Stochastik

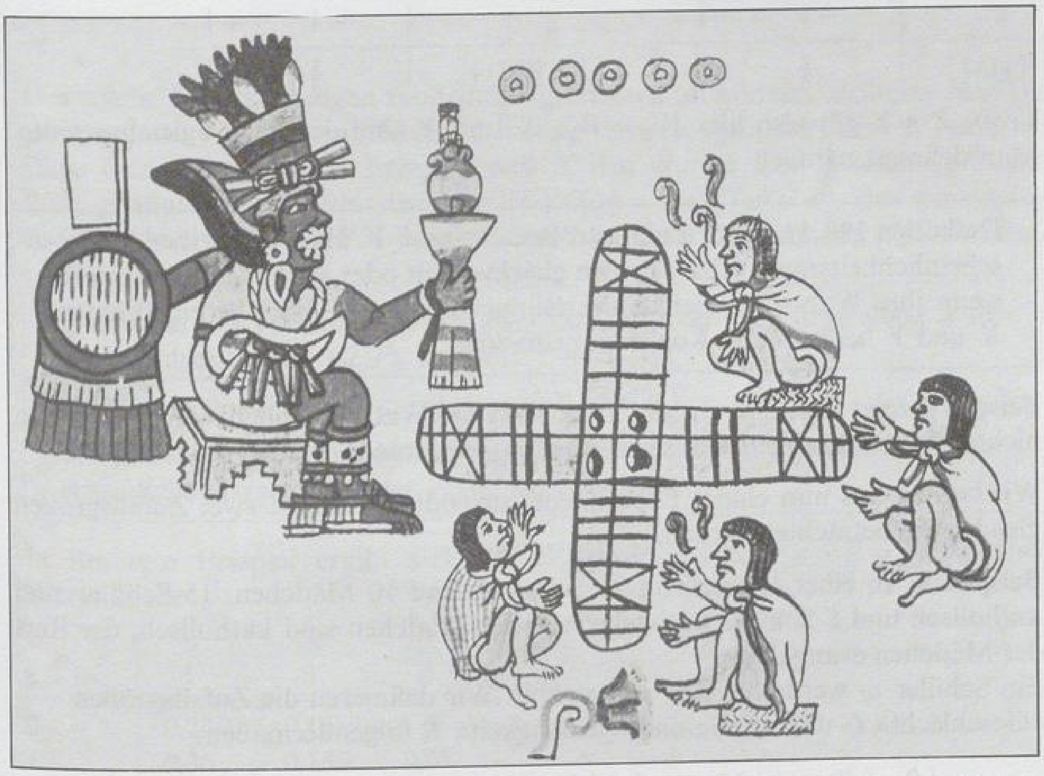
Barth, Friedrich

München, [20]03

12. Mehrere Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

12. Mehrere Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum



Macuilxochitl, der Gott der Blumen und Spiele, überwacht das aztektische Patolli-Spiel. 2 Spieler, begleitet von 2 Punktrichtern, haben je 6 Kiesel als Steine und je 2 Bohnen als Würfel und müssen alle 104 »Häuser« durchlaufen. Da 52 Jahre den Hauptzyklus des aztekischen Kalenders bilden, war Patolli nicht nur ein Glücksspiel, sondern diente auch religiösen Zwecken. – *Codex Magliabecchi* (16. Jh.)

12. Mehrere Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum

12.1. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wir betrachten zwei verschiedene* Zufallsgrößen X und Y über (Ω, P) mit ihren Wahrscheinlichkeitsfunktionen W_X und W_Y.

Beispiel 1: Für einen einfachen Würfelwurf sollen folgende Gewinnpläne gelten

a) Zufallsgröße X: Fällt eine gerade Zahl, so gewinnt der Spieler eine Mark; andernfalls verliert er eine Mark.

b) Zufallsgröße Y: Fällt eine Primzahl, so gewinnt der Spieler eine Mark; andernfalls verliert er eine Mark.

Die Wertetabellen der Zufallsgrößen X bzw. Y haben folgendes Aussehen:

ω	1	2	3	4	5	6
$x = X(\omega)$	-1	1	-1	1	-1	1
$y = Y(\omega)$	-1	1	1	-1	1	-1

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktionen W_X bzw. W_Y ergibt sich somit:

x	-1	$+1$
$W_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	-1	$+1$
$W_Y(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Trotz $X \neq Y$ gilt also hier $W_X = W_Y$. X und Y sind demnach »gleichverteilt«. Man definiert nämlich

Definition 198.1: Zwei Zufallsgrößen X und Y über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) heißen **gleichverteilt** oder auch **identisch verteilt**, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen W_X und W_Y übereinstimmen. X und Y heißen dann **Kopien** voneinander.

Beispiel 1 zeigt uns, daß aus der Gleichheit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht auf die Gleichheit der Zufallsgrößen geschlossen werden darf.

Wir wollen uns nun einem Experiment zuwenden, bei dem zwei Zufallsgrößen gleichzeitig betrachtet werden.

Beispiel 2: In einer Klasse von 25 Schülern sind 10 Mädchen. 15 Schüler sind katholisch und 8 Schüler evangelisch. 6 der Mädchen sind katholisch, der Rest der Mädchen evangelisch.

Ein Schüler ω werde beliebig ausgewählt. Wir definieren die Zufallsgrößen »Geschlecht« G und »Religionszugehörigkeit« R folgendermaßen:

$$G(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Mädchen} \\ 1, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Jungen} \end{cases}$$

* Zwei Zufallsgrößen heißen **gleich**, wenn sie als Funktionen gleich sind, d.h., wenn ihre Wertetabellen übereinstimmen.

$$R(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Katholiken} \\ 2, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Protestanten} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von G und R ergeben sich zu:

g	0	1
$W_G(g)$	0,40	0,60

r	1	2	3
$W_R(r)$	0,60	0,32	0,08

Zur Erstellung einer Schulstatistik wird sowohl nach Geschlecht als auch nach Religionszugehörigkeit gefragt. Diese Fragestellung bedingt eine gleichzeitige Betrachtung beider Zufallsgrößen.

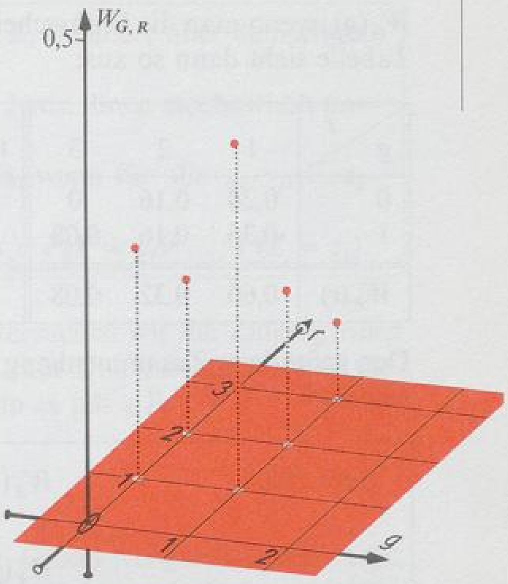


Fig. 199.1 Graphische Darstellung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_{G,R}$

Um solche Fragestellungen modellmäßig erfassen zu können, definiert man die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsgrößen X und Y. Dazu betrachtet man das Ereignis, daß X den Wert x und gleichzeitig Y den Wert y annimmt, d.h. das Ereignis $\{\omega \mid X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$, das wir analog zu früher kurz »$X = x \wedge Y = y$« schreiben. Mit dieser Bezeichnung legen wir fest:

Definition 199.1: Sind X und Y zwei Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so heißt

$$W_{X,Y}\colon (x \mid y) \mapsto P(X = x \wedge Y = y)$$

die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion** oder die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgrößen X und Y.

