Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Anhang I: Experimentelle Bestimmung der Zahl Π nach Buffon (1707-1788)

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

*Anhang I

Experimentelle Bestimmung der Zahl π nach *Buffon* (1707–1788)

Man denke sich die Ebene überdeckt von einer Parallelenschar mit Abstand d. Eine Nadel der Länge a $(a < d)$ werde willkürlich auf die Parallelenschar geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine der Parallelen schneidet?

Lösung: x sei der Abstand des tiefsten Punkts der Nadel von der nächsten höheren Parallelen. (Siehe Figur 386.1 und 386.2.)

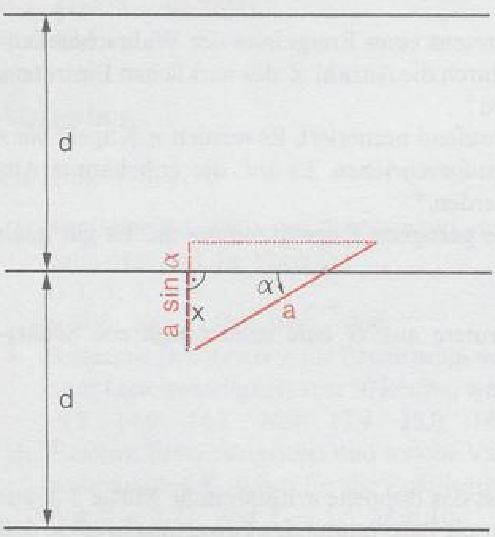

Fig. 386.1 Die Nadel schneidet eine Parallele der Schar.

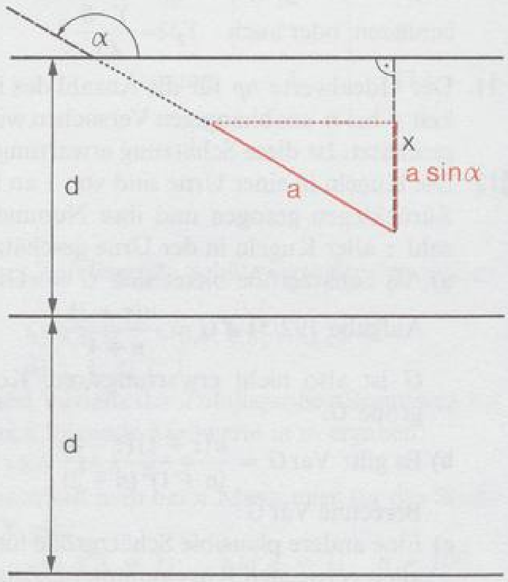

Fig. 386.2 Die Nadel schneidet keine Parallele der Schar.

α ist der Winkel, um den man eine Parallele gegen den Uhrzeigersinn drehen muß, damit sie parallel zur Nadel zu liegen kommt. Offensichtlich gilt $0 \leqq \alpha < \pi$. Man erkennt, daß die Nadel eine Parallele der Schar genau dann schneidet, wenn $x \leqq a \cdot \sin\alpha$ ist. Jede mögliche Lage der Nadel zur Parallelenschar ist durch die Angabe der Werte x und α eindeutig bestimmt. In einem rechtwinkligen α-x-Koordinatensystem lassen sich die möglichen Lagen als Punktmenge $\{(\alpha|x) | 0 \leqq \alpha < \pi \wedge 0 \leqq x < d\}$ darstellen. Diese Punktmenge erfüllt ein Rechteck mit den Seiten π und d.

Genau diese Punktmenge wollen wir nun als unendlichen Ergebnisraum Ω für das Werfen der Nadel verwenden. Das uns interessierende Ereignis $A :=$ »Die Nadel schneidet eine Parallele« wird dann durch die »günstigen Punkte« dieses Rechtecks gebildet. Das sind aber die Punkte, die der Bedingung $x \leqq a \cdot \sin\alpha$ genügen. Sie liegen im Rechteck auf und unterhalb des Graphen der Funktion mit der Gleichung $x = a \cdot \sin\alpha$. (Figur 387.1) Die Laplace-Annahme bedeutet hier, daß sich die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen wie die Flächenmaßzahlen von Figuren verhalten, die von den jeweils günstigen Punkten gebildet werden. Damit erhalten wir $P(A) = \dfrac{P(A)}{P(\Omega)} = \dfrac{\text{Flächeninhalt von } A}{\text{Flächeninhalt von } \Omega}$. Der Flächeninhalt von Ω ergibt sich als Inhalt des Rechtecks zu πd. Der Flächeninhalt von A ergibt sich durch Integration zu $\int\limits_0^\pi a \cdot \sin\alpha \, d\alpha = [-a \cdot \cos\alpha]_0^\pi = 2a$. Damit erhalten wir schließlich $P(A) = \dfrac{2a}{\pi d}$. Aufgelöst nach

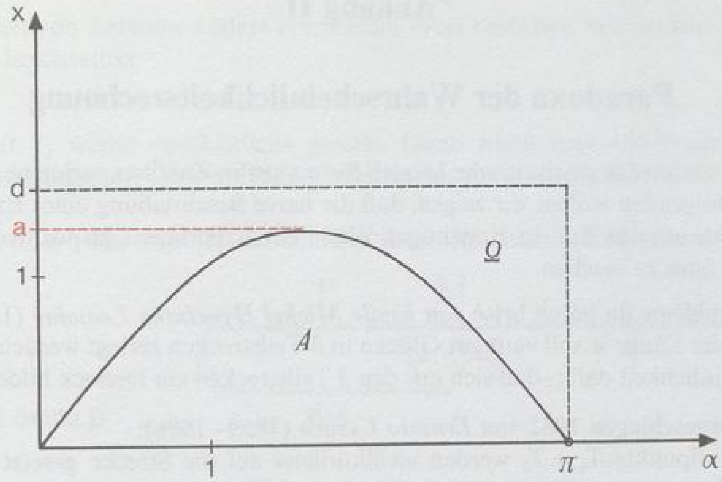

Fig. 387.1 Geometrische Veranschaulichung von A und Ω

π ergibt dies $\pi = \dfrac{2a}{d \cdot P(A)}$. Für eine große Anzahl n von Versuchen ersetzen wir $P(A)$ durch $h_n(A) = \dfrac{k}{n}$, wobei k die Anzahl derjenigen der n Würfe angibt, bei denen die Nadel eine Parallele schneidet; also $\pi \approx \dfrac{2an}{kd}$. Mit Hilfe dieser Formel wurden experimentell Näherungswerte für π bestimmt*:

Experimentator	Jahr	Anzahl der Nadelwürfe	gefundener Näherungswert
Wolf	1850	5000	3,1596
*Smith***	1855	3204	3,1553
Fox	1894	1120	3,1419
Lazzarini	1901	3408	3,1415929

Der Wert von *Lazzarini* sollte mit Mißtrauen betrachtet werden. Die »krumme« Wurfzahl 3408 läßt vermuten, daß *Lazzarini* genau dann aufhörte, Nadeln zu werfen, als er einen sehr guten Näherungswert für π erworfen hatte. Den Verdacht erhärtet folgende Abschätzung. Nehmen wir an, daß *Lazzarini* noch einmal geworfen hätte. Er könnte dabei einen Schnitt oder auch keinen Schnitt erzielt haben. Bringt der nächste Wurf keinen Schnitt, so erhält man als neuen Näherungswert für π den Ausdruck $\dfrac{2a(n+1)}{kd} = \dfrac{2an}{kd} + \dfrac{2a}{kd} = \dfrac{2an}{kd} + \dfrac{2an}{kd} \cdot \dfrac{1}{n}$.
Setzt man für $\dfrac{2an}{kd}$ den Näherungswert von *Lazzarini* ein, so lautet der neue Näherungswert $3{,}1415929 + \frac{3{,}1415929}{3408} = 3{,}1415929 + 0{,}0009\ldots$ Der 7stellige »gute« Wert von *Lazzarini* würde bereits an der 4. Stelle zerstört.

* Zitiert nach *Gnedenko, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1968), S. 32. – Den Buchstaben π zur Bezeichnung der Verhältniszahl des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser verwendet wohl zum erstenmal *William Jones* (1675–1749) in der *Synopsis palmariorum matheseos* von 1706 (S. 243), was ohne Nachahmung blieb. *Leonhard Euler* (1707–1783) benützte ihn zum erstenmal 1737 in der erst 1744 erschienenen Abhandlung *Variae observationes circa series infinitas*.

** *Ambrose Smith* aus Aberdeen wählte $a = \frac{3}{5}d$.