urnenmodell*

8.4.1. Problemstellung

Viele Zufallsexperimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. Dabei ist das Urnenexperiment oft übersichtlicher, weil man sich hier auf das Wesentliche des Zufallsgeschehens beschränken kann. So läßt sich das Laplace-Zufallsexperiment »Werfen eines Laplace-Würfels« durch das Ziehen aus einer Urne mit 6 unterscheidbaren Kugeln simulieren. Aber auch Nicht-Laplace-Experimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. So weiß man z. B., daß die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt weltweit ziemlich genau den Wert 0,514 hat. Das Zufallsexperiment »Geburt eines Kindes« kann also durch das Ziehen aus einer Urne simuliert werden, die 514 Kugeln einer Farbe und 486 andere Kugeln enthält.

Bei einem Urnenexperiment verwendet man eine Urne, die gleichartige, je nach Problemstellung mit verschiedenen Merkmalen (z. B. Farbe, Nummer) versehene Kugeln enthält. Das Experiment besteht nun darin, daß man der Reihe nach je eine Kugel bis zu einer festgelegten Anzahl zieht und deren Merkmale notiert. Dabei gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Verfahrensweisen:

a) **»Ziehen ohne Zurücklegen«**
Die jeweils gezogene Kugel wird beiseite gelegt, d. h., die Zusammensetzung der Urne ändert sich bei jedem Zug.

b) **»Ziehen mit Zurücklegen«**
Die gezogene Kugel wird vor dem nächsten Zug in die Urne zurückgelegt; d. h., die Zusammensetzung des Urneninhalts ist vor jedem Zug die gleiche.**

Für das Folgende geben wir uns eine Urne mit N Kugeln vor; S dieser N Kugeln sind schwarz. Wir ziehen n Kugeln aus dieser Urne. Nun könnte man nach den Wahrscheinlichkeiten vieler Ereignisse fragen, wie z. B. »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz«, »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz, aber die 4. gezogene Kugel ist nicht schwarz«, »Unter den ersten 5 gezogenen Kugeln befinden sich mindestens 2 schwarze«. Ein besonders wichtiger Typ von Ereignissen wird uns in der Folgezeit immer wieder beschäftigen, nämlich »Unter den n gezogenen Kugeln befinden sich genau s schwarze Kugeln«. Da wir dieses Ereignis sehr häufig ansprechen werden, lohnt es sich, eine kurze Schreibweise dafür einzuführen. Wir

* Zur Einführung der Urne in die Wahrscheinlichkeitsrechnung lese man die Fußnote zu Aufgabe 124/**99**.

** Bei komplizierteren Urnenexperimenten zieht man jeweils statt *einer* Kugel einen Satz von m Kugeln mit oder ohne Zurücklegen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN