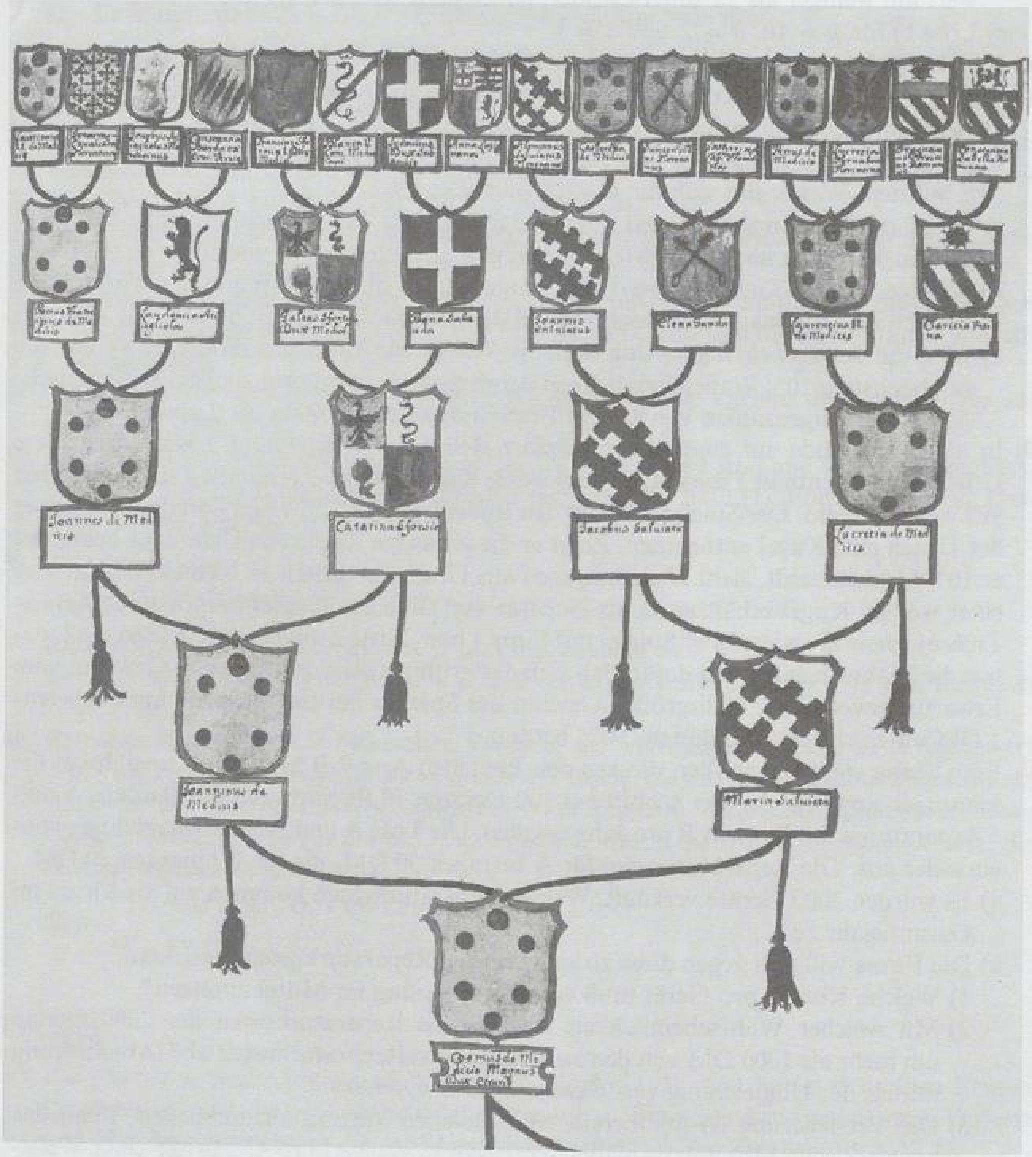
Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

13. Die Bernoulli-Kette

13. Die Bernoulli-Kette



Ausschnitt aus der 11 m langen und 65 cm breiten Ahnentafel des Kurfürsten *Ferdinand Maria* von Bayern (1636–1679) und seiner Frau *Adelaide Henriette* von Savoyen (1636–1676), vermählt 1650. Aufgezeichnet von dem Historiker und Bischof von Saluzzo, *Francesco Augustino della Chiesa* († 1663)

