Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. 1. Definition und einfache Beispiele

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

8. Laplace-Experimente

8.1. Definition und einfache Beispiele

Es gibt reale Experimente, bei denen man geneigt ist anzunehmen, daß die Ergebnisse gleich häufig auftreten. So erwartet man bei einem symmetrischen Würfel, daß die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 etwa gleich häufig auftreten.
Im zugehörigen stochastischen Modell ist es dann sinnvoll, den Ergebnisraum Ω und die Wahrscheinlichkeitsverteilung P so zu wählen, daß die Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ gleiche Wahrscheinlichkeit p haben.

> **Definition 84.1:** Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **gleichmäßig**, wenn alle Elementarereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Laplace hat bei seinen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie vor allem mit solchen gleichmäßigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen gearbeitet.
Wir legen daher fest:

> **Definition 84.2:** Ein stochastisches Experiment heißt **Laplace-Experiment,** wenn die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung gleichmäßig ist.

In der Praxis wird man so vorgehen, daß man zunächst diese Laplace-Annahme macht und sie dann in Versuchen überprüft. Stimmen die so erhaltenen Resultate nicht mit den unter der Laplace-Annahme berechneten überein, dann wird man das stochastische Modell abändern. Entweder wählt man eine andere, nicht gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P^* auf Ω, oder man nimmt einen anderen Ergebnisraum Ω', für den man wieder die Laplace-Annahme macht. Dazu betrachten wir folgendes
Beispiel: In einer Urne liegen eine rote und eine schwarze Kugel. Wir ziehen zweimal eine Kugel mit Zurücklegen.
Zu diesem realen Experiment lassen sich verschiedene stochastische Modelle konstruieren.

1. Stochastisches Modell:

$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $\omega_1 :=$ »Beide Kugeln sind rot«
$\omega_2 :=$ »Beide Kugeln sind schwarz«
$\omega_3 :=$ »Die Kugeln sind verschiedenfarbig«

Die Laplace-Annahme führt zu folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	ω_1	ω_2	ω_3
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dieses stochastische Modell bewährt sich in der Praxis nicht. ω_3 tritt nämlich etwa doppelt so häufig auf wie ω_1 bzw. ω_2. Der Grund dafür ist leicht einzusehen. Bei den zwei Zügen kann die Verschiedenfarbigkeit auf zwei Arten entstehen:

Zuerst »rot« und dann »schwarz« oder umgekehrt. Für »rot-rot« bzw. »schwarz-schwarz« gibt es jedoch nur je eine Möglichkeit.

Um das stochastische Modell der Realität anzupassen, können wir entweder eine nicht gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P^* wählen oder einen anderen Ergebnisraum Ω' konstruieren, auf dem eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung zu realistischen Werten führt.

2. Stochastisches Modell:

Man behält den Ergebnisraum Ω bei und wählt als neue Wahrscheinlichkeitsverteilung P^*:

ω	ω_1	ω_2	ω_3
$P^*(\{\omega\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

3. Stochastisches Modell:

Man wählt einen Ergebnisraum Ω', der die Reihenfolge der Kugeln berücksichtigt:

$$\Omega' := \{\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4\} \quad \text{mit } \begin{aligned}[t] \omega'_1 &:= \text{»rot-rot«} \\ \omega'_2 &:= \text{»rot-schwarz«} \\ \omega'_3 &:= \text{»schwarz-rot«} \\ \omega'_4 &:= \text{»schwarz-schwarz«}. \end{aligned}$$

Auf Ω' legt man die gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P' fest:

ω'	ω'_1	ω'_2	ω'_3	ω'_4
$P'(\{\omega'\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Das 2. und das 3. stochastische Modell geben das reale Experiment zufriedenstellend wieder. Das 1. und das 3. stochastische Modell sind Laplace-Experimente, nicht jedoch das 2. stochastische Modell.

Laplace-Experimente haben den Vorteil, daß für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen eine besonders einfache Formel gilt. Zu ihrer Herleitung berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit p eines Elementarereignisses $\{\omega_i\}$.
Nach Definition 42.1 gilt mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = n \cdot p, \quad \text{also} \quad p = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Für ein beliebiges Ereignis A, das aus k Ergebnissen besteht, ergibt sich damit

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k\text{-mal}} = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Also gilt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Die so berechneten Wahrscheinlichkeiten nennt man auch **Laplace-Wahrscheinlichkeiten.**
Da A genau dann eintritt, wenn sich ein Ergebnis ω mit $\omega \in A$ einstellt, nennt man diese ω die für A günstigen Ergebnisse. Man kann daher die letzte Formel folgendermaßen in Worte fassen:

Satz 86.1:
Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A bei einem Laplace-Experiment =

$$= \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Man sieht leicht ein, daß durch die Laplace-Annahme eine zulässige Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert wird. (Siehe Aufgabe 111/**1**.) An drei Beispielen wollen wir die Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten vorführen.

Beispiel 1: Würfelwurf mit einem Würfel

$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A :=$ »Augenzahl ist prim«, $P(A) = \frac{|\{2, 3, 5\}|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Beispiel 2: Würfelwurf mit zwei Würfeln

$\Omega := \{(1|1), (1|2), \ldots, (2|1), \ldots, (6|6)\}$, $A :=$ »Augensumme ist mindestens 10«,

$$P(A) = \frac{|\{(6|6), (6|5), (6|4), (5|6), (5|5), (4|6)\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Beispiel 3: Ziehen einer Karte aus einem Bridgespiel* (Bild 87.1)

$\Omega := \{\text{Kreuz-As, Kreuz-2, …, Pik-König}\}$
$A :=$ »Die gezogene Karte ist eine Dame«

$$P(A) = \frac{|\{\text{Kreuz-Dame, Pik-Dame, Herz-Dame, Karo-Dame}\}|}{|\Omega|} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

* Bridge ist um 1896 aus dem über 300 Jahre alten englischen Whist hervorgegangen, wenngleich in Griechenland und auch in Konstantinopel schon vor 1870 ein ähnliches Kartenspiel unter dem Namen Khedive oder auch Biritch gespielt wurde. Das Bridge ist ein 4-Personen-Spiel von 52 Blatt. Verwendet werden die sog. französischen Karten. Je 13 Karten in der aufsteigenden Reihenfolge 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As bilden eine der 4 »Farben«, deren Symbole und Namen nachstehend in aufsteigender Wertfolge wiedergegeben sind.

französisch:	trèfle	carreau	cœur	pique
deutsch:	Kreuz; Treff	Karo	Herz	Pik

Die Eins im Kartenspiel (und auch im Würfelspiel) heißt As. Im Lateinischen bedeutet *as* »Das Ganze als Einheit«; dementsprechend wurde mit *as* die Einheit des Längen-, des Flächen- und auch des Gewichtsmaßes bezeichnet. Seit etwa 289 v. Chr. wurde *as* in Rom auch als Münzeinheit verwendet. – Der Ursprung der Spielkarten ist umstritten. Weder *Dante* (1265–1321), *Boccaccio* (1313–1375), *Petrarca* (1304–1374) noch *Chaucer* (1340–1400) erwähnen sie. Erstmals verboten wurden sie (lt. Abschrift von kurz vor 1398) am 24. 3. 1367 in Bern, dann am 23. und 24. März 1377 in Florenz (im Original erhalten). Es folgen 1377 Siena, 1378 Regensburg, 1379 St. Gallen und Konstanz, 1380 Nürnberg und Perpignan, … Belegt sind Spielkarten 1377 in Basel/Freiburg, 1378 in Zaragoza, 1379 in Viterbo und im Brabant, 1380 in Barcelona, 1381 in Marseille, …

