UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

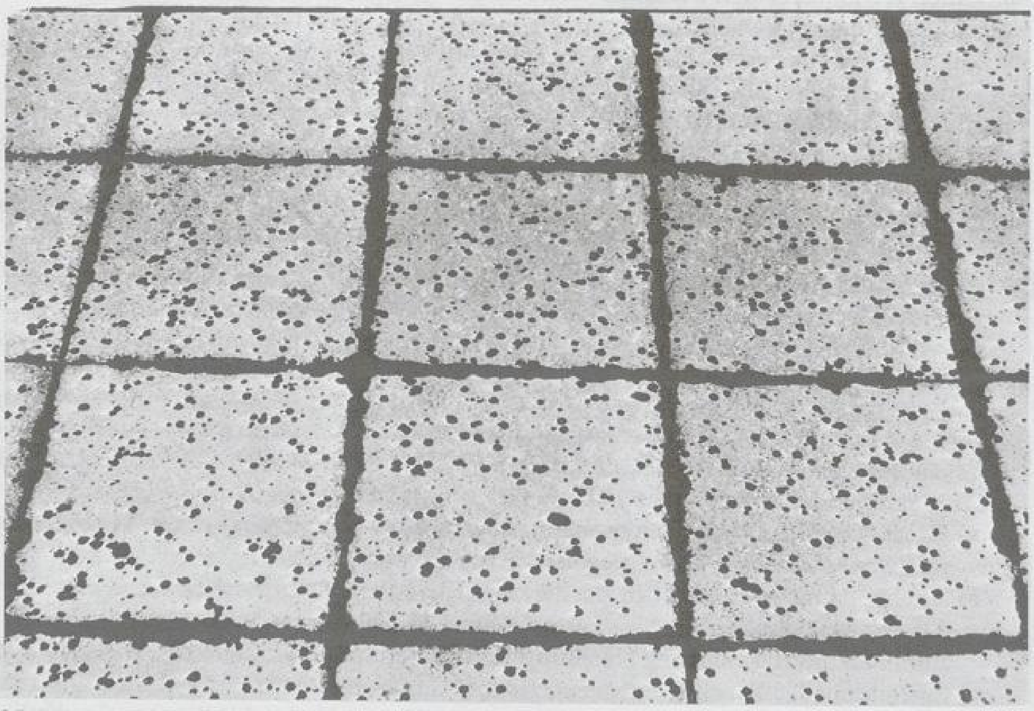
München, [20]03

16. Die Poisson-Näherung für die Binomialverteilung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Visual Library

*16. Die Poisson-Näherung für die Binomialverteilung



Nach welchem Gesetz fällt der Regen? *Henri Poincaré* (1854–1912) schreibt dazu 1908 in *Science et Méthode*: »Pourquoi, dans une averse, les gouttes de pluie nous semblent-elles distribuées au hasard?« Er spricht dann über die Bedingungen in der Atmosphäre und endet: »Pour savoir quelle sera la distribution de ces gouttes et combien il en tombera sur chaque pavé, il ne suffirait pas de connaître la situation initiale des ions, il faudrait supputer l'effet de mille courants d'air minuscules et capricieux.«

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

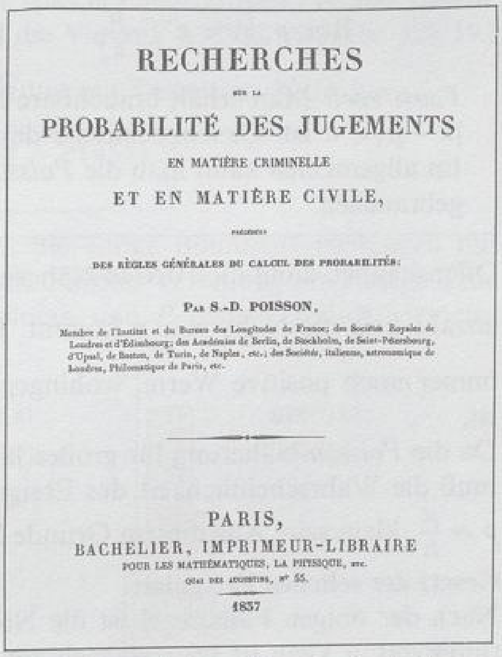
*16. Die *Poisson*-Näherung für die Binomialverteilung

Betrachtet man die Werte von Binomialverteilungen $B(n; p)$, so fällt auf, daß die Tabellen von Binomialverteilungen mit gleichem Erwartungswert $\mu = np$ in ihren Werten ähnlich sind und daß diese Ähnlichkeit mit wachsendem n zunimmt. Tabelle 319.1 zeigt dies beispielhaft für den Erwartungswert $\mu = 2$.

k	$B(10;\frac{1}{5};k)$	$B(20;\frac{1}{10};k)$	$B(50;\frac{1}{25};k)$	$B(100;\frac{1}{50};k)$	$B(200;\frac{1}{100};k)$	$B(500;\frac{1}{250};k)$
0	10737	12158	12989	13262	13398	13479
1	26844	27017	27060	27065	27067	27067
2	30199	28518	27623	27341	27203	27121
3	20133	19012	18416	18228	18136	18081
4	08808	08978	09016	09021	09022	09022
5	02642	03192	03456	03535	03572	03594
6	00551	00887	01080	01142	01173	01191
7	00079	00197	00283	00313	00328	00338
8	00007	00036	00063	00074	00080	00084
9	00000	00005	00012	00015	00017	00018
10		00001	00002	00003	00003	00004
11		00000	00000	00000	00001	00001

Tab. 319.1 Werte 0,… von Binomialverteilungen mit $\mu = 2$.

Es scheint so, als existierte für jedes μ eine Grenzverteilung, der die in μ übereinstimmenden Binomialverteilungen $B(n; p)$ mit wachsendem n zustreben. *Siméon-Denis Poisson* (1781–1840)* hat 1837 in seinem Werk *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* die Grenzverteilung hergeleitet, der die kumulativen Verteilungsfunktionen F_p^n bei konstantem μ mit wachsendem n zustreben. Wir folgen seinem Gedankengang und formen den Term für $B(n; p; k)$ unter Verwendung von $\mu = np$ um.


RECHERCHES

SUR LA

PROBABILITÉ DES JUGEMENTS

EN MATIÈRE CRIMINELLE

ET EN MATIÈRE CIVILE,

PRÉCÉDÉES

DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR S.-D. POISSON,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés, italienne, astronomique de Londres, Philomatique de Paris, etc.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, etc.

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1837

Bild 319.1 Titelblatt von *Poissons* wahrscheinlichkeitstheoretischem Hauptwerk, in dem er u.a. die Untersuchungen über die moralische Wahrscheinlichkeit von *Condorcet* (1743–1794) und *Laplace* (1749–1827) fortsetzte.

* Siehe Seite 421.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(n;p;k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{\mu^k}{n^k}\cdot\frac{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} = \\
&= \frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n})}{(1-\frac{\mu}{n})^k}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n = \\
&= \frac{1}{1-\frac{\mu}{n}}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{\mu}{n}}\cdot\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{\mu}{n}}\cdot\ldots\cdot\frac{1-\frac{k-1}{n}}{1-\frac{\mu}{n}}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Mit wachsendem n streben die ersten k Faktoren nach 1, der letzte Faktor nach $e^{-\mu}$. Damit gilt

Satz 320.1: $$\lim_{\substack{n\to\infty\\ np=\mu}} \mathrm{B}(n;p;k) = e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!} \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{n\to\infty\\ np=\mu}} F_p^n(k) = e^{-\mu}\sum_{i=0}^{k}\frac{\mu^i}{i!}$$

Seine praktische Anwendung findet Satz 320.1 durch

Satz 320.2: Für große n und $\mu = np$ gilt die ***Poisson*-Näherung**

$$\mathrm{B}(n;p;k) \approx e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}$$

Faustregel: Man erhält brauchbare Näherungswerte, falls $\mu \ll n$ und auch $|k-\mu| \ll n$ ist. Gleichbedeutend damit ist $p \ll 1$ und $|k-\mu| \ll n$.
Im allgemeinen kann man die *Poisson*-Näherung für $p \leqq 0{,}1$ und $n \geqq 100$ gebrauchen.

Offensichtlich kann die *Poisson*-Näherung nicht sehr gut sein, sobald die Trefferanzahl k in die Nähe von n kommt. Denn $e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}$ liefert für beliebig große k immer noch positive Werte, wohingegen $\mathrm{B}(n;p;k)$ für $k \geqq n+1$ immer Null ist.
Da die *Poisson*-Näherung für großes n bei konstantem $\mu = np$ verwendet wird, muß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »Treffer beim i-ten Versuch«, also $p = \frac{\mu}{n}$, klein sein. Aus diesem Grunde heißt die Aussage von Satz 320.1 oft auch **Gesetz der seltenen Ereignisse.**
Nach der obigen Faustregel ist die Näherung besonders gut, wenn der Erwartungswert μ klein ist im Vergleich zur Länge n der *Bernoulli*-Kette. In diesem Falle haben nur kleine Werte von k Wahrscheinlichkeitswerte $\mathrm{B}(n;p;k)$, die deutlich größer als 0 sind. Aus diesem Grunde nannte 1898 *Ladislaus von Bortkiewicz* (1868–1931)* die *Poisson*-Näherung **Gesetz der kleinen Zahlen.** Bes-

* Betont auf dem e. – Siehe Seite 400.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

ser wäre die Formulierung *Gesetz der großen Zahlen bei kleinem Erwartungswert* μ *und kleiner Trefferanzahl k.* In seiner Arbeit *Das Gesetz der kleinen Zahlen* hat *v. Bortkiewicz* die Formel von *Poisson* nicht nur der Vergessenheit entrissen, sondern als erster ihre Bedeutung erkannt, wie das unten vorgeführte Beispiel 3 erkennen läßt. Übrigens findet sich ein Grenzübergang $p \to 0$ und $n \to \infty$ mit konstantem np im Problem VII der *De Mensura Sortis* von 1711; *de Moivre* hat aber den Gedanken nicht weiter verfolgt.
Es hat sich eingebürgert, den in Satz 320.1 und Satz 320.2 auftretenden Term abzukürzen. Dazu

Definition 321.1: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\mathrm{P}(\mu)\colon x \mapsto \mathrm{P}(\mu; x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mu} \cdot \dfrac{\mu^x}{x!} & \text{für} \quad x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 \ \text{sonst} \end{cases}$$

heißt ***Poisson*-Verteilung** mit dem Erwartungswert μ. $(\mu > 0)$

Bemerkungen:

1. Ist $x \in \mathbb{N}_0$, so schreibt man gerne k statt x.

2. Wir fassen $\mathrm{P}(\mu)$ als Grenzverteilung der Binomialverteilungen $\mathrm{B}(n; p)$ mit gleichem μ auf. In unendlichen Ergebnisräumen hingegen gibt es Zufallsgrößen, deren Wertemenge $\mathbb{N}_0$ ist und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{P}(\mu)\colon x \mapsto \mathrm{P}(\mu; x)$ lautet; man nennt solche Zufallsgrößen ***Poisson*-verteilt.** Sie haben den Erwartungswert μ und die Varianz μ. (Vgl. Aufgabe 328/**19**.)

Die Konvergenzaussage von Satz 320.1 lautet mit Definition 321.1 kurz

$$\boxed{\lim_{\substack{n \to \infty \\ np = \mu}} \mathrm{B}(n; p; k) = \mathrm{P}(\mu; k)}$$

Sie wird in Figur 321.1 veranschaulicht, die einige Binomialverteilungen mit $\mu = 2$ und jedesmal dazu, rot unterlegt, die *Poisson*-Verteilung P(2) zeigt. Eine allgemeine Untersuchung, wie weit Binomial- und *Poisson*-Verteilung vonein-

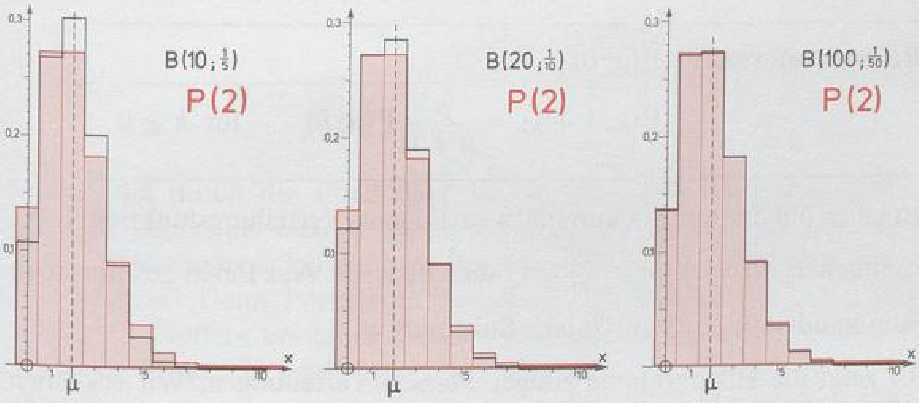


Fig. 321.1 Binomialverteilungen [schwarz] und *Poisson*-Verteilung [rot] zum gleichen Erwartungswert $\mu = 2$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

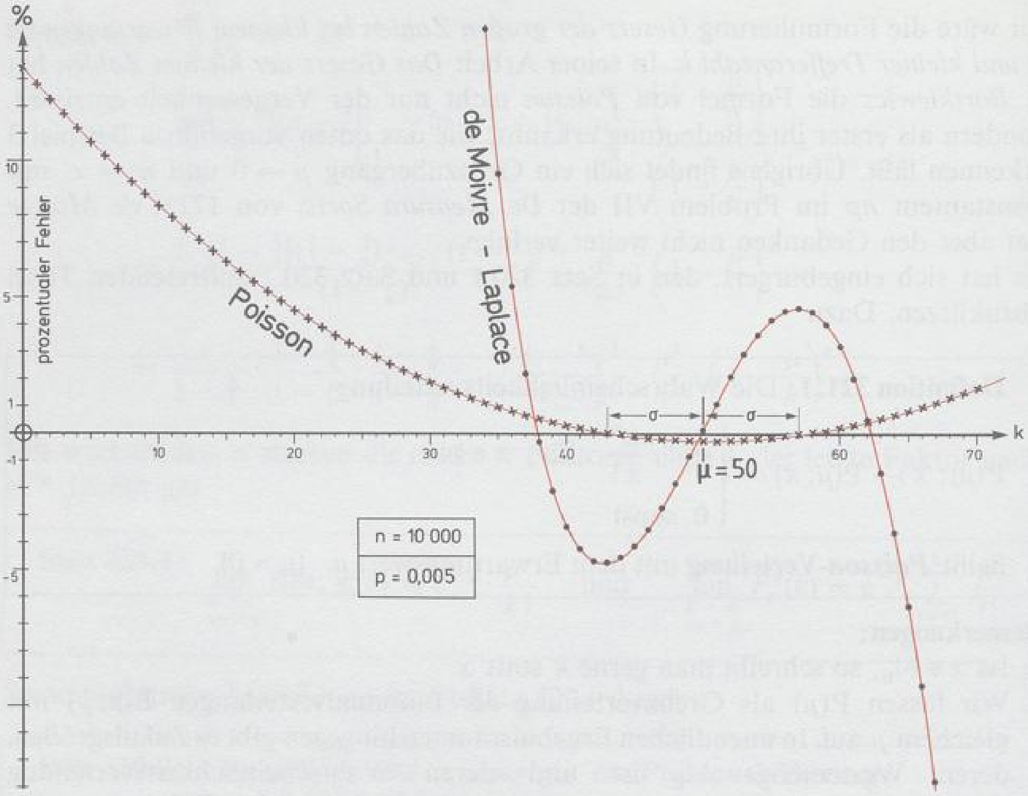


Fig. 322.1 Verlauf des prozentualen Fehlers bei der Approximation der Binomialverteilung $B(10^4; 5\cdot 10^{-3})$ mittels des lokalen Grenzwertsatzes von *de Moivre* und *Laplace* durch $\varphi_{50;\sqrt{49,75}}$ und mittels der *Poisson*-Näherung P(50).

ander abweichen, erfordert etwas mehr Mathematik als die bloße Grenzwertbestimmung, die zu Satz 320.1 führte. Wir verweisen hier lediglich auf Figur 322.1, in der $B(10^4; 5\cdot 10^{-3})$ sowohl durch $\varphi_{50;\sqrt{49,75}}$ wie durch P(50) approximiert wird. Es nimmt auf Grund der Faustregel nicht wunder, daß hier die *Poisson*-Näherung besser ist.
Zur praktischen Berechnung der Werte $P(\mu; k)$ der *Poisson*-Verteilung $P(\mu)$ bedient man sich der

Rekursionsformel: $P(\mu; 0) = e^{-\mu}$

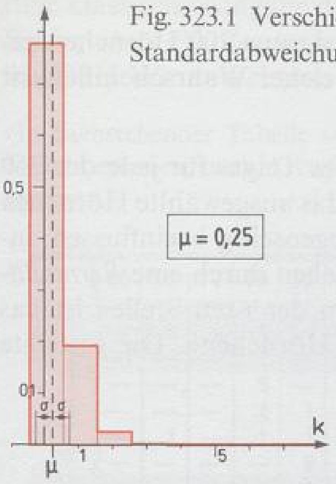
$$P(\mu; k+1) = \frac{\mu}{k+1} P(\mu; k) \qquad \text{für } k \geqq 0$$

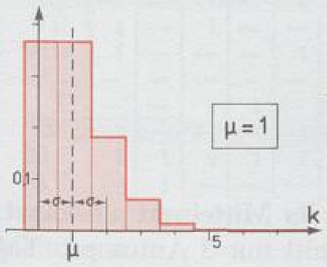
Im übrigen ist es üblich, nur die kumulativen *Poisson*-Verteilungsfunktionen F_μ, also die Summen $F_\mu(k) := \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!}$ zu tabellarisieren. Aus ihnen gewinnt man einzelne Summanden $P(\mu; k)$ durch eine Subtraktion.

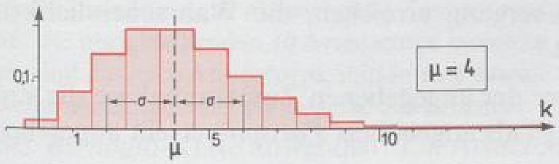
Figur 323.1 zeigt die Histogramme einiger *Poisson*-Verteilungen. Wir erkennen daraus, daß nur dann deutlich von Null verschiedene Werte auftreten, wenn die Trefferanzahl k nicht zu weit vom Erwartungswert μ entfernt ist, was ja in der

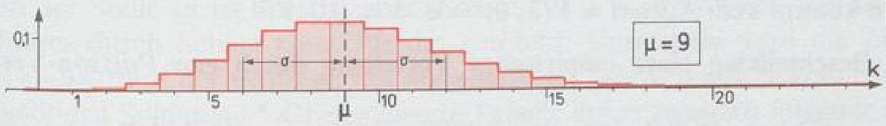
Fig. 323.1 Verschiedene *Poisson*-Verteilungen $P(\mu)$ mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sqrt{\mu}$

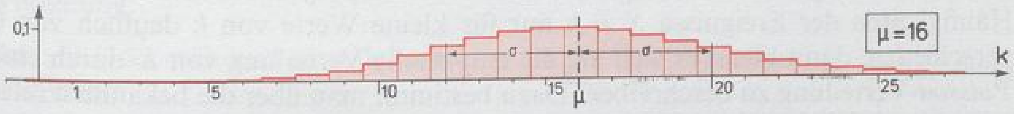
μ	0,25	1	4	9	16	k
	.779	.368	.018			0
	.195	.368	.073	.001		1
	.002	.184	.147	.005		2
		.061	.200	.015		3
		.015	.200	.034		4
		.003	.156	.061	.001	5
		.001	.104	.091	.003	6
			.060	.117	.006	7
			.030	.132	.012	8
			.013	.132	.021	9
			.005	.119	.034	10
			.002	.097	.050	11
			.001	.073	.066	12
				.050	.081	13
				.032	.093	14
				.019	.099	15
				.011	.099	16
				.006	.093	17
				.003	.083	18
				.001	.070	19
				.001	.056	20
					.043	21
					.031	22
					.022	23
					.014	24
					.009	25
					.006	26
					.003	27
					.002	28
					.001	29
					.001	30











Faustregel durch die Forderung $|k-\mu| \ll n$ zum Ausdruck kam. Das Wort *klein* im *Gesetz der kleinen Zahlen* muß also richtig interpretiert werden! Ebenso hüte man sich davor, die Bezeichnung *Gesetz der seltenen Ereignisse* mißzuverstehen! Denn Ereignisse wie »Kein Treffer«, »Genau 1 Treffer«, »Mindestens 3 Treffer« brauchen keineswegs *selten* zu sein, wie ihre Wahrscheinlichkeiten in Figur 323.1 zeigen.

Bei der Anwendung der *Poisson*-Verteilung treten 3 Aufgabentypen besonders häufig auf.