In unserem Beispiel ergibt sich für $W_{G,R}(g, r) = P(G = g \wedge R = r)$ folgende Wertetabelle:

g \ r	1	2	3
0	0,24	0,16	0
1	0,36	0,16	0,08

Figur 199.1 zeigt den Graphen von $W_{G,R}$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

Addiert man in der obigen Wertetabelle für $W_{G,R}$ die Wahrscheinlichkeiten einer Spalte r, so erhält man als Summe den Wert $W_R(r)$. Andererseits erhält man

$W_G(g)$, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Zeile g addiert. Die vollständige Tabelle sieht dann so aus:

g \ r	1	2	3	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0	0,4
1	0,36	0,16	0,08	0,6
$W_R(r)$	0,60	0,32	0,08	1

Der gefundene Zusammenhang zwischen W_G, W_R und $W_{G,R}$ gilt offenbar allgemein:

Satz 200.1:
$$W_X(x_i) = \sum_{j=1}^{m} W_{X,Y}(x_i, y_j)$$
$$W_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{n} W_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle y_j aus dem Wertebereich von Y bzw. über alle x_i aus dem Wertebereich von X.

Bemerkung: Auf Grund von Satz 200.1 nennt man die einfachen Wahrscheinlichkeitsfunktionen W_X und W_Y manchmal in diesem Zusammenhang auch **Rand-** oder **Marginalwahrscheinlichkeitsverteilungen.**

12.2. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

In Kapitel **10.** wurde die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen definiert und untersucht. Wir nannten die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, wenn der Produktsatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Nun erzeugt jede Zufallsgröße X mittels der Aussagen »$X = x_i$« eine Menge von Ereignissen. Es liegt daher nahe, die stochastische Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und Y dadurch zu definieren, daß man für jedes mögliche Paar von Ereignissen »$X = x_i$« und »$Y = y_j$« die stochastische Unabhängigkeit fordert:

Definition 200.1: Zwei Zufallsgrößen X und Y, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) definiert sind, heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für alle x_i, y_j gilt:
$$P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$
oder kürzer: $\quad W_{X,Y}(x_i, y_j) = W_X(x_i) \cdot W_Y(y_j)$

Bei mehr als zwei Zufallsgrößen unterscheidet man wie bei Ereignissen zwischen paarweiser Unabhängigkeit und Unabhängigkeit in ihrer Gesamtheit gemäß

Definition 201.1: Die Zufallsgrößen $X, Y, \ldots, Z$, definiert über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), heißen

a) paarweise stochastisch unabhängig, wenn je 2 von ihnen stochastisch unabhängig sind,

b) stochastisch unabhängig in ihrer Gesamtheit, wenn für alle $x_i, y_j, \ldots, z_k$ gilt:

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j \wedge \ldots \wedge Z = z_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \cdot \ldots \cdot P(Z = z_k).$$

Zur Veranschaulichung von Definition 200.1 untersuchen wir die Zufallsgrößen aus den Beispielen 1 und 2 des Abschnitts **12.1.** auf Unabhängigkeit. Die Gewinnpläne X und Y sind nicht unabhängig; denn es gilt z. B.

$P(X = -1 \wedge Y = -1) = \frac{1}{6}$; aber
$P(X = -1) \cdot P(Y = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Zur Untersuchung der Zufallsgrößen Geschlecht G und Religionszugehörigkeit R auf Unabhängigkeit stellen wir die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_{G,R}$ der Produkttafel der Randwahrscheinlichkeitsverteilungen gegenüber:

$W_{G,R}(g, r) = P(G = g \wedge R = r)$				
g \ r	1	2	3	$P(G = g)$
0	0,24	0,16	0	0,4
1	0,36	0,16	0,08	0,6
$P(R = r)$	0,6	0,32	0,08	1

$W_G(g) \cdot W_R(r) = P(G = g) \cdot P(R = r)$				
g \ r	1	2	3	$P(G = g)$
0	0,24	0,128	0,032	0,4
1	0,36	0,192	0,048	0,6
$P(R = r)$	0,6	0,32	0,08	1

Da die Tabellen nicht übereinstimmen, sind die Zufallsgrößen Geschlecht und Religionszugehörigkeit in der betrachteten Klasse stochastisch abhängig. Hätte man in derselben Klasse die Zufallsgröße »Religionszugehörigkeit« etwas anders definiert, nämlich

$$R^*(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Katholiken} \\ 2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ergäben sich folgende Tabellen:

$W_{G,R^*}(g, r^*) = P(G = g \wedge R^* = r^*)$

g \ r^*	1	2	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0,4
1	0,36	0,24	0,6
$W_{R^*}(r^*)$	0,6	0,4	1

$W_G(g) \cdot W_{R^*}(r^*) = P(G = g) \cdot P(R^* = r^*)$

g \ r^*	1	2	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0,4
1	0,36	0,24	0,6
$W_{R^*}(r^*)$	0,6	0,4	1

Diese Tabellen stimmen überein; also sind Geschlecht G und Religionszugehörigkeit R^* stochastisch unabhängige Zufallsgrößen.

Fazit: Durch geeignete Definition von Zufallsgrößen kann man das Ergebnis einer Untersuchung beeinflussen. Man sollte daher bei Veröffentlichungen von statistischen Untersuchungen nicht nur auf die Ergebnisse achten, sondern auch auf die Art, wie sie gewonnen wurden!

12.3. Verknüpfung von Zufallsgrößen

Zufallsgrößen sind reellwertige Funktionen auf Ω. Daher lassen sich Zufallsgrößen wie Funktionen verknüpfen. Wir beschränken uns hier auf Summe und Produkt zweier Zufallsgrößen und erinnern an die in der Analysis übliche

> **Definition 202.1:** Sind X und Y zwei Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so gilt:
>
> $$(X + Y)(\omega) := X(\omega) + Y(\omega) \qquad \text{und} \qquad (X \cdot Y)(\omega) := X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe bzw. des Produkts zweier Zufallsgrößen kann man aus ihrer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(X + Y = s) &= \\ &= \sum_{x_i + y_j = s} P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \\ &= \sum_{x_i + y_j = s} W_{X,Y}(x_i, y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} W_{X,Y}(x_i, s - x_i)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \cdot Y = k) &= \\ &= \sum_{x_i y_j = k} P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \\ &= \sum_{x_i y_j = k} W_{X,Y}(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Zur Summe zweier Zufallsgrößen bringen wir folgendes

Beispiel: Beim Wurf zweier L-Würfel hat man zwei Zufallsgrößen X und Y, nämlich die Augenzahlen des 1. bzw. 2. Würfels über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P); dabei besteht Ω aus den 36 Paaren $(a_1 | a_2)$ mit $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und P ist eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω. Für die Zufallsgrößen X und Y gilt dabei

$X(\omega) = X((a_1 \mid a_2)) = a_1$ und

$Y(\omega) = Y((a_1 \mid a_2)) = a_2$.