13. Die *Bernoulli*-Kette

Die einfachsten Zufallsexperimente sind solche mit genau 2 Ergebnissen, wie z. B. das einmalige Werfen einer Münze. Es ist üblich, eines dieser Ergebnisse als **Treffer**, das andere als **Niete** zu bezeichnen und für den Treffer kurz 1 und für die Niete kurz 0 zu schreiben. Damit ist $\Omega_0 := \{0; 1\}$ ein Ergebnisraum für ein solches Zufallsexperiment.*
Bei Zufallsexperimenten mit mehr als 2 Ergebnissen interessiert man sich oft nur für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses A. Vergröbert man den ursprünglich gewählten Ergebnisraum Ω zu $\Omega' := \{A, \bar{A}\}$, dann hat man wieder ein Zufallsexperiment mit genau 2 Ergebnissen. Interpretiert man A als Treffer und $\bar{A}$ als Niete, so wird aus Ω' der Ergebnisraum Ω_0. Ein Beispiel hierfür ist der einfache Würfelwurf mit $A :=$ »Es fällt die Sechs«. Da solche Experimente mit genau 2 Ergebnissen in vielen Untersuchungen eine Rolle spielen, lohnt sich

Definition 219.1: Ein Zufallsexperiment heißt ***Bernoulli*-Experiment**** mit dem **Parameter** p, wenn für seinen Wahrscheinlichkeitsraum gilt:
1) Der Ergebnisraum ist $\Omega_0 = \{0; 1\}$.
2) $P(\{1\}) = p$, d. h., die Trefferwahrscheinlichkeit ist p.

In vielen Problemen treten Serien von *Bernoulli*-Experimenten auf, z. B.:
- der n-fache Münzenwurf mit »Adler« jeweils als Treffer,
- der n-fache Würfelwurf mit »Sechs« jeweils als Treffer,
- Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit »schwarze Kugel« jeweils als Treffer,
- Qualitätskontrolle bei einer Serienproduktion mit »defekt« jeweils als Treffer,
- Geburten in einer Klinik mit »Mädchen« jeweils als Treffer.

Das Kennzeichnende bei all diesen Serien ist, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer von Versuch zu Versuch gleich bleibt und daß sich die Versuche gegenseitig nicht beeinflussen.
Am Beispiel des 4fachen Würfelwurfs wollen wir zeigen, wie man ein stochastisches Modell für eine solche Versuchsserie aus *Bernoulli*-Experimenten entwickeln kann. Dieses Modell werden wir dann *Bernoulli*-Kette nennen.
Beim *Bernoulli*-Experiment des einfachen Würfelwurfs sei das Auftreten einer Sechs der Treffer; Niete ist dann das Erscheinen einer von 6 verschiedenen Augenzahl. Zu diesem *Bernoulli*-Experiment gehört der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω_0, P_0) mit

ω	0	1
$P_0(\{\omega\})$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

* Zu Beginn des 17. Jh.s gelangte die holländische Lotterie über Hamburg nach Deutschland. Aus der neuniederländischen Bezeichnung *niet = nichts* für »Los ohne Gewinn« entstand unser Wort *Niete*, erstmals belegt 1704. Das *wat = was* für »Gewinnlos« wird nicht angenommen. Anfang des 18. Jh.s überträgt man aber aus der Welt des Schießens die Bezeichnungen *Fehler* (= Fehlschuß) und *Treffer* (erstmals belegt 1736) sinngemäß. Beide Ausdrücke finden sich z.B. bei *Christian Fürchtegott Gellert* (1715–1769) vor 1747. *Treffer* bürgert sich sehr schnell ein, *Niete* wird durch *Friedrich Schiller* (1759–1805) literaturfähig, dringt aber nur sehr langsam in den süddeutschen Sprachraum vor.
** Benannt nach *Jakob Bernoulli* (1655–1705), gesprochen ber'nuli, der Serien von solchen Experimenten behandelt hat. Siehe Seite 397.

Beim 4fachen Würfelwurf wählt man als Ergebnisraum Ω die Menge aller Quadrupel aus der Menge $\{0;\ 1\}$, also $\Omega = \Omega_0^4$. Ein mögliches Ergebnis ist z. B. das Element $\omega = 0110$. Es besagt, daß beim 2. und 3. *Bernoulli*-Experiment ein Treffer erzielt wurde, beim 1. und 4. hingegen eine Niete. Einen Überblick über den Ergebnisraum Ω liefert uns das Baumdiagramm. Weil sich die 4 Würfe nicht beeinflussen, können wir annehmen, daß die Ereignisse $A_i :=$ »Treffer beim i-ten *Bernoulli*-Experiment« $(i = 1, 2, 3, 4)$ stochastisch unabhängig sind. Wir erhalten also einen Baum vom Typ der Figur 153.1. Berechnen wir schließlich noch die Wahrscheinlichkeiten der Pfade, so sind die Wahrscheinlichkeiten für alle Elementarereignisse bekannt und damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ gemäß Definition 42.1 festgelegt. Figur 220.1 zeigt den Baum für den 4fachen Würfelwurf.

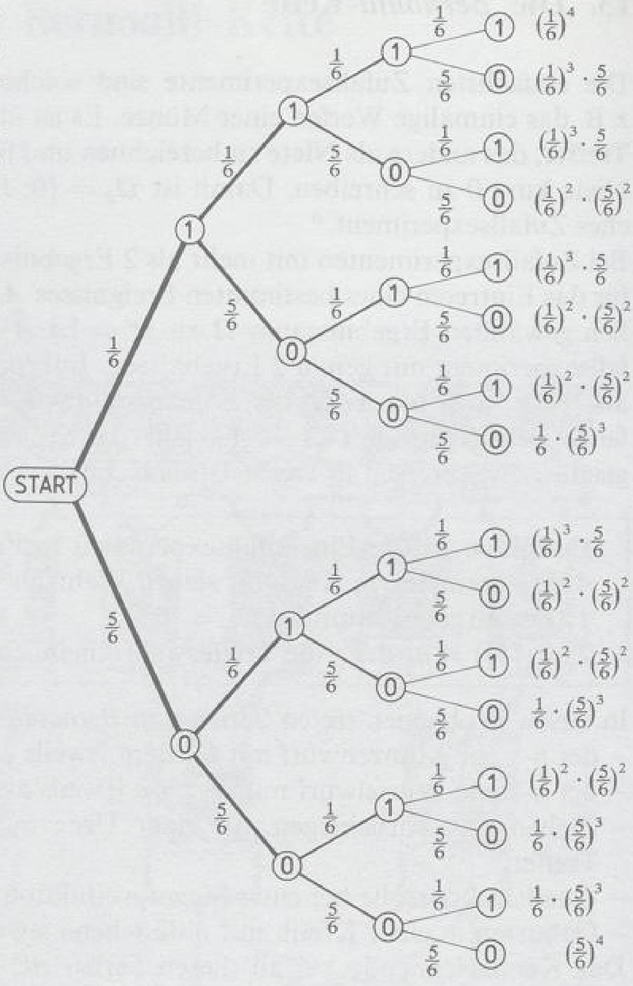


Fig. 220.1 Baum für den 4fachen Würfelwurf mit den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse

Wir erkennen: Alle Elementarereignisse, die gleich viele Treffer aufweisen, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit. Insbesondere gilt: Hat der Pfad k Treffer, so ist seine Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{4-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Darüber hinaus ist anschaulich klar, daß $P(A_i) = \frac{1}{6} = P_0(\{1\})$ für alle i ist. Zum Beweis addiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, bei denen an der i-ten Stelle eine 1 steht. Das sind insgesamt 8 Pfade. Beispielsweise erhalten wir so

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= P(\{1111, 1110, 1101, 1100, 0111, 0110, 0101, 0100\}) = \\
&= (\tfrac{1}{6})^4 + (\tfrac{1}{6})^3 \cdot \tfrac{5}{6} \cdot 3 + (\tfrac{1}{6})^2 \cdot (\tfrac{5}{6})^2 \cdot 3 + \tfrac{1}{6} \cdot (\tfrac{5}{6})^3 = \\
&= \tfrac{1}{6} \cdot (\tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6})^3 = \\
&= \tfrac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Aus dem durchgeführten Beispiel abstrahieren wir nun das stochastische Modell der *Bernoulli*-Kette für eine Serie von *Bernoulli*-Experimenten.

Definition 221.1: Ein Zufallsexperiment heißt ***Bernoulli*-Kette** der **Länge** n mit dem **Parameter** p, wenn für seinen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) gilt:
1) $\Omega = \{0; 1\}^n$ = Menge aller n-Tupel aus $\{0; 1\}$.
2) Ist ω ein n-Tupel mit genau k Einsen, so ist $P(\{\omega\}) := p^k(1-p)^{n-k}$, d.h., die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Serie mit genau k Treffern ist $p^k(1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Bemerkungen:
1. Für $p = 0$ und $k = 0$ bzw. $p = 1$ und $k = n$ versagt die Formel für $P(\{\omega\})$, da sich der unbestimmte Faktor 0^0 ergibt. Man überlegt sich leicht, daß es sinnvoll ist, in beiden Fällen $P(\{\omega\}) = 1$ zu setzen.
2. Üblicherweise setzt man $q := 1 - p$, so daß $P(\{\omega\}) = p^k q^{n-k}$ gilt.
3. Für $n = 1$ ist die *Bernoulli*-Kette natürlich ein *Bernoulli*-Experiment.

Die in Definition 221.1 festgelegte *Bernoulli*-Kette hat genau die Eigenschaften, die wir von einer Serie von *Bernoulli*-Experimenten erwarten. Es gilt nämlich

Satz 221.1:
Bei einem Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{0; 1\}^n$ und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P bedeute **Treffer an der i-ten Stelle** das Ereignis $A_i :=$ Menge aller n-Tupel mit 1 an der i-ten Stelle.
Ein solches Zufallsexperiment ist eine *Bernoulli*-Kette der Länge n mit dem Parameter p genau dann, wenn gilt:
1) $P(A_i) = p$ für alle i.
2) Die A_i sind stochastisch unabhängig.

Beweis:
a) Nehmen wir zunächst an, das Zufallsexperiment sei eine *Bernoulli*-Kette. A_i besteht aus allen n-Tupeln mit einer 1 an der i-ten Stelle. An den restlichen $n-1$ Stellen können dann noch beliebig Nullen und Einsen stehen. Wegen Definition 221.1 haben alle n-Tupel aus A_i mit gleich vielen Einsen dieselbe Wahrscheinlichkeit. Sind etwa zusätzlich zur i-ten Eins noch weitere k Einsen vorhanden, dann hat ein solches n-Tupel die Wahrscheinlichkeit $p^{k+1}q^{n-k-1}$. Es gibt aber $\binom{n-1}{k}$ solche Tupel, weil man die k Einsen auf $\binom{n-1}{k}$ Arten auf die $n-1$ freien Stellen des n-Tupels verteilen kann. Nach Definition 42.1 gilt dann

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{(n-1)-k} = \\ &= p(p+q)^{n-1} = \\ &= p \cdot 1 = p, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. (Wegen der Summierung vergleiche man Aufgabe 115/**41**.)
Die noch nachzuweisende Unabhängigkeit der A_i folgt direkt aus der Bedingung **2** von Definition 221.1. Es gilt nämlich einerseits

$$P(\overset{(-)}{A}_1 \cap \overset{(-)}{A}_2 \cap \ldots \cap \overset{(-)}{A}_n) = p^k q^{n-k},$$

falls genau $n-k$ Querstriche stehen; denn

$$\overset{(-)}{A}_1 \cap \overset{(-)}{A}_2 \cap \ldots \cap \overset{(-)}{A}_n$$

ist gerade dasjenige Elementarereignis $\{\omega\}$, bei dem ω genau an den Stellen, wo bei den A_i Querstriche stehen, eine Null hat.
Andererseits gilt nach dem eben Bewiesenen

$$P(\overset{(-)}{A}_1) \cdot P(\overset{(-)}{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overset{(-)}{A}_n) = p^k q^{n-k}.$$

Also sind die 2^n Gleichungen der Definition 156.1 für die Unabhängigkeit von n Ereignissen erfüllt.

b) Seien nun die A_i stochastisch unabhängig und ferner $P(A_i) = p$ für alle i, dann gilt

$$\begin{aligned} P(\{\omega\}) &= P(\overset{(-)}{A}_1 \cap \overset{(-)}{A}_2 \cap \ldots \cap \overset{(-)}{A}_n) = \\ &= P(\overset{(-)}{A}_1) \cdot P(\overset{(-)}{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overset{(-)}{A}_n) = \\ &= p^k q^{n-k}, \end{aligned}$$

wobei wieder die Nullen in ω den Nieten $\bar{A}_i$ entsprechen. Somit ist Bedingung **2** von Definition 221.1 erfüllt. Da deren Bedingung **1**, nämlich $\Omega = \{0; 1\}^n$, eo ipso zutrifft, ist das Zufallsexperiment also eine *Bernoulli*-Kette, w. z. b. w.

Satz 221.1 gibt uns einen Hinweis, wie man das stochastische Modell der *Bernoulli*-Kette auf reale Versuchsfolgen anwenden kann. Man legt zunächst fest, was $A_i :=$ »Treffer an der i-ten Stelle« bedeuten soll. Wenn sich die Versuche nicht beeinflussen, dann kann man die Unabhängigkeitsannahme für die A_i machen. Schließlich bestimmt man die Länge n (= Anzahl der Versuche) und den Parameter $p = P(A_i)$ (= Trefferwahrscheinlichkeit) der *Bernoulli*-Kette. Dazu ein

Beispiel: Bei einem Multiple-Choice-Test werden den Prüflingen 4 unabhängige Fragen mit je 3 Auswahlantworten vorgelegt, von denen jeweils genau eine richtig ist. Die Prüfung gilt als bestanden, wenn 2 direkt aufeinanderfolgende Fragen richtig beantwortet werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Kandidat durch reines Raten?
Bestimmen wir zunächst die Merkmale einer *Bernoulli*-Kette:
$A_i :=$ »i-te Frage wird richtig beantwortet«, $p = \frac{1}{3}$ und $n = 4$.
Die Unabhängigkeit der A_i ist plausibel, da die Fragen unabhängig sein sollen.
Wir interessieren uns für das Ereignis $B := \{1111, 1110, 0111, 1101, 1011, 1100, 0110, 0011\}$. Mit Definition 42.1 und Definition 221.1 erhalten wir

$$P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1+8+12}{81} = \frac{7}{27} \approx 25{,}9\%.$$

Aufgaben

1. a) Beim Werfen mit einem Würfel sei »Es fällt die Fünf« der Treffer. Gib das Ergebnis-10-Tupel der *Bernoulli*-Kette an, das sich ergibt, wenn man die ersten 10 Würfe aus Tabelle 10.1 als Versuchsausgänge ansieht. Berechne die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens, wenn
   1) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Seite 42 angenommen wird,
   2) mit einem L-Würfel gespielt würde.
   b) Betrachte die Würfe 11–20, 21–30, ..., 91–100 aus Tabelle 10.1 und gib die daraus resultierenden Ergebnis-10-Tupel der *Bernoulli*-Kette an.
   c) Löse **a)** für »Es fällt eine ungerade Augenzahl« als Treffer.
   d) Löse **a)** für »Es fällt eine Augenzahl zwischen 2 und 5« als Treffer.
2. In einer Urne liegen eine rote und drei schwarze Kugeln. Man zieht dreimal je eine Kugel. Treffer A_i sei das Ziehen der roten Kugel beim i-ten Zug. Offenbar ist sowohl beim Ziehen mit Zurücklegen wie auch beim Ziehen ohne Zurücklegen $P(A_i) = \frac{1}{4}$ für $i = 1, 2, 3$. (Siehe 125/**102**) Eine *Bernoulli*-Kette liegt jedoch nur beim Ziehen mit Zurücklegen vor.
   a) Begründe die letzte Behauptung, indem du mit Hilfe eines Baums die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen erstellst.
   b) Zeige, daß beim Ziehen ohne Zurücklegen A_1 und A_2 stochastisch abhängig sind.
3. **a)** *Gerolamo Cardano* (1501–1576) behauptet zu Beginn von Kapitel XV seines *Liber de ludo aleae* (um 1564), daß sich bei einer fairen Wette die Einsätze wie $1:(n^2-1)$ verhalten müßten, wenn man darauf wetten wollte, bei n Würfen mit zwei Würfeln jedesmal eine gerade Augensumme zu erhalten. Was meinst du dazu?
   b) Gegen Ende desselben Kapitels kommt *Cardano* zur Erkenntnis, daß sich bei n aufeinander folgenden Versuchen die Einsätze wie $a^n:(b^n-a^n)$ verhalten müssen, wenn a die Anzahl der günstigen Fälle und b die Anzahl aller möglichen Fälle im Einzelversuch bedeuten. Als abschließendes Beispiel führt er aus, daß sich die Einsätze wie $753\,571:9\,324\,125 \approx 1:12$ verhalten müssen, wenn man fair darauf wetten wollte, daß bei 3 aufeinanderfolgenden Würfen mit 3 L-Würfeln jedesmal wenigstens ein Würfel die Eins zeigt. Weise die Richtigkeit beider Behauptungen nach.
4. Zur Entscheidung eines Problems werden 5 Experten befragt, die sich unabhängig voneinander äußern. Jeder Experte beurteilt das Problem mit 80% Sicherheit richtig.
   a) Stelle das Experiment als *Bernoulli*-Kette dar. Was bedeutet »Treffer beim i-ten Versuch«? Wie groß sind die Länge n und der Parameter p?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit
   1) urteilen genau der erste und der dritte Experte richtig,
   2) urteilen alle Experten richtig,
   3) erhält man kein richtiges Urteil,
   4) erhält man wenigstens ein richtiges Urteil?
   c) Wie viele Experten müßte man mindestens befragen, um mit mehr als 99% Sicherheit mindestens ein richtiges Urteil zu erhalten?
5. Eine Personenmenge (»Bevölkerung«, »Population«) bestehe zu 40% aus Frauen und zu 60% aus Männern. Es wird 5mal jemand ausgewählt und notiert, ob es ein Mann oder eine Frau ist. (Stichprobe vom Umfang 5, mit Zurücklegen.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
   a) keinen Mann, **b)** wenigstens 1 Mann, **c)** genau 1 Mann, **d)** nur Männer?
6. Wie viele Personen muß man aus der Bevölkerung von Aufgabe **5** mindestens auswählen, um dabei mit mindestens 99,9% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Mann zu erhalten?

7. Ein Gerät besteht aus 10 Bausteinen, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p ordnungsgemäß arbeiten. Fällt auch nur ein Baustein aus, so ist das Gerät gestört. Wie groß muß p sein, damit das Gerät mit 90% Sicherheit arbeitet?

8. Ein elektronisches Gerät besteht aus 13 Baugruppen. Fällt auch nur eine davon aus, ist es unbrauchbar. Man weiß, daß für jede Baugruppe die Wahrscheinlichkeit, während 1jährigen Betriebs auszufallen, 0,26% beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Gerät im Laufe eines Jahres repariert werden muß?

9. Eine Maschine erzeugt Metallteile, 5% davon sind unbrauchbar. Wie viele Teile muß man wenigstens nehmen, damit man mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit mindestens ein defektes dabei hat? (*Bernoulli*-Kette annehmen!)

10. Angenommen, man würde beim Überqueren einer gewissen Straßenkreuzung mit 0,5 Promille Wahrscheinlichkeit überfahren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt man 1 Jahr unverletzt, wenn man die Kreuzung täglich 2mal überquert?
Stelle das »Experiment« als *Bernoulli*-Kette dar. Was bedeutet »Treffer beim i-ten Versuch«? Welche Werte haben n und p?

11. Die Gewinnchance für einen Sechser beim Zahlenlotto »6 aus 49« ist $\approx \frac{1}{14\text{ Mill.}}$ (Seite 94).
Wann hat man die größte Aussicht, wenigstens einen Sechser zu erhalten,
a) wenn man zu einer Ausspielung 1 Million Lottozettelfelder *verschieden* ausfüllt,
b) wenn man bei 10 Ausspielungen je 100000 Lottozettelfelder *verschieden* ausfüllt,
c) wenn man zu einer Ausspielung 1 Million Lottozettelfelder *zufallsbestimmt* ausfüllt?
Wie groß sind jeweils Länge und Parameter der *Bernoulli*-Kette?
Bei welchem der Spielsysteme kann man 2 oder mehr Sechser bekommen?

12. Eine Stadt wird von 4 Kraftwerken versorgt. Es sind 2 Wasser- und 2 Dampfkraftwerke. Bei Gewitter besteht für jede der 4 zugehörigen Hochspannungsleitungen einzeln die Wahrscheinlichkeit p, daß sie sich wegen Blitzschlag automatisch abschaltet. Im Notfall können 2 Kraftwerke die Stadt gerade noch versorgen; es muß jedoch ein Dampfkraftwerk dabeisein.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bricht bei Gewitter die Stromversorgung der Stadt zusammen? Man zeichne diese Wahrscheinlichkeit als Funktion der »Abschaltewahrscheinlichkeit« p. Einheit = 10 cm. Man überzeuge sich durch Rechnung davon, daß die gezeichnete Funktion monoton steigt.
b) Man zeichne die entsprechende Funktion wie in **a)**, wenn die Stadt von 2 *beliebigen* Kraftwerken gerade noch versorgt werden kann.

13. Auf einer Straße kommen Lastwagen und Personenautos in regelloser Folge hintereinander. Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem beliebigen Augenblick gerade ein Lastauto vorbeifährt, sei p. Ich beginne in einem beliebigen Augenblick, Autos zu zählen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
a) daß zuerst k Personenautos und dann ein Lastauto kommen,
b) daß die ersten k Autos keine Lastautos sind,
c) daß unter den ersten k Autos mindestens ein Lastauto ist,
d) daß in einer Gruppe von 5 Autos genau 3 Lastautos hintereinander fahren,
•**e)** daß in einer Gruppe von 5 Autos mindestens einmal genau 2 Lastautos hintereinander fahren?

•**14.** Man vergleiche die Ergebnisse der Aufgabe **13** mit der Erfahrung, wie sie die Tabellen 10.1 und 11.1 liefern. Man fasse jede Tabelle als Serie von 5fach-Würfen auf. In Tabelle 11.1 bedeute 0 = Lastauto oder (zweite Deutung) I = Lastauto (jeweils $p = \frac{1}{2}$). In Tabelle 10.1 bedeute 6 = Lastauto ($p = \frac{1}{6}$).
In den Teilen **a)** und **b)** der Aufgabe **13** setze man $k = 2$, in **c)** sei $k = 3$.

•**15.** 4 Kinder losen um 4 Äpfel, 2 große und 2 kleine. Sie werfen der Reihe nach eine Münze. Wer »Adler« wirft, erhält einen großen Apfel, wer »Zahl« wirft, einen kleinen, bis nur noch große oder nur noch kleine Äpfel da sind.

a) Ist das Verfahren gerecht, d.h., hat jedes die gleiche Aussicht, einen großen Apfel zu erhalten?

b) Ist es für je 2 von ihnen gleich wahrscheinlich, daß beide einen großen Apfel erhalten?

•**c)** Ist das Losverfahren gerecht, wenn es allgemein n große und n kleine Äpfel und $2n$ Kinder sind?

d) Man beurteile das Verfahren, wenn 3 Kinder um 1 großen und 2 kleine Äpfel losen.

16. Ein Computer drucke Wörter in einer zufälligen Reihenfolge aus. Jedes Wort, das den Buchstaben »i« enthält, heiße i-Wort. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausdruck eines i-Wortes betrage 0,4.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern mindestens 3 direkt aufeinanderfolgende Wörter i-Wörter sind?

b) Wie viele Wörter muß man mindestens ausdrucken lassen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein i-Wort zu erhalten?

c) Der Computer breche nun die Programmausführung nach dem dritten ausgedruckten i-Wort ab, spätestens aber nach dem sechsten Wort. X sei die Anzahl der ausgedruckten Wörter. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.

17. Eine L-Münze werde 5mal geworfen. Treffer sei das Auftreten von Adler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Ergebnis

a) mindestens 4mal nacheinander Treffer oder mindestens 4mal nacheinander Nieten,

b) mindestens 3mal nacheinander Treffer oder mindestens 3mal nacheinander Nieten enthalten?

18. Ein Trefferpaar seien zwei und nicht mehr aufeinanderfolgende Treffer. Ein L-Würfel werde 6mal geworfen; Treffer sei das Auftreten der Sechs. X sei die Zufallsgröße »Anzahl der Trefferpaare«. Bestimme ihren Erwartungswert und ihre Varianz.

Bei den folgenden »**Wartezeit-Aufgaben**« sei die Länge n der *Bernoulli*-Kette beliebig, aber jeweils hinreichend groß.

19. Ein Laplace-Würfel werde so lange geworfen, bis eine Sechs erscheint.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Sechs frühestens beim 4. Wurf auftritt?

b) Überprüfe das Resultat von **a)** an Tabelle 10.1. Fasse dabei die 80 Halbzeilen als 80 Anfänge von *Bernoulli*-Ketten auf.

20. **a)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dem ersten Treffer genau k Nieten vorausgehen? Stelle die Wahrscheinlichkeiten für $p = \frac{1}{4}$ und $k = 0, \ldots, 10$ graphisch dar.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der 1. Treffer erst beim k-ten Wurf oder noch später?

•**21.** Für eine *Bernoulli*-Kette der Länge n mit dem Parameter p werde die Zufallsgröße X folgendermaßen definiert: X nehme den Wert i an, wenn beim i-ten Versuch zum ersten Mal ein Treffer eintritt; X nehme den Wert 0 an, wenn kein Treffer eintritt.

a) Berechne $\mathscr{E}X$.

b) Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \mathscr{E}X$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert?

c) Nun sei $X :=$ Nummer der ersten Sechs beim Werfen eines L-Würfels.
Bestimme $\mathscr{E}X$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \mathscr{E}X$ unter Verwendung der Ergebnisse aus **a)** und **b)**.

d) Überprüfe den errechneten Erwartungswert an Hand von Tabelle 10.1. Fasse dabei die 80 Halbzeilen als 80 *Bernoulli*-Ketten der Länge 15 auf.

e) Bekanntlich gilt bei genügend kleinem Δt für den radioaktiven Zerfall $\Delta N = -\lambda N \Delta t$. Dabei bedeutet N die Anzahl der zu Beginn des Intervalls Δt vorhandenen Atome, $-\Delta N$ die Anzahl der in der Zeit Δt zerfallenden Atome, λ die Zerfallskonstante. Wir betrachten nun folgende *Bernoulli*-Kette: Ein Versuch sei die Beobachtung eines bestimmten Atoms während der Zeit $\Delta t = 1$. Treffer sei das Zerfallen des Atoms. Gib den Parameter dieser *Bernoulli*-Kette an. Deute $\lim\limits_{n \to \infty} \mathscr{E}X$ von **b)** für diesen Fall.

•**22.** In einer unendlichen *Bernoulli*-Kette mit dem Parameter p definiert man eine Zufallsgröße $X :=$ »Nummer des Versuchs, bei dem zum ersten Mal ein Treffer eintritt«.

a) Bestimme die Verteilung $P(X = k)$. Man nennt sie **geometrische Verteilung**.

b) *Buffon* (1707–1788) berichtet in Abschnitt XVIII seines *Essai d'arithmétique morale* (1777), daß er zur Untersuchung des »Petersburger Problems« (Aufgabe 189/**23**) ein Kind 2048mal das Spiel spielen ließ. Dabei ergab sich, daß Adler zum ersten Mal

1061mal beim 1. Wurf,	494mal beim 2. Wurf,	232mal beim 3. Wurf,
137mal beim 4. Wurf,	56mal beim 5. Wurf,	29mal beim 6. Wurf,
25mal beim 7. Wurf,	8mal beim 8. Wurf,	6mal beim 9. Wurf

erschien. Vergleiche die relativen Häufigkeiten mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

•**c)** Zeige, daß für den Erwartungswert und die Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsgröße gilt: $\mathscr{E}X = \frac{1}{p}$, $\operatorname{Var} X = \frac{q}{p^2}$.

Benütze dabei folgende Beziehung aus der Reihenlehre:

Für $|x| < 1$ gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Begründung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

d) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Nummer der ersten Sechs beim Werfen eines L-Würfels«. (Vgl. Aufgabe **21c, d**).

e) Zeichne ein Stabdiagramm der Zufallsgröße aus **d)**. Trage darin μ und σ ein. ($10\% \mathrel{\hat{=}} 5$ cm)

f) Es sei $Z :=$ »Anzahl der Nieten, die dem ersten Treffer vorausgehen«.

Zeige, daß $\mathscr{E}Z = \frac{q}{p}$ und $\operatorname{Var} Z = \frac{q}{p^2}$.

23. Zwei L-Münzen werden so lange geworfen, bis beide gleichzeitig Adler zeigen. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der dazu nötigen Würfe.

a) Gib einen gröberen Ergebnisraum an. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

b) Berechne $\mathscr{E}X$ und $\operatorname{Var} X$. (Siehe Aufgabe **22**.)

•**24.** Zwei L-Würfel werden beliebig oft geworfen und die Augensumme als Ergebnis notiert. Berechne die Erwartungswerte folgender Zufallsgrößen

$A :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensumme 6 erscheint,
$B :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensumme 7 erscheint,
$C :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensumme 8 erscheint,
$D :=$ Anzahl der Spiele, bis zweimal die Augensumme 7 erscheint,
•$E :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensummen 6 und 8 erscheinen.

Vergleiche die Ergebnisse mit denen von Aufgabe 112/**12b**).

25. Ein Laplace-Würfel werde so lange geworfen, bis die zweite Sechs fällt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies beim 10. Wurf geschieht?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies *frühestens* beim 10. Wurf geschieht?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies *spätestens* beim 10. Wurf geschieht?

d) Überprüfe die in **b)** und **c)** errechneten Wahrscheinlichkeiten an Tabelle 10.1. Fasse dabei die 80 Halbzeilen als 80 Anfänge von *Bernoulli*-Ketten auf.

•**26.** In einer unendlichen *Bernoulli*-Kette mit dem Parameter p definiert man eine Zufallsgröße $X_m :=$ »Nummer des Versuchs, bei dem der m-te Treffer eintritt«.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_m. Sie heißt ***Pascal*-Verteilung**. Für $m = 1$ ergibt sich die geometrische Verteilung aus Aufgabe **22** als Sonderfall.

b) Stelle X_m durch die Zufallsgrößen Y_i dar; dabei bedeute Y_i die Anzahl der Nieten zwischen dem $(i-1)$-ten und i-ten Treffer $(i = 1, \ldots, m)$.

c) Berechne unter Verwendung von **b)** Erwartungswert und Varianz von X_m.

d) Es sei $X_2 :=$ »Nummer desjenigen Wurfs eines L-Würfels, bei dem die zweite Sechs fällt«. Stelle die Verteilung von X_2 auf, berechne $\mathscr{E}X_2$ und $\operatorname{Var} X_2$ und zeichne schließlich ein Stabdiagramm. ($1\% \mathrel{\hat{=}} 1$ cm)

e) Überprüfe den errechneten Erwartungswert von X_2 an Hand von Tabelle 10.1. Fasse dabei die 40 Zeilen als 40 Anfänge von *Bernoulli*-Ketten auf.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der m-te Treffer erst beim k-ten Versuch oder noch später?

Bild 227.1 Mann und Frau als Würfel aus der römischen Antike. British Museum, London. – Vgl. Bild 46.2.