Beispiel 1: *Poisson*-Näherung einer Binomialverteilung.
In einen Teig werden 250 Rosinen geknetet und dann daraus 200 Hörnchen gebacken. Wir wählen ein Hörnchen beliebig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält es genau 2 Rosinen?

Lösung: Wir können annehmen, daß beim Mischen des Teiges für jede der 250 Rosinen die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{200}$ besteht, in das ausgewählte Hörnchen zu geraten. Außerdem sollen die Rosinen sich nicht gegenseitig beeinflussen, indem sie etwa aneinanderkleben. Dann kann das Geschehen durch eine *Bernoulli*-Kette der Länge 250 interpretiert werden; »Treffer an der i-ten Stelle« ist das Ereignis »Rosine Nr. i befindet sich im ausgewählten Hörnchen«. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{B}(250; \tfrac{1}{200}; 2) = \binom{250}{2}\left(\tfrac{1}{200}\right)^2\left(\tfrac{199}{200}\right)^{248}$$

errechnet sich mit dem Taschenrechner zu 0,22448.
Mit der *Poisson*-Näherung ergibt sich

$$\mathrm{B}(250; \tfrac{1}{200}; 2) \approx \mathrm{P}(\tfrac{250}{200}; 2) = \mathrm{e}^{-1,25} \cdot \frac{1,25^2}{2!} = 0,22383\,.$$

Beispiel 2: Von der Verteilung einer Zufallsgröße ist nur ihr Mittelwert μ bekannt.
An einem einsamen Grenzübergang kommen im Schnitt nur 3 Autos pro Tag durch. Wie groß ist unter der Annahme, daß die Autos völlig unregelmäßig, aber im ganzen gleichmäßig den Grenzübergang erreichen, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß morgen kein Auto kommt?

Lösung: Es hat sich gezeigt, daß unter der angegebenen Zusatzannahme die Zufallsgröße »Anzahl der Autos pro Tag« als angenähert *Poisson*-verteilt angesehen werden kann. Also

$$P(\text{»Morgen kommt kein Auto«}) \approx \mathrm{P}(3; 0) = \mathrm{e}^{-3} = 0,04979\,.$$

Beispiel 3: Beschreibung einer empirischen Verteilung durch eine *Poisson*-Verteilung.
Nimmt eine empirische Zufallsgröße X nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ an und sind die relativen Häufigkeiten der Ereignisse $X = k$ nur für kleine Werte von k deutlich von 0 verschieden, dann bietet es sich an, die empirische Verteilung von X durch eine *Poisson*-Verteilung zu beschreiben. Dazu bestimmt man über die bekannten relativen Häufigkeiten einen Näherungswert μ für den unbekannten Erwartungswert $\mathscr{E}X$ der empirischen Zufallsgröße X, was nach der Interpretationsregel für Wahrscheinlichkeiten sinnvoll ist. Diesen Näherungswert μ verwendet man als Parameter μ einer *Poisson*-Verteilung $\mathrm{P}(\mu)$. Mit Hilfe dieser *Poisson*-Verteilung $\mathrm{P}(\mu)$ berechnet man »Idealwerte« für die Verteilung von X. Stimmen diese Idealwerte mit den empirischen Werten gut überein, dann kann man mit der so gewonnenen *Poisson*-Verteilung $\mathrm{P}(\mu)$ Voraussagen für weitere Situationen ähnlicher Art machen. Außerdem darf man dann vermuten, daß das der empirischen Verteilung zugrundeliegende Geschehen zufallsgesteuert ist, weil es sich durch ein Zufallsexperiment modellmäßig darstellen läßt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eine klassische Aufgabe dieses Typs ist die Analyse einer Statistik über »*Die durch Schlag eines Pferdes im preußischen Heere Getöteten*« durch *v. Bortkiewicz* (1868 bis 1931). Wir entnehmen seinem Büchlein *Gesetz der kleinen Zahlen* (1898):

»In nachstehender Tabelle sind die Zahlen der durch Schlag eines Pferdes verunglückten Militärpersonen, nach Armeecorps (»G.« bedeutet Gardecorps) und Kalenderjahren nachgewiesen.[1])

	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
G	—	2	2	1	—	—	1	1	—	3	—	2	1	—	—	1	—	1	—	1
I	—	—	—	2	—	3	—	2	—	—	—	1	1	1	—	2	—	3	1	—
II	—	—	—	2	—	2	—	—	1	1	—	—	2	1	1	—	—	2	—	—
III	—	—	—	1	1	1	2	—	2	—	—	—	1	—	1	2	1	—	—	—
IV	—	1	—	1	1	1	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1	—	—
V	—	—	—	—	2	1	—	—	1	—	—	1	—	1	1	1	1	1	1	—
VI	—	—	1	—	2	—	—	1	2	—	1	1	3	1	1	1	—	3	—	—
VII	1	—	1	—	—	—	1	—	1	1	—	—	2	—	—	2	1	—	2	—
VIII	1	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	1	1	—	1
IX	—	—	—	—	—	2	1	1	1	—	2	1	1	—	1	2	—	1	—	—
X	—	—	1	1	—	1	—	2	—	2	—	—	—	—	2	1	3	—	1	1
XI	—	—	—	—	2	4	—	1	3	—	1	1	1	1	2	1	3	1	3	1
XIV	1	1	2	1	1	3	—	4	—	1	—	3	2	1	—	2	1	1	—	—
XV	—	1	—	—	—	—	—	1	—	1	1	—	—	—	2	2	—	—	—	—

Man kann

»unter Weglassung des Gardecorps, des I., VI. und XI. Armeecorps, welche eine von der normalen ziemlich stark abweichende Zusammensetzung aufweisen[2]), die Zahlen, welche sich auf die übrigbleibenden 10 Armeecorps beziehen, so behandeln, als bezögen sie sich alle auf ein und dasselbe Armeecorps, mithin eine einzige aus 200 Elementen bestehende statistische Reihe annehmen und auf dieselbe das Schema«

der *Bernoulli*-Kette anwenden: *Ein* Armeecorps, bestehend aus n Soldaten, wird 200 Jahre lang beobachtet. Ein bestimmtes Jahr wird zufällig ausgewählt. »Treffer an der Stelle i« ist das Ereignis »Soldat Nr. i wird während des ausgewählten Jahres durch Schlag eines Pferdes getötet«. Untersucht wird die Zufallsgröße $X :=$ »Anzahl der während des ausgewählten Jahres durch Schlag eines Pferdes getöteten Soldaten«.* Obenstehende Tabelle liefert zunächst folgende empirische Verteilung:

Anzahl k der während eines Jahres Getöteten	0	1	2	3	4	5 und mehr
Anzahl N_k der Jahre, in denen es k Tote während eines Jahres gab	109	65	22	3	1	0
relative Häufigkeit $h_{200}(X = k)$	$\frac{109}{200}$	$\frac{65}{200}$	$\frac{22}{200}$	$\frac{3}{200}$	$\frac{1}{200}$	0

[1]) Siehe die Hefte 38, 46, 50, 55, 60, 63, 67, 80, 84, 87, 91, 95, 99, 108, 114, 118, 124, 132, 135 und 139 der »Preußischen Statistik (amtliches Quellenwerk)«.

[2]) Das Gardecorps besteht, von Artillerie, Pionieren und Train abgesehen, aus 134 Infanterie-Kompagnien und 40 Kavallerie-Escadrons, das XI. Armeecorps umfaßt 3 Divisionen, das I. Armeecorps hat 30, das VI. 25 Escadrons, während die Norm 20 ist.

* Streng genommen müßte jeder Getötete sofort ersetzt werden, damit n konstant bleibt. Da aber n sehr groß ist, können die wenigen Getöteten vernachlässigt werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Den Erwartungswert der Zufallsgröße X schätzen wir auf Grund dieser empirischen Verteilung zu

$$\mu = \sum_k k \cdot h_{200}(X = k), \text{ also zu}$$

$$\mu = \tfrac{1}{200}(0 \cdot 109 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = \tfrac{122}{200} = 0{,}61\,.$$

Mit $\mathrm{P}(0{,}61)$ errechnen wir die Idealwerte $\mathrm{B}(n; p; k) \approx \mathrm{P}(0{,}61; k)$ dafür, daß während eines Jahres k Soldaten getötet werden, aus denen sich durch Multiplikation mit 200 die Idealzahlen für die Anzahl N_k der Jahre mit k Getöteten ergeben.

k	0	1	2	3	4	5 und mehr
$\mathrm{P}(0{,}61; k)$	0,54335	0,33144	0,10109	0,02056	0,00313	0,00043
$200 \cdot \mathrm{P}(0{,}61; k)$	108,67	66,29	20,22	4,11	0,63	0,09

Die gute Übereinstimmung zwischen Empirie und Theorie zeigt der Vergleich der Zeile N_k aus der empirischen Tabelle mit der Zeile $200 \cdot \mathrm{P}(0{,}61; k)$ aus der Ideal-Tabelle, mit dem *v. Bortkiewicz* sein Beispiel abschließt*:

Jahresergebnis	Zahl der Fälle, in denen das nebenstehende Jahresergebnis eingetreten ist	zu erwarten war
0	109	108,7
1	65	66,3
2	22	20,2
3	3	4,1
4	1	0,6
5 u. mehr	—	0,1

Aufgaben

1. Benütze Tabellen, um folgende Fragen zu beantworten: Um wieviel weicht die Binomialverteilung mit $p = \frac{1}{10}$ und $n = 100$ von der *Poisson*-Verteilung mit dem gleichen Erwartungswert für $k = 0$ (5, 10, 15, 20) ab? Wie groß ist jeweils die relative Abweichung, bezogen auf den Wert der Binomial-Verteilung?
2. Wie kann man die *Poisson*-Näherung zur Berechnung von $\mathrm{B}(500; 0{,}98; k)$ benützen?
3. Wie groß ist in Beispiel 1 die Wahrscheinlichkeit P(»Höchstens 2 Rosinen im Hörnchen«)? (Exakt und *Poisson*-Näherung)
4. Auf einer Strecke von 1 m Länge mit cm-Teilung werden wahllos 100 Punkte markiert. Dann werden auf jeder Teilstrecke die markierten Punkte gezählt.
   a) Stelle die Analogie zu Beispiel 1 her.
   b) Simuliere das Experiment mit Hilfe von Zufallszahlen aus einer Tabelle.
   c) Vergleiche das Versuchsergebnis mit der zugehörigen *Poisson*-Verteilung.
5. Es werden 27mal 2 Würfel geworfen. Die Zufallsgröße »Anzahl der Doppelsechsen« ist nahezu *Poisson*-verteilt. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem die *Poisson*-Verteilung und die relativen Häufigkeiten bei 20maliger Ausführung des Versuchs: 27maliger Wurf zweier Würfel.