Ihre Summe $X + Y$ ist eine neue Zufallsgröße Z über (Ω, P).
Dabei ist
$Z(\omega) = (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.
Figur 203.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Die Wertetabelle von Z sieht folgendermaßen aus:

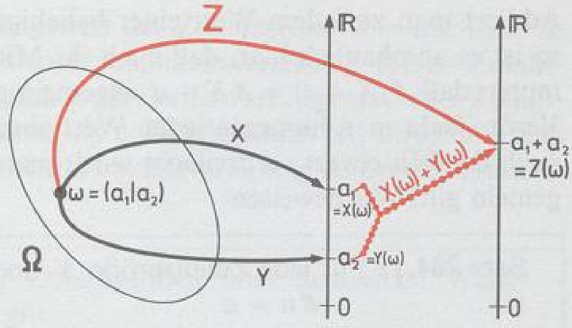


Fig. 203.1
Zur Summe zweier Zufallsgrößen
$Z(\omega) = (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$

a_1 \ a_2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion W_Z von Z ergibt sich gemäß

$$W_Z(z) = \sum_{x_i + y_j = z} W_{X,Y}(x_i, y_j); \quad \text{so ist z.B.}$$

$$\begin{aligned} W_Z(10) &= \sum_{x_i + y_j = 10} W_{X,Y}(x_i, y_j) = \\ &= W_{X,Y}(4{,}6) + W_{X,Y}(5{,}5) + W_{X,Y}(6{,}4) = \\ &= \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} = \\ &= \tfrac{3}{36}. \end{aligned}$$

Man erhält:

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W_Z(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Erstaunlicherweise ist Z nicht gleichmäßig verteilt, obwohl die Summanden X und Y gleichmäßig verteilt sind (vgl. Figuren 173.1 und 173.2).

12.4. Sätze über Maßzahlen

Für Erwartung und Varianz lassen sich einige einfache Sätze leicht beweisen, durch die deren Berechnung in vielen Fällen erleichtert wird.

12.4.1. Sätze über die Erwartung

Der Erwartungswert einer konstanten Zufallsgröße a ist als ihr Mittelwert natürlich die Konstante selber, d.h., $\mathscr{E}a = a$.

Addiert man zu jedem Wert einer beliebigen Zufallsgröße X die Konstante 3, so ist es anschaulich klar, daß auch ihr Mittelwert $\mathscr{E}X$ um 3 wächst; man vermutet, daß $\mathscr{E}(X+a) = \mathscr{E}X + a$ allgemein gilt.
Verdreifacht man hingegen jeden Wert einer Zufallsgröße X, so ist es klar, daß auch der Mittelwert verdreifacht wird; man vermutet, daß $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$ allgemein gilt. Wir beweisen

Satz 204.1: Für jede Zufallsgröße X und jede Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $\mathscr{E}a = a$
(2) $\mathscr{E}(X+a) = \mathscr{E}(X) + a$
(3) $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$

Beweis:
(1). $\mathscr{E}a = a \cdot W(a) = a \cdot 1 = a$.
(2). Mit $g(X) := X + a$ gilt nach Satz 178.1

$$\mathscr{E}(X+a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a)W(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) + a \sum_{i=1}^{n} W(x_i) = \mathscr{E}X + a \cdot 1 = \\ = \mathscr{E}X + a.$$

(3). Mit $g(X) := aX$ gilt nach Satz 178.1

$$\mathscr{E}(aX) = \sum_{i=1}^{n} a x_i W(x_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) = a \cdot \mathscr{E}X.$$

Der Mittelwert der Summe zweier Zufallsgrößen müßte wohl die Summe der beiden Mittelwerte sein, wie Beispiel 1 und Beispiel 2 von Seite 173 für die Zufallsgröße »Augensumme zweier L-Würfel« vermuten lassen. Daß dies auch allgemein gilt, ist die Aussage von

Satz 204.2: Sind X und Y Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt

$$\mathscr{E}(X+Y) = \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y$$

Beweis:
Nach der Bemerkung **6** von Seite 172 gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega) + Y(\omega)] \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y.\end{aligned}$$

Aus Satz 204.1 und Satz 204.2 folgt sofort, daß die Erwartung eine lineare Funktion ist:

$$\boxed{\mathscr{E}(aX + bY) = a\mathscr{E}X + b\mathscr{E}Y}$$

Diese Formel gestattet, den Erwartungswert der Zufallsgröße $Z := aX + bY$ zu berechnen, ohne daß man die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße Z kennt! Darüber hinaus läßt sich sogar der Erwartungswert einer Zufallsgröße berechnen, die Summe von mehr als 2 Zufallsgrößen ist, ohne daß man ihre (meist recht komplizierte) Wahrscheinlichkeitsverteilung zu kennen braucht. Es gilt nämlich

Satz 205.1: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt

$$\mathcal{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n) = a_1 \mathcal{E} X_1 + a_2 \mathcal{E} X_2 + \ldots + a_n \mathcal{E} X_n,$$

kurz

$$\mathcal{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{E} X_i.$$

Beweis:
Wir verwenden das Beweisverfahren von Satz 204.2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} [a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) + \ldots + a_n X_n(\omega)] \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} [a_1 X_1(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + a_2 X_2(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \ldots + a_n X_n(\omega) \cdot P(\{\omega\})] = \\
&= a_1 \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \ldots + a_n \sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= a_1 \mathcal{E} X_1 + a_2 \mathcal{E} X_2 + \ldots + a_n \mathcal{E} X_n.
\end{aligned}$$

Merkregel: Erwartungswert einer Summe = Summe der Erwartungswerte

Man könnte nun vermuten, daß ein ähnlicher Satz auch für das Produkt von Zufallsgrößen gilt. Beispiel 1 und Beispiel 3 von Seite 173f. zeigen aber, daß dem nicht so ist, weil dort $\mathcal{E} X = 3{,}5$, dagegen
$\mathcal{E}(X \cdot X) = \mathcal{E}(X^2) = 15\frac{1}{6} \neq 3{,}5^2 = (\mathcal{E} X)^2$ ist.
Erfreulicherweise gilt aber wenigstens

Satz 205.2: Sind X und Y stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so gilt

$$\mathcal{E}(X \cdot Y) = \mathcal{E} X \cdot \mathcal{E} Y.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X \cdot Y) &= x_1 y_1 W_{X,Y}(x_1, y_1) + x_1 y_2 W_{X,Y}(x_1, y_2) + \ldots + x_n y_m W_{X,Y}(x_n, y_m) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j W_{X,Y}(x_i, y_j).
\end{aligned}$$

Diese Doppelsumme läßt sich wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von X und Y nach Definition 200.1 umformen zu

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i \cdot y_j) \cdot W_X(x_i) \cdot W_Y(y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i W_X(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j W_Y(y_j) = \\ &= \mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y.\end{aligned}$$

Satz 205.2 läßt sich nicht umkehren! Die Zufallsgrößen sind nämlich nicht notwendig unabhängig, wenn das Produkt der Erwartungswerte gleich dem Erwartungswert des Produkts ist. Wir zeigen dies an folgendem

Beispiel: Die Zufallsgrößen X und Y besitzen die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x \ y	0	1	2	$W_X(x)$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$W_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Damit gilt für das Produkt $X \cdot Y$:

xy	0	2	4
$W_{X \cdot Y}(xy)$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Für die Erwartungswerte ergibt sich:

$\mathscr{E}X = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$

$\mathscr{E}Y = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1;$

$\mathscr{E}(X \cdot Y) = 0 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$

Offenbar gilt $\mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y = \mathscr{E}(X \cdot Y)$. Die Zufallsgrößen X und Y sind jedoch nicht unabhängig; es gilt nämlich

$P(X = 0) = \frac{1}{2}$; $P(Y = 0) = \frac{1}{4}$; aber $P(X = 0 \wedge Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{8}$.

Wie schon erwähnt, können wir mit Hilfe der letzten Sätze die Berechnung von Erwartungswerten oft wesentlich vereinfachen. So erhält man leichter als im Beispiel 2 von Seite 173 den Erwartungswert der Zufallsgröße »Augensumme« beim Doppelwurf nach Satz 204.2 zu $3{,}5 + 3{,}5 = 7$. X bzw. Y sind dabei die Augenzahlen des 1. bzw. 2. Wurfs. Es gilt also $X((a|b)) = a$ bzw. $Y((a|b)) = b$. Entsprechend erhält man für den Erwartungswert der Zufallsgröße »Augenprodukt« beim Doppelwurf nach Satz 205.2 den Wert $3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$. Dieser Wert unterscheidet sich vom Erwartungswert $15\frac{1}{6}$ des Quadrats der Augenzahl beim einfachen Würfelwurf (siehe Beispiel 3, Seite 174). Die Zufallsgrößen X = Augenzahl beim 1. Wurf und Y = Augenzahl beim 2. Wurf sind nämlich unabhängig, während die Zufallsgröße X natürlich von sich selber abhängig ist.

12.4.2. Sätze über die Varianz

Auf Seite 181 haben wir angekündigt, daß die Berechnung der Varianz einer Zufallsgröße oftmals einfacher durchgeführt werden kann als durch direkte Berechnung gemäß ihrer Definition (Definition 180.1). Mit Hilfe der Sätze aus **12.4.1.** über die Erwartung können wir die dazu nötige Formel herleiten.

Die Varianz einer Zufallsgröße X ist definiert als Erwartung des Abweichungsquadrates $(X - \mathscr{E}X)^2$, d.h. als $\mathscr{E}((X-\mu)^2)$. Was ergibt sich, wenn wir allgemein die Erwartung eines beliebigen Abweichungsquadrats $(X-a)^2$ berechnen?

$$\begin{aligned}\mathscr{E}[(X-a)^2] &= \mathscr{E}([(X-\mu)+(\mu-a)]^2) = \\ &= \mathscr{E}[(X-\mu)^2+(\mu-a)^2+2(X-\mu)(\mu-a)] = \\ &= \mathscr{E}[(X-\mu)^2]+\mathscr{E}[(\mu-a)^2]+2\mathscr{E}[(X-\mu)(\mu-a)] = \\ &= \mathscr{E}[(X-\mu)^2]+(\mu-a)^2+2(\mathscr{E}X-\mu)(\mu-a) = \\ &= \operatorname{Var}X+(\mu-a)^2.\end{aligned}$$

Aus der gewonnenen Gleichung $\mathscr{E}[(X-a)^2] = \operatorname{Var}X + (\mu-a)^2$ läßt sich eine interessante Minimaleigenschaft des Erwartungswerts μ ablesen. Da nämlich der 2. Summand nie negativ wird und den Wert 0 nur für $a = \mu$ annimmt, gilt offenbar, daß das mittlere Abweichungsquadrat einer Zufallsgröße von einer Zahl a dann am kleinsten wird, wenn diese Zahl a gleich dem Erwartungswert μ der Zufallsgröße ist. Das Streuungsmaß »Varianz« ist also dem Erwartungswert einer Zufallsgröße besonders gut angepaßt!

Durch Umstellen gewinnt man aus der letzten Gleichung

Satz 207.1: Verschiebungssatz.

$$\operatorname{Var}X = \mathscr{E}[(X-a)^2] - (\mathscr{E}X - a)^2$$

Für den Fall $a = 0$ liefert Satz 207.1 die versprochene einfache Berechnungsmöglichkeit für die Varianz einer Zufallsgröße. Es gilt dann nämlich

Satz 207.2: $\operatorname{Var}X = \mathscr{E}(X^2) - (\mathscr{E}X)^2 = \mathscr{E}(X^2) - \mu^2$

Die Berechnung von $\operatorname{Var}X$ nach Satz 207.2 ist meist dann günstig, wenn X ganzzahlige Werte annimmt, $\mathscr{E}X$ jedoch nicht ganzzahlig ist. So ist es beim chuck-a-luck, für das wir nochmals $\operatorname{Var}X$ berechnen; man vergleiche damit die Berechnung auf Seite 181.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}X &= 1\cdot\tfrac{200}{216}+4\cdot\tfrac{15}{216}+9\cdot\tfrac{1}{216}-(-\tfrac{17}{216})^2 = \\ &= \frac{269\cdot 216-289}{216^2} = \\ &= \frac{57\,815}{46\,656} \approx \\ &\approx 1{,}24.\end{aligned}$$

Die Sätze 204.1 bis 205.2 zeigten einige wichtige Eigenschaften der Erwartung auf. Welche analogen Eigenschaften gelten für die Varianz?

Eine konstante Zufallsgröße nimmt einen einzigen Wert a an, der auch ihr Mittelwert ist. Die Abweichungen davon sind also 0; daher ist auch das mittlere Abweichungsquadrat 0.

Addiert man zu jedem Wert einer Zufallsgröße X die Konstante 3, so wird der Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion von X (bzw. das Stabdiagramm oder das Histogramm) um 3 nach rechts verschoben. Es ist anschaulich klar, daß in der verschobenen Verteilung das mittlere Abweichungsquadrat bezüglich des verschobenen Erwartungswertes $\mu + 3$ genauso groß ist wie das mittlere Abweichungsquadrat in der ursprünglichen Verteilung bezüglich des ursprünglichen Erwartungswertes μ. Man vermutet, daß $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X$ allgemein gilt. Verdreifacht man hingegen jeden Wert einer Zufallsgröße X, so ist klar, daß auch jede Abweichung verdreifacht wird. Damit wird jedes Abweichungsquadrat verneunfacht, also auch das mittlere Abweichungsquadrat. Man vermutet, daß $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$ allgemein gilt.
Wir beweisen

Satz 208.1: Für jede Zufallsgröße X und jede Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $\operatorname{Var} a = 0$
(2) $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X$
(3) $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$

Beweis: Mit Hilfe von Satz 204.1 erhält man

(1) $\operatorname{Var} a = \mathscr{E}[(a - \mathscr{E} a)^2] = \mathscr{E}[(a - a)^2] = \mathscr{E} 0 = 0.$