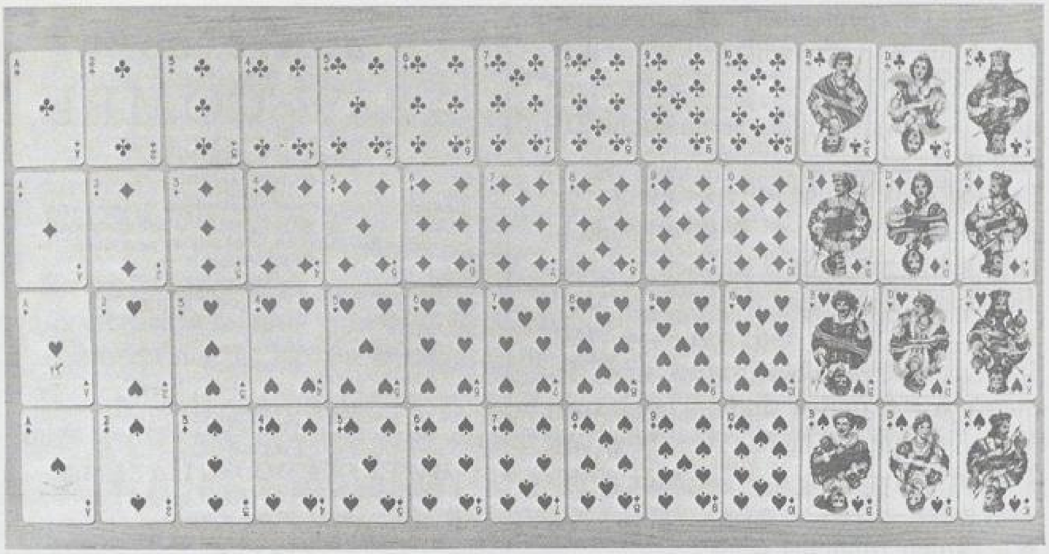

Bild 87.1 Die 52 französischen Karten des Bridgespiels

Das Problem bei der Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten besteht darin, die Anzahlen $|A|$ und $|\Omega|$ zu bestimmen. Dies ist bei großen Anzahlen nicht immer durch Abzählen in vernünftiger Zeit möglich. Wir wollen daher im nächsten Abschnitt Hilfsmittel entwickeln, durch die dieses mühsame Abzählen erleichtert wird.

8.2. Kombinatorische Hilfsmittel

Wie schwer das Abzählen der Mengen A und Ω ist, zeigte sich uns ja schon bei den wiederholt aufgeworfenen Problemen der Augensummen von 2 bzw. 3 Würfeln. Die Schwierigkeit liegt, allgemein gesprochen, darin, den Abzählvorgang so zu systematisieren, daß kein Element vergessen und andererseits keines mehrfach gezählt wird. Dem Zweig der Mathematik, der sich mit solchen Vorgängen befaßt, gab 1666 *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) durch seine *Dissertatio de Arte Combinatoria* den Namen »Kombinatorik«. Welchen Rahmen sich dabei der 20jährige *Leibniz* steckte, zeigt das Titelblatt seiner Arbeit (Bild 88.1). *Leibniz* war nämlich überzeugt, daß

»per Artem Combinatoriam alle Notiones Compositae der ganzen Welt in wenig Simplices als deren Alphabet reducirt, und aus solches alphabets Combination wiederumb alle Dinge, samt ihren theorematibus, und was nur von ihnen zu inventiren müglich, ordinata methodo mit der Zeit zu finden, ein weg gebahnet wird.«*

Für ihn ist die kombinatorische Kunst die Grundlage einer universalen Wissenschaft aller Dinge. So weit wollen wir es aber nicht treiben! Unser bescheidenes Ziel ist es, in einigen einfachen Fällen Abzählvorgänge zu beherrschen.
Die wichtigste Art, Anzahlen abzuzählen, lernen wir kennen in folgender

* Brief *Leibnizens* an Herzog *Johann Friedrich* von Hannover, September 1671.