* Als weitere Beispiele behandelt *v. Bortkiewicz* die Anzahl der Kinderselbstmorde pro Jahr in Preußen, die weiblichen Selbstmorde in 8 deutschen Staaten und die Zahl der jährlichen tödlichen Unfälle bei 11 Berufsgenossenschaften.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

6. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser beim Lotto »6 aus 49« ist ungefähr $\frac{1}{14\,\text{Mill.}}$. Es mögen zu einer Ausspielung 14 Mill. Tippfelder unabhängig ausgefüllt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 3 oder mehr Sechser vorkommen?

7. Bei einer Fernsehsendung wurden die Zuschauer aufgefordert, die Sequenz aus sechs Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu erraten, die in einem Tresor hinterlegt war. Unter 40000 Einsendungen befanden sich 2 richtige Lösungen. Lag Telepathie vor?

a) Berechne dazu die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis unter Zugrundelegung einer *Bernoulli*-Kette sowohl exakt wie auch angenähert.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens 2 richtige Antworten eintreffen, sowohl exakt als auch angenähert.

8. Man schüttet $\frac{1}{10}$ Mol einer löslichen Substanz ins Weltmeer (Volumen ca. $1{,}4 \cdot 10^9\,\text{km}^3$), mischt gut durch und schöpft dann 1 Liter Meerwasser. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mehr als 40 Moleküle der Substanz zurück? (1 Mol enthält $6 \cdot 10^{23}$ Moleküle.)

9. Eine Fläche wird aus großer Entfernung ziellos beschossen, d.h., für gleich große Teilflächen ist die Wahrscheinlichkeit, von einem Schuß getroffen zu werden, gleich. Die Fläche ist in viele ($m \gg 1$) gleich große Quadrate eingeteilt und wird von vielen ($n \gg 1$) Schüssen getroffen. – London hat diesen »Versuch« während des 2. Weltkrieges erdulden müssen. *R. D. Clarke* prüfte mittels der *Poisson*-Verteilung, ob die Annahme der Regellosigkeit zutreffen kann. Dazu wählte er ein $144\,\text{km}^2$ großes Gebiet Süd-Londons aus, auf das 537 V1-Flugkörper niedergegangen waren. Die Teilflächen, die er auf die Anzahl der Einschläge hin untersuchte, waren $\frac{1}{4}\,\text{km}^2$ groß. Es ergab sich Tabelle 327.1. Vergleiche die wirklichen Werte mit den »Idealwerten«.

k	0	1	2	3	4	≥ 5
N_k	229	211	93	35	7	1

Tab. 327.1 Anzahl N_k gleich großer Quadrate im Süden Londons mit k V1-Einschlägen (nach: Journal of the Institute of Actuaries **72** (1946), S. 48)

•10. Überprüfe, ob die Regentropfen auf dem Pflaster *Poisson*-verteilt sind.

11. Nehmen wir an, die Sterne der Milchstraße seien (in einem begrenzten Gebiet) regellos verteilt. Man habe in einem Gebiet von $5° \cdot 5° = 25$ »Quadratgrad« 1000 Sterne (bis zu einer gewissen Größenklasse) gezählt. Wie viele quadratische Teilgebiete von $\frac{1}{2}$ Grad Seitenlänge müßten dann weniger als 7 Sterne enthalten?

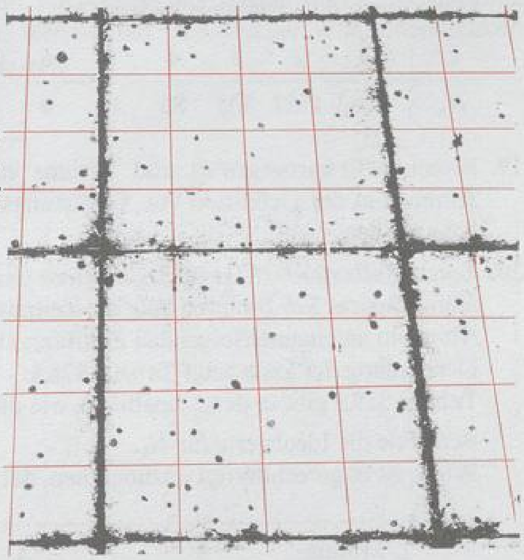


Bild 327.1 Zu Aufgabe **10**

12. In eine Glasschmelze sind 100 Fremdkörper geraten. Bereits ein einziger davon im Glas einer Flasche macht diese unbrauchbar. Mit wieviel Prozent Ausschuß ist zu rechnen, wenn aus der Schmelze 100 (1000) Flaschen hergestellt werden?

13. Aus einer Glasschmelze, die durch Schmelzen der Flaschen aus einem Altglascontainer gewonnen wurde, werden 900 Flaschen hergestellt. Nur 800 davon sind brauchbar. Der Rest enthält je Flasche mindestens einen Fremdkörper im Glas. Schätze die Anzahl der Fremdkörper in der Glasschmelze.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

14. Man beobachtet im Mikroskop eine Blutprobe unter einem Quadratraster. Die ganze Probe fülle 400 Quadrate aus, von denen 12 keine roten Blutkörperchen enthalten. Wie viele rote Blutkörperchen sind in der Probe, wenn man von einer regellosen Verteilung ausgehen kann?

15. Auf einem kleinen Flugplatz landen in unregelmäßiger Folge Flugzeuge, im Mittel täglich 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Mittelwert morgen übertroffen wird?