(2)
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X + a) &= \mathscr{E}([(X + a) - \mathscr{E}(X + a)]^2) = \\ &= \mathscr{E}([X + a - \mathscr{E} X - a]^2) = \\ &= \mathscr{E}([X - \mathscr{E} X]^2) = \\ &= \operatorname{Var} X.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(aX) &= \mathscr{E}([aX - \mathscr{E}(aX)]^2) = \\ &= \mathscr{E}([aX - a\mathscr{E} X]^2) = \\ &= \mathscr{E}(a^2[X - \mathscr{E} X]^2) = \\ &= a^2 \mathscr{E}([X - \mathscr{E} X]^2) = \\ &= a^2 \cdot \operatorname{Var} X.\end{aligned}$$

Satz 208.1 zeigt einerseits, daß die Varianz im Gegensatz zur Erwartung keine lineare Funktion sein kann, andererseits, daß $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} a$ gilt. Man könnte also vermuten, daß wenigstens der Varianzwert einer Summe von Zufallsgrößen gleich der Summe der Varianzwerte dieser Zufallsgrößen ist. Unter der einschränkenden Bedingung der Unabhängigkeit gilt tatsächlich

Satz 208.2: Sind X und Y stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt
$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y.$$

Beweis: Wir setzen $\mu := \mathscr{E} X$ und $\nu := \mathscr{E} Y$ und berechnen damit unter Verwendung der Sätze 204.1 und 204.2:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X+Y) &= \mathscr{E}([(X+Y)-\mathscr{E}(X+Y)]^2) = \\ &= \mathscr{E}([X+Y-\mu-\nu]^2) = \\ &= \mathscr{E}([(X-\mu)+(Y-\nu)]^2) = \\ &= \mathscr{E}[(X-\mu)^2+(Y-\nu)^2+2(X-\mu)(Y-\nu)] = \\ &= \mathscr{E}[(X-\mu)^2]+\mathscr{E}[(Y-\nu)^2]+2\mathscr{E}[(X-\mu)(Y-\nu)] = \\ &= \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y+2\mathscr{E}[(X-\mu)(Y-\nu)].\end{aligned}$$

Aus Aufgabe 214/**15** folgt, daß mit X und Y auch $X-\mu$ und $Y-\nu$ stochastisch unabhängig sind. Wir können also auf den letzten Summanden Satz 205.2 anwenden und erhalten

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y+2\mathscr{E}(X-\mu)\cdot\mathscr{E}(Y-\nu),$$

woraus man, wieder unter Benützung von Satz 204.1,

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y+2(\mathscr{E}X-\mu)\cdot(\mathscr{E}Y-\nu)$$

erhält. Da die beiden Faktoren des letzten Summanden den Wert 0 haben, ist die Behauptung bewiesen.

Satz 208.2 wird mit Vorteil angewendet, wenn es gelingt, eine Zufallsgröße als Summe von zwei unabhängigen einfacheren Zufallsgrößen darzustellen. Dann läßt sich nämlich ihre Varianz aus der Varianz der Summanden berechnen, ohne daß man die meist komplizierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe zu kennen braucht. So kann man z.B. die Varianz der »Augensumme beim Doppelwurf« als Summe der Varianzen der unabhängigen Zufallsgrößen »Augenzahl beim i-ten Wurf« ($i = 1, 2$) einfacher als durch Rückgriff auf ihre Definition (vgl. Aufgabe 194/**45**) berechnen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\mathit{Augensumme}) &= \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y = 2\cdot\operatorname{Var}X = \\ &= 2\cdot\mathscr{E}[(X-3{,}5)^2] = \\ &= 2\cdot\tfrac{1}{6}\cdot(2{,}5^2+1{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2+1{,}5^2+2{,}5^2) = \\ &= \tfrac{2}{3}\cdot(6{,}25+2{,}25+0{,}25) = \\ &= \tfrac{35}{6}.\end{aligned}$$

Die Behauptung von Satz 208.2 läßt sich auf mehr als 2 Zufallsgrößen erweitern. Als Voraussetzung genügt dabei aber schon die paarweise Unabhängigkeit der auftretenden Summanden. 1853 bewies *Irénée-Jules Bienaymé* (1796–1878)

Satz 209.1: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ stochastisch *paarweise unabhängige* Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann ist die Varianz der Summe dieser Zufallsgrößen gleich der Summe ihrer Varianzen:

$$\operatorname{Var}(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \operatorname{Var}X_1+\operatorname{Var}X_2+\ldots+\operatorname{Var}X_n,$$

kurz: $$\operatorname{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}X_i.$$

Beweis: Unter Verwendung von $\mu_i := \mathscr{E} X_i$ ergibt sich mit Satz 204.1 und Satz 205.1

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathscr{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]^2\right) = \\
&= \mathscr{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\right]^2\right) = \\
&= \mathscr{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)\right]^2\right) = \\
&= \mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} (X_i - \mu_i) \cdot (X_j - \mu_j)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}[(X_i - \mu_i)^2] + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} \mathscr{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)].
\end{aligned}$$

Aus Aufgabe 214/**15** folgt, daß mit den X_i auch die Zufallsgrößen $X_i - \mu_i$ paarweise unabhängig sind. Nach Satz 205.2 läßt sich der 2. Term umformen, und man erhält

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} \mathscr{E}(X_i - \mu_i) \cdot \mathscr{E}(X_j - \mu_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} (\mathscr{E} X_i - \mu_i) \cdot (\mathscr{E} X_j - \mu_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i .
\end{aligned}$$

Für die Aussage von Satz 205.2 über den Erwartungswert des Produkts zweier Zufallsgrößen mußte die Unabhängigkeit dieser Zufallsgrößen vorausgesetzt werden. Die komplizierte Maßzahl Varianzwert benötigt diese Voraussetzung bereits beim Satz über die Summe (Satz 208.2). Die Unabhängigkeit reicht als Voraussetzung nicht mehr aus, wenn man einen zu Satz 205.2 analogen Satz über die Varianz des Produkts zweier Zufallsgrößen aufstellen will; dies zeigt das folgende

Beispiel: Eine L-Münze werde zweimal geworfen. Die Zufallsgrößen X und Y beschreiben die Ausfälle des 1. bzw. des 2. Wurfs. Dabei werde eine 1 notiert, falls Adler fällt, sonst eine 0. Dann gilt:

x	0	1
$W_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	0	1
$W_Y(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\mathscr{E} X = \mathscr{E} Y = \frac{1}{2}$.

$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = \frac{1}{4}$.

Für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $W_{X,Y}$ erhält man:

$y \backslash x$	0	1	$W_Y(y)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$W_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Die $W_{X,Y}$-Tabelle ist eine Produkttafel der Randwahrscheinlichkeiten, also sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen.
Für das Produkt $X \cdot Y$ gilt:

$x \cdot y$	0	1
$W_{X \cdot Y}(x \cdot y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \frac{1}{4} = \mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y$.

$\operatorname{Var}(X \cdot Y) = \mathscr{E}[(X \cdot Y)^2] - [\mathscr{E}(X \cdot Y)]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

Dagegen ist $\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

12.4.3. Zusammenfassung

In den beiden vorausgehenden Abschnitten **12.4.1.** und **12.4.2.** wurde eine Reihe von Sätzen über Erwartung und Varianz von Zufallsgrößen bewiesen, die wir in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammenstellen wollen. Dabei geben wir zusätzlich die entsprechenden Sätze für die Standardabweichung σ an.

$a, b \in \mathbb{R}$		
Erwartung $\mathscr{E}$	Varianz Var	Standardabweichung σ
$\mathscr{E}a = a$ $\mathscr{E}(X + a) = \mathscr{E}X + a$ $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$ $\mathscr{E}(X + Y) = \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y$ $\mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}X_i$ $\mathscr{E}$ ist eine lineare Funktion, d. h., $\mathscr{E}(aX + bY) = a\mathscr{E}X + b\mathscr{E}Y$	$\operatorname{Var} a = 0$ $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X$ $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$	$\sigma(a) = 0$ $\sigma(X + a) = \sigma(X)$ $\sigma(aX) = \lvert a \rvert \cdot \sigma(X)$
X und Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow$		
$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y$	$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$	$\sigma(X + Y) = \sqrt{\operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y}$ bzw. $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$
Alle X_i paarweise stochastisch unabhängig $\Rightarrow$		
	$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i$	$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i}$ bzw. $\sigma_{\Sigma X_i}^2 = \Sigma \sigma_{X_i}^2$

12.5. Das arithmetische Mittel von Zufallsgrößen

Bei der Messung einer Größe geht heute jedermann von der Vorstellung aus, daß das arithmetische Mittel aus n Einzelmessungen »genauer« ist als eine Einzelmessung*. Jede Einzelmessung ist eine Zufallsgröße X_i, deren Werte die möglichen Meßwerte sind. Wenn sich die Versuchsbedingungen von Messung zu Messung nicht ändern, dann sind die Zufallsgrößen X_i gleichverteilt und stochastisch unabhängig. Sie haben alle den gleichen Erwartungswert μ – das ist der angestrebte Meßwert – und die gleiche Standardabweichung σ – ein Maß für die Genauigkeit der Einzelmessung. Das arithmetische Mittel

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

dieser Zufallsgrößen X_i ist dann wieder eine Zufallsgröße**. Ihr Erwartungswert $\mathscr{E}\bar{X}$ und ihre Varianz $\operatorname{Var}\bar{X}$ lassen sich unter Verwendung der Eigenschaften der Funktionen $\mathscr{E}$ und Var aus μ und σ wie folgt berechnen.

$$\mathscr{E}\bar{X} = \mathscr{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}X_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu;$$

$$\operatorname{Var}\bar{X} = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}X_i = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{n}{n^2} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2,$$

also

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Das arithmetische Mittel $\bar{X}$ zielt also auf denselben Meßwert μ wie jede Einzelmessung X_i; die Genauigkeit der Messung verbessert sich um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Will man also z. B. die Genauigkeit verzehnfachen, d.h., einen Meßwert auf eine Dezimalstelle genauer angeben, so sind mit derselben Versuchsanordnung 100mal soviel Messungen nötig wie zur Bestimmung des zu verbessernden Wertes.
Die obige Rechnung zeigt, daß nicht alle genannten Voraussetzungen über die Zufallsgrößen X_i benötigt werden. Eine genauere Betrachtung der durchgeführten Berechnung gestattet die Formulierung folgender Sätze:

Satz 212.1: Haben n Zufallsgrößen den Erwartungswert μ, dann hat ihr arithmetisches Mittel denselben Erwartungswert.

Satz 212.2: Das $\sqrt{n}$-Gesetz.
Haben n paarweise unabhängige Zufallsgrößen dieselbe Standardabweichung σ, dann hat ihr arithmetisches Mittel die Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

* Obgleich das arithmetische Mittel neben 7 anderen Mitteln bereits den *Pythagoreern* bekannt war, entstand das Vorgehen, das arithmetische Mittel als besten Schätzwert für eine zu messende Größe zu nehmen, erst in der 2. Hälfte des 16. Jh.s in Westeuropa bei der Untersuchung des Erdmagnetismus. Die Astronomie übernahm sehr bald dieses Verfahren. Berühmt wurde es durch seine Anwendung bei der Bestimmung der Erdabplattung 1736/37 durch *Maupertuis* (1698–1759).

** $\bar{X}$ wird gelesen »X quer«. – Oft schreibt man auch genauer $\bar{X}_n$, um auf die Anzahl der beteiligten Zufallsgrößen hinzuweisen.

Aufgaben

Zu 12.1.

1. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsgrößen X und Y sei wie nebenstehend definiert.

   Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und von Y.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0,1	0,05	0,05
1	0,1	0,45	0,25

2. Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. X sei die Anzahl der Adler. Y sei die Nummer des Wurfs, bei dem zum ersten Mal Adler fällt. Y habe den Wert 4, falls dreimal Zahl fällt. Bestimme die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion und gib die Randwahrscheinlichkeiten an.
3. Ein Laplace-Würfel werde 3mal geworfen. Die Zufallsgröße X nehme den Wert 1 an, wenn beim 1. Wurf eine Sechs fällt, sonst den Wert 0. Y nehme den Wert 1 an, wenn mindestens eine Sechs fällt, sonst 0. Z sei die Anzahl der geworfenen Sechsen.
   a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X, Y und Z.
   b) Gib die gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y, von X und Z und von Y und Z an.
4. Von zwei Zufallsgrößen X und Y über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) sei folgendes bekannt:
   X hat die Wertemenge $\{0; 1\}$, die Wertemenge von Y ist $\{1; 2; 3\}$. Außerdem gilt $W_X(0) = 0{,}35$; $W_Y(1) = 0{,}2$; $W_Y(3) = 0{,}45$; $W_{X,Y}(1; 1) = 0{,}1$ und $W_{X,Y}(0; 2) = 0{,}2$.
   Gib die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Marginalwahrscheinlichkeiten an.
5. Aus einer Produktion wird eine Stichprobe von 4 Stück entnommen. Die Zufallsgröße X bedeute die Anzahl der Stücke ohne Defekt, die Zufallsgröße Y bedeute die Anzahl der Stücke in der Probe, die außerdem noch einer besonders scharfen Gütekontrolle standhielten. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsgrößen sei wie nebenstehend definiert.
   a) Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen für X und für Y.
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den 4 Probestücken höchstens 3 gute und darunter höchstens 1 sehr gutes ist?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens 2 Stücke der verschärften Kontrolle standhalten?
   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den 4 Probestücken höchstens 3 gute und darunter mindestens 2 sehr gute sind?

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	0,10	0	0	0	0
1	0,15	0,05	0	0	0
2	0,35	0,10	0,05	0	0
3	0,10	0,03	0,02	0	0
4	0,02	0,02	0,01	0	0

Zu 12.2.

6. Zeige: Die Zufallsgrößen $X_i :=$ »Augenzahl des i-ten Würfels«, $i \in \{1, 2\}$, beim Wurf zweier L-Würfel sind unabhängig.
7. X und Y seien unabhängige Zufallsgrößen mit folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen:

x	1	2	3
$W_X(x)$	0,2	0,3	0,5

y	10	20
$W_Y(y)$	0,2	0,8

   Stelle die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion auf.

8. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion zweier Zufallsgrößen X und Y ist gegeben durch

$x \backslash y$	0	1	2
0	0,04	0,1	0,06
1	0,16	0,4	

a) Bestimme $W_{X,Y}(1;2)$.
b) Bestimme die Randwahrscheinlichkeiten.
c) Sind X und Y unabhängig?

•9. Für das Schafkopfspiel (vgl. Aufgabe 188/**13**) werden folgende Zufallsgrößen definiert:
$A :=$ »Anzahl der Ober im Blatt des Spielers A«
$B :=$ »Anzahl der Ober im Blatt des Spielers B«
a) Berechne $P(A = a \wedge B = b)$.
b) Stelle die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $W_{A,B}$ auf.
c) Berechne zur Kontrolle die Randwahrscheinlichkeitsverteilung W_A und vergleiche sie mit W_X aus Aufgabe 188/**13**.
d) Sind A und B unabhängig?

10. Beweise: Ist eine von zwei Zufallsgrößen konstant, so sind beide unabhängig.

11. Eine Zufallsgröße X ist von sich selber unabhängig. Was läßt sich auf Grund dieser Information über X sagen?

Zu 12.3.

12. In einer Urne liegen vier Kugeln, die mit den Zahlen 0, 1, 2, 3 beschriftet sind. Wir ziehen zweimal je eine Kugel mit Zurücklegen. X sei die Zahl auf der ersten, Y die Zahl auf der zweiten gezogenen Kugel.
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und von Y.
b) Bestimme die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung.
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $A := X + Y$ und zeichne ihr Stabdiagramm.
d) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $B := X \cdot Y$ und zeichne ein Histogramm.
e) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $C := \max(X, Y)$ und zeichne ein Histogramm.
f) Berechne die Erwartungswerte von X, Y, A, B und C.
g) Berechne die Varianzwerte von X, Y, A, B und C.

13. Löse Aufgabe **12** für den Fall, daß die Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden.

•14. a) Wie berechnet sich $W_{X+Y}(a)$ aus den Werten von $W_{X,Y}$?
b) Wie berechnet sich $W_{X+Y}(a)$ aus den Werten von W_X und W_Y, falls X und Y unabhängig sind?
c) Berechne $W_{X+Y}(2)$ für die Zufallsgrößen X und Y aus Aufgabe 213/**1**.
d) Berechne $W_{A+B}(2)$ für die Zufallsgrößen A und B aus Aufgabe 214/**9**. Was bedeutet dieser Wert?

15. Zeige: Sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen, dann sind auch $X + a$ und $Y + b$ unabhängige Zufallsgrößen.

16. X sei die Zufallsgröße »Gewinn« des chuck-a-luck.
a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße $Y := X^2$ auf.
b) Stelle die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y auf.
c) Untersuche, ob die beiden Zufallsgrößen unabhängig sind.

17. Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ mit den Wahrscheinlichkeiten $W(x_i) = p_i > 0$ an. Zeige, daß dann gilt: X und X^2 sind genau dann unabhängig, wenn X^2 konstant ist.

Zu 12.4.1.

18. 3 L-Würfel werden geworfen. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße Augensumme.

19. 8 L-Münzen werden geworfen. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße $Z :=$ Anzahl der oben liegenden Adler.

20. Die Berechnung von $\mathscr{E}X$ kann sehr mühsam sein. Man kann sich aber die Rechnung vereinfachen, indem man einen günstigen Wert a wählt, so daß $\mathscr{E}(X+a)$ leicht zu berechnen ist. Unter Verwendung von Satz 204.1 erhält man für $\mathscr{E}X$ den Ausdruck $\mathscr{E}X = \mathscr{E}(X+a) - a$. Berechne nach diesem Verfahren den Erwartungswert folgender Zufallsgröße:

x	163	164	165	167	168	169	170	173
$W(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

21. **a)** Der Chef einer kleinen Firma hat die Angewohnheit, an seinem Geburtstag auf einen Zettel eine Zahl a aus der Menge der ersten hundert natürlichen Zahlen zu schreiben. Jeder der 30 Betriebsangehörigen versucht diese Zahl zu erraten. Falls es ihm gelingt, erhält er vom Chef 100 DM ausbezahlt. Mit welcher Ausgabe hat der Chef durchschnittlich pro Jahr zu rechnen, falls die Belegschaftsmitglieder jede Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit raten? Ist diese Annahme realistisch?
    b) Mit welcher Ausgabe muß ein Chef rechnen, der 100 Angestellte hat, aber nur 50 DM jedem Erfolgreichen ausbezahlt?
    c) Löse das Problem allgemein, wenn $a \in \{1, 2, \dots, N\}$ ist, die Firma n Angestellte hat und die Erfolgsprämie m DM beträgt.

22. *Das Treize-Spiel**. Die 13 Karten einer Farbe des Bridge werden gut gemischt und der Reihe nach gezogen. Als Treffer wertet man das Ereignis, daß die Nummer der Ziehung mit dem Zahlenwert der Karte übereinstimmt. Wie viele Treffer wird man im Mittel erreichen?

23. Zwei Urnen enthalten jeweils 10 Kugeln, die eine numeriert von 0 bis 9, die andere von 1 bis 10. Man zieht je eine Kugel und bildet das Produkt der gezogenen Zahlen. Wie groß wird dieses Produkt im Mittel sein?

Zu 12.4.2. und 12.4.3.

24. Eine L-Münze wird viermal geworfen. Berechne Erwartungswert und Varianzwert folgender Zufallsgrößen:
    a) $A :=$ Anzahl der Adler **b)** $B :=$ Anzahl der Wappen
    c) $L :=$ Größte Anzahl der direkt aufeinanderfolgenden Adler
    d) $X :=$ Anzahl der Seitenwechsel.

25. Ein L-Würfel wird zweimal geworfen. X sei die Augenzahl des 1. Wurfs, Y die des 2. Wurfs. Berechne Erwartungswert und Varianzwert folgender Zufallsgrößen:
    a) $A := X + 3$ **c)** $C := X + 2Y$ **e)** $E := |X - Y|$
    b) $B := 3X$ **d)** $D := \max(X, Y)$ **f)** $F := \frac{1}{2}(X + Y)$

26. In einer Schachtel befinden sich 20 Perlen, darunter 4 wertvolle rosafarbene. Eine solche Perle koste 12 DM. Ein Besucher darf sich unbesehen 4 Perlen herausnehmen und die rosafarbenen darunter behalten. Dabei werden zwei verschiedene Verfahren angeboten:
    •**a)** Die 4 Perlen werden auf einmal entnommen.

* Siehe Fußnote Seite 68.

:b) Es wird 4mal je eine Perle entnommen. Ist sie nicht rosafarben, dann wird sie vor dem nächsten Zug zurückgelegt.

Berechne jeweils Erwartungswert und Varianzwert der Zufallsgröße »Wert der gewonnenen Perlen«.

27. *Cardano* (1501–1576) konnte bereits den Erwartungswert der Augensumme beim Spiel mit den blinden Würfeln (siehe Aufgabe 191/**29**) berechnen. Mach's ihm nach! – Berechne darüber hinaus die Varianz der Augensumme und vergleiche beide Werte mit denen der Zufallsgröße Augenzahl eines L-Würfels.

28. Beweise: $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}\, X$.

•29. Für unabhängige Zufallsgrößen X und Y gilt $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}\, X + \mathrm{Var}\, Y$. Zeige, daß für die Standardabweichungen unabhängiger Zufallsgrößen nur

$$\sigma(X+Y) \leqq \sigma(X) + \sigma(Y)$$

gilt! Wann trifft die Gleichheit zu?

30. Ein Gerät besteht aus den Bauteilen A und B. Bauteil A fällt mit 20% Wahrscheinlichkeit während eines Jahres aus, Bauteil B unabhängig davon mit 2% Wahrscheinlichkeit. Die Reparatur von A kostet 70 DM, die von B 800 DM.

a) Berechne die mittleren Reparaturkosten für A bzw. B während eines Jahres und die zugehörigen Standardabweichungen.

b) Berechne auf zwei Arten (einmal direkt, einmal unter Verwendung der Ergebnisse aus **a)**) die mittleren Reparaturkosten pro Jahr für das Gerät und die zugehörige Standardabweichung.

31. Berechne unter Verwendung der Sätze 208.1 und 207.2 die Varianz der Zufallsgröße aus Aufgabe 215/**20**.

32. Hat eine Zufallsgröße die Wertemenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und sind alle Wahrscheinlichkeiten $W(x_i) > 0$, dann gilt auch die Umkehrung von Satz 208.1,(1). Formuliere diese Umkehrung und beweise sie.

:33. Die Zufallsgröße X habe folgende Verteilung:

x	0	1	2	3	4
$W(x)$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

a) Bestimme den Erwartungswert μ und den Median m.

b) Zeige: $\mathscr{E}(X-a)^2$ nimmt für $a=\mu$ und $\mathscr{E}(|X-a|)$ nimmt für $a=m$ den kleinsten Wert an.

•34. Berechne beim *Bernoulli-Euler*schen Problem der vertauschten Briefe Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $X :=$ Anzahl der Briefe, die im richtigen Umschlag stecken, ohne die in Aufgabe 121/**80a)** aufgestellte komplizierte Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße zu benützen. Drücke dazu X durch die n Zufallsgrößen X_i aus, die folgendermaßen definiert sind:

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{falls Brief Nr. } i \text{ im Umschlag Nr. } i \text{ steckt;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu 12.5.

35. Die paarweise unabhängigen Zufallsgrößen X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ haben denselben Erwartungswert μ und dieselbe Standardabweichung σ. Berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung des arithmetischen Mittels $\bar{X}$ der Zufallsgrößen X_i für

a) $n = 10, \quad \mu = 1, \quad \sigma = 1;$

b) $n = 10, \quad \mu = 5, \quad \sigma = 3;$

c) $n = 100, \quad \mu = 5, \quad \sigma = 3.$

36. X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sind Kopien einer Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Wie groß muß man n wählen, damit die Standardabweichung des arithmetischen Mittels $\bar{X}$ der Zufallsgrößen X_i höchstens den Wert a hat?
a) $\mu = 0, \quad \sigma = 10, \quad a = 5$; **b)** $\mu = 0, \quad \sigma = 10, \quad a = 1$; **c)** $\mu = 10, \quad \sigma = 1, \quad a = \frac{1}{10}$.

37. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind paarweise unabhängige Zufallsgrößen, die alle den gleichen Erwartungswert μ und die gleiche Standardabweichung σ haben. S_n ist die Summe dieser n Zufallsgrößen, $\bar{X}$ ihr arithmetisches Mittel.
a) Gib die *Tschebyschow*-Ungleichung für S_n und $\bar{X}$ an.
b) Wie groß muß n sein, damit die Sicherheit dafür, daß sich $\bar{X}$ von seinem Erwartungswert um weniger als $t\sigma$ unterscheidet, mindestens 90% beträgt?
c) Löse **b)** für $\mu = 10, \sigma = 2$ und $t = \frac{1}{4}$.

38. Ein Ikosaeder trägt auf jeweils 2 seiner 20 dreieckigen Flächen (Bild 46.1) eine der 10 Zahlen $0, 1, \ldots, 9$. Es werde n-mal geworfen. X_i sei die Augenzahl des i-ten Wurfs.
a) Berechne Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für jedes X_i.
b) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung für die Augensumme S_n nach n Würfen. Was ergibt sich für $n = 10$ und $n = 100$?
c) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung für das arithmetische Mittel $\bar{X}$ der Augenzahlen nach n Würfen. Was ergibt sich für $n = 10$ und für $n = 100$?
d) Schätze mit der *Tschebyschow*-Ungleichung für **1)** 10, **2)** 100 Würfe die Wahrscheinlichkeit ab, daß das arithmetische Mittel der Augenzahlen in $[3; 6]$ bzw. $[4; 7]$ liegt.
e) Löse mit der *Tschebyschow*-Ungleichung: Wie oft muß man das Ikosaeder werfen, um mit höchstens 10% Wahrscheinlichkeit damit rechnen zu müssen, daß das arithmetische Mittel der Augenzahlen von seinem Erwartungswert um mehr als 2 abweicht?

39. In einer Spielbude auf einem Rummelplatz stehen zwei mit 1 und 2 gekennzeichnete Urnen. Urne 1 enthält 1 schwarze und 9 weiße Kugeln, Urne 2 ebenfalls 1 schwarze, aber 999 weiße Kugeln. Der Spieler zahlt an den Budenbesitzer 1 DM und darf dann aus einer der Urnen eine Kugel entnehmen. Zieht er die schwarze Kugel aus Urne 1, so bekommt er 10 DM ausbezahlt, zieht er sie hingegen aus Urne 2, so erhält er 1000 DM. Beim Zug einer weißen Kugel erhält er nichts. Schätze mit Hilfe der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* ab, wie oft der Spieler mit Urne 1 bzw. Urne 2 mindestens spielen muß, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das arithmetische Mittel seiner Gewinne vom Erwartungswert der Zufallsgröße »Gewinn des Spielers bei einem Spiel« um höchstens 1 DM unterscheidet, mindestens 90% beträgt.

40. Eine Firma stellt Geräte her, die aus den Bauteilen A und B bestehen. Langjährige Erfahrungen ergaben, daß im Schnitt bei 100 Geräten 10 Reparaturen des Bauteils A und 5 Reparaturen des Bauteils B pro Jahr anfallen. Die Teile A und B fallen unabhängig voneinander aus. Die Reparaturkosten für A betragen 30 DM, die für B hingegen 50 DM.
a) Es wurden 2000 Geräte verkauft. Welche Reparaturkosten kommen auf die Firma im Garantiejahr zu?
b) Die Firma will sich gegen diese zu erwartenden Reparaturkosten versichern.
1) Welche Kosten pro Gerät muß eine Versicherung im Mittel ansetzen?
2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weichen die Reparaturkosten der 2000 Geräte um mehr als 1000 DM von den zu erwartenden Reparaturkosten ab? (Abschätzung mittels der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*)
3) Die Versicherung ist nur bereit, einen solchen Vertrag abzuschließen, wenn das arithmetische Mittel der anfallenden Reparaturkosten pro Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% (95%; 99%) um höchstens 4 DM vom Erwartungswert abweicht. Wie viele Geräte müssen mindestens in die Versicherung einbezogen werden?