16. Bei Blumensamen läßt es sich nicht verhindern, daß etwa 1% Unkrautsamen darin enthalten ist. Eine Firma will mit 80% Sicherheit garantieren: »Unter den 500 Samenkörnern einer Packung sind höchstens k Unkrautsamen«. Wie niedrig darf k angesetzt werden?

17. »Kriege folgen völlig regellos aufeinander«. Diese These läßt sich mit Tabelle 328.1 stützen. Man errechne mit der *Poisson*-Verteilung die »idealen« Anzahlen von Jahren mit 0, 1, …, 4 Kriegsausbrüchen bzw. Friedensschlüssen.

k	0	1	2	3	4	$\geqq 5$
N_k	63	35	9	2	1	0
N_k^*	62	34	13	1	0	0

Tab. 328.1 Von 1820 bis 1929 gab es N_k Jahre, in denen k Kriege ausbrachen, und N_k^* Jahre, in denen k Friedensschlüsse zustande kamen. (Nach: Nature **155** (1945), S. 610)

18. Aus der Sprachstatistik. Tabelle 328.2 gibt die Verteilung der Wortlängen (gemessen durch die Zahl der Silben im Wort) eines Textes wieder. Der Vergleich mit einer *Poisson*-Verteilung bietet sich an. Da es aber keine Wörter mit 0 Silben gibt, kann man allenfalls erwarten, daß »Wortlänge *minus* 1« *Poisson*-verteilt ist. Prüfe dies! – Welche Deutung könnte man dem Ergebnis beilegen?

k	1	2	3	4	5	6
N_k	1983	1557	303	86	11	9

Tab. 328.2 Zahl N_k der Wörter mit k Silben. Text: *Astrid Lindgren*: *Pippi Langstrumpf geht an Bord*, 5. Kapitel

19. Berechne Erwartungswert und Varianz einer nach $P(\mu)$ verteilten Zufallsgröße. Die Summen in der Definition von Erwartungswert und Varianz sind jetzt natürlich unendliche Reihen.

20. *Ernest Rutherford* (1871–1937) und *Hans Geiger* (1882–1945) registrierten bei einem Poloniumpräparat 326 Minuten lang die Zeitpunkte der Zerfälle*. Dann zählten sie, wie viele Atome in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen von 7,5 Sekunden Dauer zerfallen waren. Den Anfang der Liste zeigt Tabelle 328.3.
Tabelle 329.1 gibt in der 2. Spalte an, wie oft jede Zahl in der vollen Liste auftrat.
Berechne die Idealwerte für N_k.
Wieso ist es gerechtfertigt anzunehmen, daß eine *Bernoulli*kette zugrunde liegt?

1. Minute	3	7	4	4	2	3	2	0
2. Minute	5	2	5	4	3	5	4	2
3. Minute	5	4	1	3	3	1	5	2
4. Minute	8	2	2	2	3	4	2	6
5. Minute	7	4	2	6	4	5	10	4

Tab. 328.3 Anzahl von α-Zerfällen bei ^{210}Po in 40 aufeinanderfolgenden Zeitintervallen von je $\frac{1}{8}$ min ($= 7{,}5$ s) Dauer.

* Philosophical Magazine (6) **20** (1910), S. 698.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	≥ 15	
N_k	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	0	1	1	0	$\Rightarrow \sum_k N_k = 2608$

Tab. 329.1 Anzahlen N_k von 7,5 s-Intervallen, in denen genau k Zerfälle auftraten

21. In einer Grafschaft war es üblich, daß Kinder, die am Geburtstag des Grafen geboren wurden, einen Taler erhielten. Normalerweise wurden in der Grafschaft 3 Kinder pro Tag geboren. In einem Jahr geschah es aber, daß am Geburtstag des Grafen 8 Kinder das Licht der Welt erblickten. Ging das mit rechten Dingen zu? Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß 8 oder noch mehr Kinder an einem Tag geboren werden.

22. a) Bei einem Faschingsball werden 1800 Gäste erwartet. Jeder Gast, der an diesem Tag Geburtstag hat, erhält eine Flasche Sekt. Wie viele Flaschen müssen bereitgestellt werden, damit man mit 99,5% Sicherheit genug Flaschen hat?

b) Theodor möchte bei seinem Hausball genauso verfahren. Er hat 18 Gäste. Wie viele Flaschen braucht er?

23. In einem Fernsehkrimi wurde ein Trickbetrug gezeigt. In der darauffolgenden Woche wurden 12 derartige Delikte der Polizei gemeldet. Kann man dem Fernsehen einen Vorwurf machen, wenn normalerweise 4 solche Delikte pro Woche auftraten? Berechne dazu die Wahrscheinlichkeit für 12 oder mehr solcher Delikte in einer Woche.

24. Vor einem Postamt sollen Kundenparkplätze angelegt werden. Im Schnitt kommen in der Stoßzeit 300 Kunden pro Stunde. Jeder Kunde hält sich im Mittel 5 Minuten im Postamt auf. Wie viele Parkplätze müssen angelegt werden, wenn in höchstens 10% (5%) aller Fälle kein Parkplatz frei sein soll?

25. In einem Ministerium kommen im Schnitt 120 Anrufe pro Stunde an. Die Vermittlung kann höchstens 3 Gespräche pro Minute weiterleiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Vermittlung bei einem Anruf überlastet?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN