



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

11. Zufallsgrößen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83580](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83580)

11. Zufallsgrößen



Eroten beim Morraspiel – Lukanisch-rotfiguriger Volutenkrater aus Ruvo, Siphosmaler, um 420 v. Chr. – Staatliche Antikensammlungen, München

11. Zufallsgrößen

11.1. Zufallsgrößen und ihr Erwartungswert

11.1.1. Einführendes Beispiel

Auf einem Rummelplatz wird in einer Glücksbude folgendes Spiel angeboten: Der Spieler leistet 1 DM Einsatz, darf eine der Zahlen 1, 2, ..., 6 nennen und dann 3 Würfel werfen. Zeigt mindestens einer der Würfel seine Zahl, so erhält er vom Budenbesitzer den Einsatz zurück und außerdem für jeden Würfel, der diese Zahl zeigt, noch zusätzlich 1 DM. Erscheint seine Zahl nicht, so verfällt der Einsatz. (Ein solches Spiel ist in den USA unter dem Namen *chuck-a-luck** bekannt.) Wir erinnern an die Beziehung

$$\text{GEWINN} = \text{AUSZAHLUNG} \text{ minus } \text{EINSATZ}.$$

Üblicherweise bezeichnet man negativen Gewinn als Verlust. Der Spieler kann also entweder 1 DM verlieren oder 1 DM bzw. 2 DM bzw. 3 DM gewinnen. Natürlich wird sich jeder Spieler dafür interessieren, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Ereignisse eintreten. Um diese Frage zu klären, müssen wir das zugrundeliegende Zufallsexperiment untersuchen. Es handelt sich um einen 3fachen Würfelwurf. Als Ergebnisraum Ω bietet sich die Menge aller Tripel abc an, wobei $1 \leq a, b, c \leq 6$ gilt. Ω enthält also $6^3 = 216$ Elemente. Jedem solchen Ergebnis ist durch die Spielregel eine der Gewinnzahlen 3, 2, 1, -1 zugeordnet. Dadurch ist der Gewinn X als eine Funktion auf dem Ergebnisraum Ω definiert, nämlich

$$X: \omega \mapsto X(\omega); D_X = \Omega;$$

$$\text{Wertemenge} = \{-1, 1, 2, 3\}.$$

Da die Werte der Funktion X vom Zufall bestimmt werden, nennt man X eine **Zufallsgröße auf Ω** **

Um die Wertetabelle dieser Funktion Gewinn X aufstellen zu können, nehmen wir an, daß der Spieler die Sechs als seine Glückszahl gewählt hat. Figur 165.1 veranschaulicht dann diese Funktion X , deren Wertetabelle folgendes Aussehen hat:

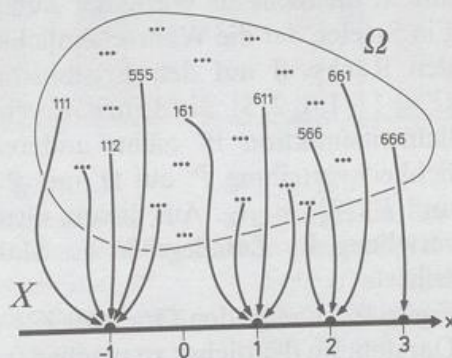


Fig. 165.1 Veranschaulichung der Zufallsgröße X beim *chuck-a-luck*

ω	666	665	664	...	655	654	...	555	554	...	111
$X(\omega)$	3	2	2	...	1	1	...	-1	-1	...	-1

* to chuck = werfen

** Im *Mémoire sur les Probabilités* (1780), veröffentlicht 1781 im Band für 1778 der *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, spricht Laplace von einer *quantité variable*; auf Grund seiner deterministischen Einstellung faßt er sie jedoch nicht als eine Größe auf, die vom Zufall abhängt, wie sie später von Tschebyschow (1821–1894) konzipiert wurde, der aber immer nur von einer *Größe* spricht. [Hinweis von Ivo Schneider:] Erst 1901 führte Pawel Alexejewitsch Nekrassow (a betont, Некрасов, 1853–1924) den Begriff *Zufallsgröße* bzw. *zufällige Variable* ein, den schließlich Alexander Alexandrowitsch Tschuprow (o betont, Чупров, 1874–1926) zum Grundpfeiler aller stochastischen Begriffsbildungen machte. Heute bezeichnet man mit *Zufallsgröße* die reellwertigen zufälligen Variablen.

Die Ereignisse, für die sich der Spieler interessiert, heißen »Der Gewinn X beträgt x DM«, d. h. »Die Zufallsgröße X nimmt den Wert x an« mit $x \in \{-1, 1, 2, 3\}$, was wir kurz schreiben wollen als » $X = x$ «. Die zugehörige Ergebnismenge ist $\{\omega \mid X(\omega) = x\}$. In unserem Falle ergibt sich

- $\gg X = 3 \ll$ = Menge aller Tripel aus Ω , die genau 3 Sechsen enthalten = $\{666\}$,
 $\gg X = 2 \ll$ = Menge aller Tripel aus Ω , die genau 2 Sechsen enthalten =
 = $\{661, 662, \dots, 665, 616, \dots, 566\}$,
 $\gg X = 1 \ll$ = Menge aller Tripel aus Ω , die genau 1 Sechsen enthalten =
 = $\{611, 612, \dots, 161, \dots, 556\}$,
 $\gg X = -1 \ll$ = Menge aller Tripel aus Ω , die keine Sechsen enthalten =
 = $\{111, 112, \dots, 115, \dots, 555\}$.

Da wir annehmen dürfen, daß mit Laplace-Würfeln gespielt wird, erhalten wir für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten die Werte

$$P(X=3) = \frac{1}{216}, \quad P(X=2) = \frac{15}{216}, \quad P(X=1) = \frac{75}{216}, \quad P(X=-1) = \frac{125}{216},$$

was man übersichtlich in folgender Wertetabelle zusammenfassen kann:

Gewinn x	-1	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Durch diese Wertetabelle läßt sich auf ganz \mathbb{R} eine Funktion W definieren, nämlich $W: x \mapsto P(X = x)$, $D_W = \mathbb{R}$, deren Wertemenge dem Intervall $[0; 1]$ angehört. Sie heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsgröße X** .

Die so definierte Wahrscheinlichkeitsfunktion W hat meist den Wert 0, weil für alle x , die nicht als Werte der Zufallsgröße X auftreten, $W(x) = 0$ ist.

Ein Spieler, der die Wahrscheinlichkeiten für die Gewinnzahlen x kennt, braucht den Rückgriff auf den Ergebnisraum Ω der Tripel nicht mehr. Er könnte $\Omega' := \{-1, 1, 2, 3\}$ als seinen Ergebnisraum wählen. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion W nichts anderes als eine (nicht-gleichmäßige) Wahrscheinlichkeitsverteilung P' auf Ω' mit $P'(\{-1\}) = \frac{125}{216}$; $P'(\{1\}) = \frac{75}{216}$; $P'(\{2\}) = \frac{15}{216}$ und $P'(\{3\}) = \frac{1}{216}$. Aus diesem Grunde nennt man W auch **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X** . Man sagt, die Zufallsgröße X ist nach W verteilt.

Figur 167.1 zeigt den Graphen G_W der Wahrscheinlichkeitsfunktion W . Um die Darstellung deutlicher zu machen, wurden auf beiden Achsen verschiedene Maßstäbe gewählt; dennoch ist der optische Eindruck noch recht dürftig. Zur Verbesserung dieses Eindrucks wählt man in der Praxis andere Arten der Veranschaulichung; nämlich das Stabdiagramm und das Histogramm*.

Bei einem **Stabdiagramm** werden die Wahrscheinlichkeiten durch Längen dargestellt, indem man die Ordinaten von G_W als Stäbe zeichnet (Figur 167.2). Bei einem **Histogramm** werden die Wahrscheinlichkeiten durch Rechtecksflächen dargestellt. Man geht dabei folgendermaßen vor:

Über jeder Gewinnzahl wird symmetrisch ein Rechteck errichtet, dessen Flächenmaßzahl gleich der jeweiligen Wahrscheinlichkeit ist. Wählt man als Breite $\Delta x = 1$, so ist die Höhe des Rechtecks gerade die Wahrscheinlichkeit der Gewinnzahl

* *ὁ ἱστός* = das Gewebe. – Graphische Darstellungen führte 1786 William Playfair (1759–1823) in die Statistik ein. Er nannte sie *lineal Arithmetic*.

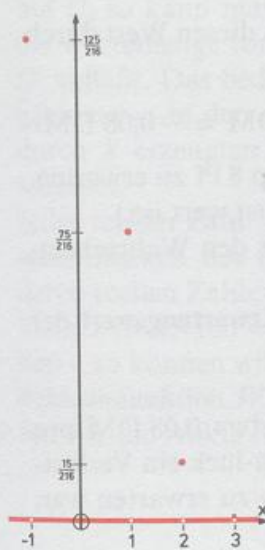


Fig. 167.1
Graph der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck.

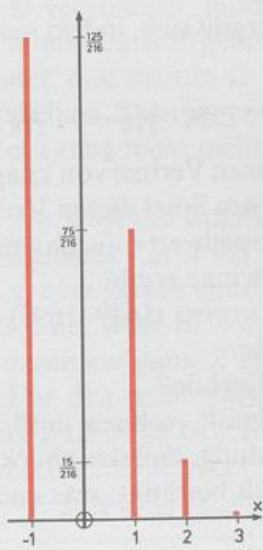


Fig. 167.2
Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck

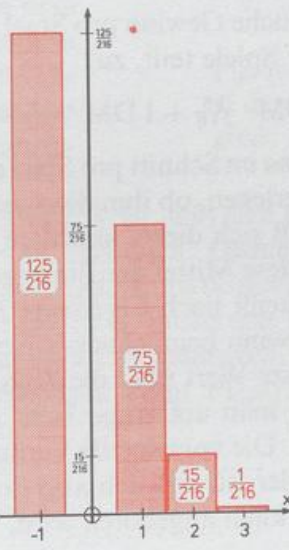


Fig. 167.3
Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck mit $\Delta x = 1$

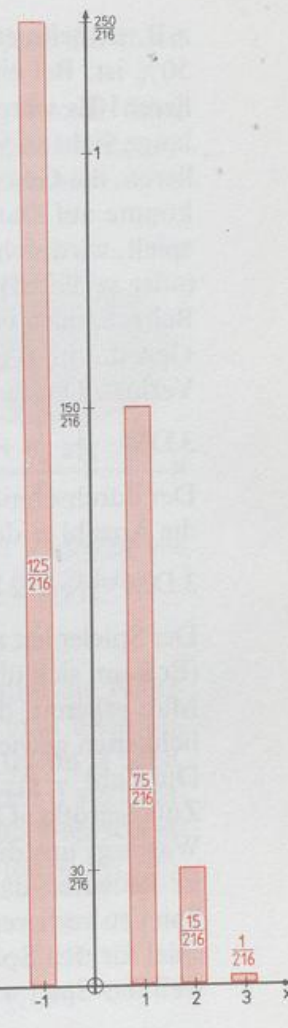


Fig. 167.4
Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck mit $\Delta x = \frac{1}{2}$

(Figur 167.3). Wählt man als Breite $\Delta x = \frac{1}{2}$, so muß man als Rechteckshöhe das Doppelte der Wahrscheinlichkeit der Gewinnzahl wählen (Figur 167.4). Wenn irgend möglich wird man die Breite immer $\Delta x = 1$ wählen. Manchmal muß man jedoch auf andere Breiten ausweichen, wenn man nämlich Überlappungen der Rechtecke vermeiden will. Das wäre z. B. der Fall, wenn statt der Gewinnzahl 2 die Gewinnzahl 2,5 aufgetreten wäre. Auf alle Fälle wird man jedoch die Rechtecksbreiten gleich groß wählen, um einen unmittelbaren Vergleich der Wahrscheinlichkeiten durchführen zu können. Wahrscheinlichkeitsfunktion W , Stabdiagramm und Histogramme zeigen die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die Gewinnzahlen. Man kann daraus

z. B. entnehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust etwas größer als 50% ist. Bei einem einzigen Spiel muß man also damit rechnen, 1 DM zu verlieren! Es wäre jedoch vorschnell, daraus zu schließen, daß das Spiel auch auf lange Sicht zu Verlusten für den Spieler führen müsse. Man kann ja nur 1 DM verlieren, die Gewinne können jedoch 1 DM, 2 DM oder sogar 3 DM betragen. Das könnte auf Dauer einen Ausgleich schaffen. Ein Spieler, der dieses Spiel sehr oft spielt, wird sich dafür interessieren, wieviel Geld er im Mittel pro Spiel gewinnen (oder verlieren) wird. Dazu kann er folgende Überlegung anstellen.

Bei n Spielen erwartet er in $\frac{1}{216} \cdot n$ Fällen 3 DM Gewinn, in $\frac{15}{216} \cdot n$ Fällen 2 DM Gewinn, in $\frac{75}{216} \cdot n$ Fällen 1 DM Gewinn und schließlich in $\frac{125}{216} \cdot n$ Fällen 1 DM Verlust. Der zu erwartende Gesamtgewinn ergibt sich also zu

$$3 \text{ DM} \cdot \frac{1}{216} \cdot n + 2 \text{ DM} \cdot \frac{15}{216} \cdot n + 1 \text{ DM} \cdot \frac{75}{216} \cdot n - 1 \text{ DM} \cdot \frac{125}{216} \cdot n.$$

Der durchschnittliche Gewinn pro Spiel ergibt sich, indem man diesen Wert durch die Anzahl n der Spiele teilt, zu

$$3 \text{ DM} \cdot \frac{1}{216} + 2 \text{ DM} \cdot \frac{15}{216} + 1 \text{ DM} \cdot \frac{75}{216} - 1 \text{ DM} \cdot \frac{125}{216} = -\frac{17}{216} \text{ DM} \approx -0,08 \text{ DM}.$$

Der Spieler hat also im Schnitt pro Spiel einen Verlust von knapp 8 Pf zu erwarten. (Er kann sich überlegen, ob ihm die Lust am Spiel diesen Verlust wert ist.)

Man erkennt, daß sich dieser »mittlere Spielwert« als das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Einzelgewinne ergibt.

Die Zahl $-\frac{17}{216}$ heißt nach *Christiaan Huygens* (1629–1695) **Erwartungswert** der Zufallsgröße »Gewinn beim chuck-a-luck«.

Was sagt uns dieser Wert über die Zufallsgröße?

Er bedeutet, daß man auf lange Sicht damit rechnen muß, etwa 0,08 DM pro Spiel zu verlieren. Die vorschnelle Vermutung, daß das chuck-a-luck ein Verlustspiel für den Spieler ist, hat sich also doch bestätigt, was auch zu erwarten war, weil das Spiel wirklich angeboten wird.

11.1.2. Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Wir wollen nun die im letzten Abschnitt eingeführten Begriffe allgemein definieren.

Definition 168.1: Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlichem Ergebnisraum Ω . Jede Funktion X , die den Ergebnisraum Ω in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen abbildet, heißt **Zufallsgröße** X (auf Ω). Es gilt also:

$$X: \omega \mapsto X(\omega) \quad \text{mit} \quad D_X = \Omega \quad \text{und} \quad X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Wir haben schon viele Zufallsgrößen* kennengelernt, ohne sie »Zufallsgröße« genannt zu haben. Wir erinnern an Augenzahl und Augensumme beim Würfeln oder an die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln beim Ziehen aus einer Urne. Ein weiteres Beispiel einer Zufallsgröße liefert jede Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf Ω vermöge der Zuordnung: $\omega \mapsto X(\omega)$ mit $X(\omega) = P(\{\omega\})$. Auch die relative Häufigkeit ist eine Zufallsgröße. Ein triviales Beispiel einer Zufallsgröße ist eine konstante Zufallsgröße, die für alle $\omega \in \Omega$ den konstanten Wert a

* Statt »Zufallsgröße« sagt man auch »Stochastik«, »zufällige Größe«, »Zufallsvariable« oder »aleatorische Größe«. Siehe auch Fußnote ** auf Seite 165.

annimmt. Man verwendet dann sowohl für die Zufallsgröße als auch für ihren einzigen Funktionswert denselben Buchstaben a .

Jede Zufallsgröße X erzeugt auf natürliche Weise eine Zerlegung von Ω . Eine Komponente dieser Zerlegung ist dabei die Menge derjenigen Ergebnisse ω , denen vermöge X derselbe Funktionswert x zugeordnet wird. Es gilt also:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}.$$

Ω wird demnach in so viele Ereignisse zerlegt, wie es verschiedene Funktionswerte von X gibt (siehe Figur 169.1).

Betrachtet man nur eine einzige Zufallsgröße X auf Ω , so kann man Ω vergrößern, indem man die Wertemenge von X als neuen Ergebnisraum Ω' auffaßt. Das bedeutet, daß man in Ω die Ergebnisse ω in den einzelnen Komponenten der durch X erzeugten Zerlegung nicht mehr unterscheidet.

Jeder reellen Zahl x , die Wert der Zufallsgröße X ist, läßt sich damit die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\omega \mid X(\omega) = x\}$ zuordnen. Ordnet man allen anderen reellen Zahlen x , also gerade denen, die nicht Funktionswerte von X sind, auch $P(\{\omega \mid X(\omega) = x\})$ als Wert zu – was bedeutet, ihnen den Wert 0 zuzuordnen –, so können wir damit auf ganz \mathbb{R} eine Funktion definieren, die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** W . Für den recht schwerfälligen Term $P(\{\omega \mid X(\omega) = x\})$ führen wir die Abkürzung $P(X = x)$ ein, also

$$P(X = x) := P(\{\omega \mid X(\omega) = x\})$$

Damit gewinnen wir

Definition 169.1: Die Funktion $W: x \mapsto P(X = x)$, $D_W = \mathbb{R}$, heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion** der Zufallsgröße X . Man sagt, die Zufallsgröße X ist nach W verteilt.

Auf Grund der Definition von W erkennen wir, daß W eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P' auf dem vergrößerten Ergebnisraum Ω' ist vermöge

$$P'(\{x\}) := P(X = x) = W(x) \text{ für alle } x \in \Omega'.$$

Man nennt daher W auch **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X** , kurz auch **Verteilung der Zufallsgröße X** .

Figur 169.2 zeigt den Zusammenhang zwischen einer Zufallsgröße X und ihrer Wahrscheinlichkeitsfunktion W .

Fig. 169.2 Zusammenhang zwischen einer Zufallsgröße X und ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung W

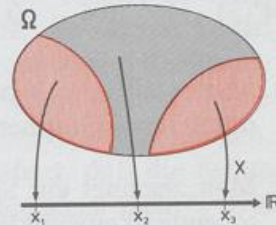
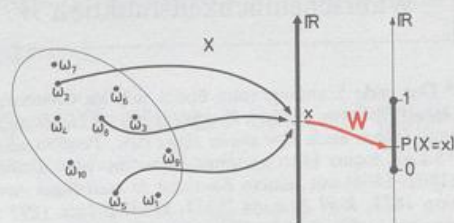


Fig. 169.1 Zerlegung von Ω durch eine Zufallsgröße X



Zur Veranschaulichung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen verwendet man üblicherweise 3 Darstellungen. Wir zeigen sie an Hand einer Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	-1,5	-0,5	0,5	2
$W(x)$	0,4	0,2	0,1	0,3

1. Man stellt die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch ihren Graphen dar wie in Figur 170.1a).
2. Man zeichnet ein Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion wie in Figur 170.1b).*
3. Man verwendet Histogramme (Figur 170.1c), die allgemein wie folgt definiert werden.**

Definition 170.1:

Auf der Zahlengeraden \mathbb{R} werden $m + 1$ Punkte $a_0 < a_1 < \dots < a_m$ so gewählt, daß alle Werte x_1, x_2, \dots, x_n der Zufallsgröße X zwischen a_0 und a_m liegen. Es entstehen die $m + 2$ Intervalle $]-\infty, a_0],]a_0, a_1], \dots,]a_{m-1}, a_m],]a_m, +\infty[$.

Über jedem Intervall $]a_i, a_{i+1}]$ wird ein Rechteck errichtet, dessen Flächenmaßzahl gleich der Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß die Zufallsgröße X Werte aus diesem Intervall $]a_i, a_{i+1}]$ annimmt. Die Rechtecke auf dem ersten Intervall $]-\infty, a_0]$ und auf dem letzten Intervall $]a_m, +\infty[$ haben natürlich die Höhe 0. Rechtecke der Höhe 0 werden nicht gezeichnet. Die sich so ergebende Anordnung von Rechtecken heißt ein **Histogramm** der Zufallsgröße X bzw. der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktion W .

* Das erste Stabdiagramm findet sich im *Commercial and Political Atlas* (1786) von *William Playfair* (1759–1823). Stabdiagramme nannte man früher auch *pipe organ chart* bzw. *Panfötendiagramm*.

** Die ersten Histogramme stammen von *André Michel Guerry* (1802–1866) aus seinem *Essai sur la statistique morale de la France* von 1833. *Karl Pearson* (1857–1933) prägte 1895 das Wort *Histogramm*, wofür man im Deutschen auch *Staffelbild* sagt.

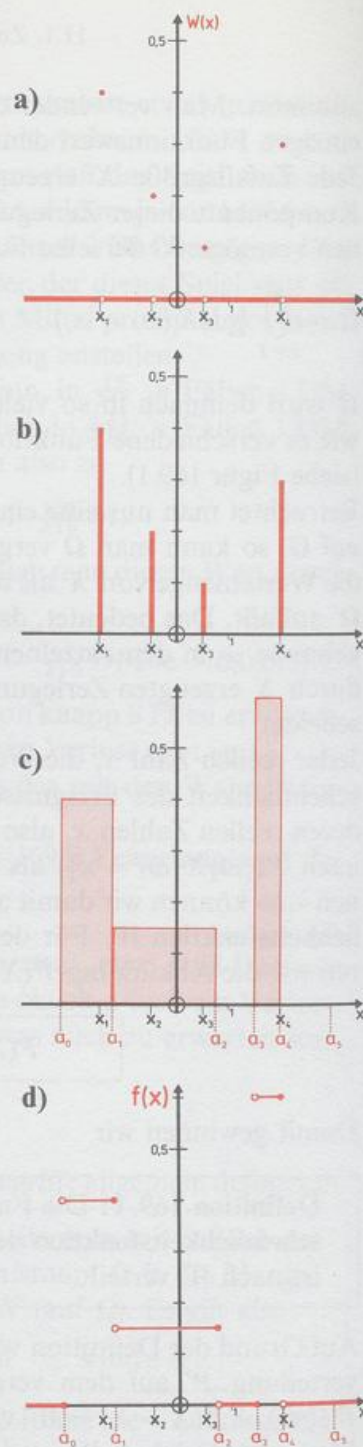


Fig. 170.1

- a) Graph einer Wahrscheinlichkeitsfunktion W
- b) Stabdiagramm von W
- c) Ein Histogramm von W
- d) Graph der zum Histogramm von c) gehörenden Dichtefunktion f

Bemerkungen:

1. Die Flächenmaßzahl eines Rechtecks hat den Wert $P(\{\omega | a_i < X(\omega) \leq a_{i+1}\})$, kurz $P(a_i < X \leq a_{i+1})$.
2. Die Gestalt des Histogramms hängt von der Auswahl der Intervalle ab. Es ist üblich, Intervalle von gleicher Länge (meist 1) zu wählen und sie symmetrisch um die Werte von X anzuordnen. (Vergleiche Figur 167.3 und 167.4.)

Histogramme sind keine Funktionen; man kann aus jedem von ihnen aber einen Funktionsgraphen auf folgende Art gewinnen. Man nimmt die oberen Seiten der Histogrammrechtecke als Stücke des Graphen. Nicht gezeichnete Rechtecke der Höhe 0 ergeben als Graphenstücke dann Teile der x -Achse. Weil aber eine Funktion eindeutig sein muß, müssen wir an den Rechtecksecken noch festlegen, welche Ecke Punkt des Graphen sein soll. Es wird vereinbart, daß die rechte obere Ecke Punkt des Graphen ist, die linke obere Ecke hingegen nicht*. Die so durch diesen Graphen definierte Funktion f ist also linksseitig stetig. Sie heißt **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** der Zufallsgröße X , kurz **Dichtefunktion****. Ihr Term ist sehr kompliziert; es gilt nämlich

$$f(x) := \begin{cases} \frac{P(a_i < X \leq a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i} & \text{für } x \in]a_i; a_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu jedem Histogramm gehört also genau eine Dichtefunktion; siehe Figur 170.1c) und Figur 170.1d).

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße X Werte im Intervall $]a_j; a_k]$ annimmt, ist gleich der Summe der Maßzahlen der Rechtecksflächen über $]a_j; a_k]$. Diese Summe läßt sich mittels der Dichtefunktion f auch als Integral schreiben.

$$\text{Es gilt nämlich: } P(a_j < X \leq a_k) = \int_{a_j}^{a_k} f(x) dx.$$

Diese Beziehung kann dazu dienen, den Namen »Dichtefunktion« plausibel zu machen. Denkt man sich nämlich einen Stab mit der eindimensionalen Dichteverteilung f , so erhält man als Masse zwischen den Punkten a_j und a_k den Wert

$$m = \int_{a_j}^{a_k} f(x) dx.$$

Man beachte also, daß der Funktionswert $f(x)$ der Dichtefunktion f keine Wahrscheinlichkeit darstellt, so wie die Dichte auch keine Masse ist. Nur eine *Fläche* unter der Dichtefunktion f zwischen den Grenzen a_j und a_k liefert uns eine Wahrscheinlichkeit! Es kann sogar vorkommen, daß die Funktionswerte der Dichtefunktion größer als 1 sind – wenn nämlich die Intervallbreiten beim zugehörigen Histogramm klein genug sind. Man vergleiche dazu das Histogramm

$$\text{von Figur 167.4. Dagegen gilt immer } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Beim chuck-a-luck betrachteten wir den mittleren Gewinn pro Spiel auf lange

* Fällt die linke obere Ecke mit der rechten oberen Ecke des vorhergehenden Rechtecks zusammen, so gehöre sie dem Graphen an.

** Merke: Dichtefunktion – linksseitig stetig.

Sicht und nannten ihn den Erwartungswert der Zufallsgröße Gewinn. In Verallgemeinerung definiert man für eine beliebige Zufallsgröße X ihren mittleren Wert pro Versuch auf lange Sicht als ihren Erwartungswert gemäß

Definition 172.1: Die Zufallsgröße X habe die Wertemenge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten seien $W(x_1), W(x_2), \dots, W(x_n)$. Dann heißt die Zahl

$$\mu := \mathcal{E} X := \sum_{i=1}^n x_i W(x_i)$$

Erwartungswert der Zufallsgröße X .

Bemerkungen:

1. Statt $\mathcal{E} X$ schreibt man auch $\mathcal{E}(X)$, vor allem dann, wenn Mißverständnisse zu befürchten sind. \mathcal{E} ist nämlich eine Funktion, die »Erwartung«, durch die der Zufallsgröße X eine reelle Zahl $\mathcal{E} X$ zugeordnet wird. Man unterscheidet also zwischen der Funktion \mathcal{E} und dem Funktionswert $\mathcal{E} X$.
2. Der Erwartungswert einer Zufallsgröße ist das mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtete arithmetische Mittel der Werte der Zufallsgröße,* also **der mittlere Wert der Zufallsgröße pro Versuch auf lange Sicht**. Das Symbol μ soll an diese Bedeutung des Erwartungswerts als Mittelwert erinnern.
3. Der Erwartungswert $\mathcal{E} X$ einer Zufallsgröße X wird im allgemeinen *nicht* dem Wertebereich der Zufallsgröße X angehören! (Beim chuck-a-luck ist $-\frac{17}{216}$ keine Gewinnzahl.)
4. Der Erwartungswert $\mathcal{E} X$ muß nicht einmal in der Nähe des wahrscheinlichsten Wertes der Zufallsgröße X liegen. (Vgl. Aufgabe 188/15.)
5. Die Zahl $\mathcal{E} X$ kann auch physikalisch gedeutet werden. Denkt man sich auf einem masselosen Stab an den Stellen x_i die Massen $W(x_i)$ angebracht, so stellt $\mathcal{E} X$ die Koordinate des Massenschwerpunkts dar.*
6. Wegen $W(x_i) = \sum_{X(\omega)=x_i} P(\{\omega\})$ läßt sich $\mathcal{E} X$ folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{E} X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

Mit dem Erwartungswert des Gewinns als »Wert des Spiels« schuf *Christiaan Huygens* (1629–1695) den ersten wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriff, der lange Zeit auch der einzige blieb, mit dem Aufgaben über Spiele gelöst werden konnten. *Huygens* beginnt seine Abhandlung *van reeckening in speelen van geluck* (1657) mit 3 Sätzen über den Erwartungswert, für den er noch keinen Fachausdruck hatte. Er umschreibt ihn mit

“Het is my soo veel weerdt” – »Das ist mir soviel wert«,

was *Frans van Schooten* (um 1615–1660) kurz mit *expectatio mea* und *valor expectationis meae* ins Lateinische übersetzt.

* Diese Interpretation gab *Nikolaus Bernoulli* (1687–1759) in *De usu artis conjectandi in jure* 1709.

Wie sehr diese Wortschöpfung damals und auch heute noch der Umgangssprache widerspricht, zeigt sich in der Erklärung, die *Jakob Bernoulli* (1655–1705) in seiner *Ars Conjectandi* (1713) der *Huygensschen* Definition beifügt:

»Aus dem Gesagten ist zu entnehmen, daß das Wort *Erwartung* nicht nur in dem gewöhnlichen Sinne zu nehmen ist, in dem wir üblicherweise das erwarten oder hoffen, was für uns das Allerbeste ist; es kann vielmehr auch den Sinn haben, daß Schlimmeres uns zufällt. Erwartung bedeutet also unsere Hoffnung, das Beste zu gewinnen, soweit diese nicht durch die Furcht, Ungünstigeres zu erzielen, gemäßigt und verkleinert wird, und zwar in dem Maße, daß mit Wert der Erwartung immer das Mittel aus dem Besten, das wir erhoffen, und dem Schlimmsten, das wir befürchten, bezeichnet wird.«

In der französischen Literatur hat sich daher neben *espérance mathématique* auch *valeur moyenne* und in der englischen neben *expected value* auch *mean value* für Erwartungswert eingebürgert.

Zur Illustration des Begriffs *Erwartungswert* führen wir nun 3 Beispiele vor.

Beispiel 1: Die Zufallsgröße »Augenzahl« beim einfachen Wurf eines Laplace-Würfels hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

x	1	2	3	4	5	6
$W(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{E}X = \mu &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{21}{6} = \\ &= 3,5. \end{aligned}$$

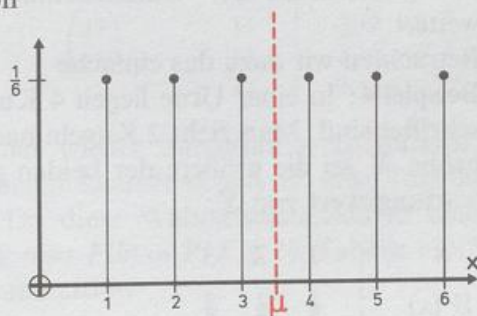


Fig. 173.1 Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße »Augenzahl« eines Laplace-Würfels mit Erwartungswert μ

Beispiel 2: Die Zufallsgröße »Augensumme« beim Wurf zweier Laplace-Würfel hat, wie Bild 26.2 veranschaulicht, die Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{E}X = \mu &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \\ &+ 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + \\ &+ 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + \\ &+ 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \\ &= \frac{252}{36} = \\ &= 7. \end{aligned}$$

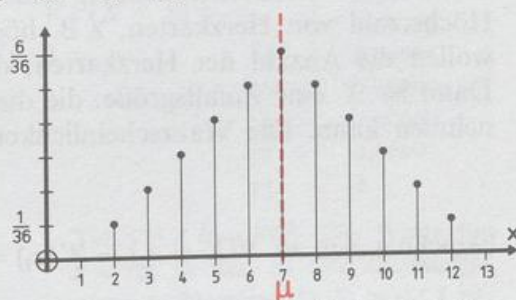


Fig. 173.2 Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße »Augensumme« beim Doppelwurf mit Erwartungswert μ

Beispiel 3: Die Zufallsgröße »Quadrat der Augenzahl« beim einfachen Wurf eines Laplace-Würfels hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	1	4	9	16	25	36
$W(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{E}X = \mu &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{91}{6} = \\ &= 15\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

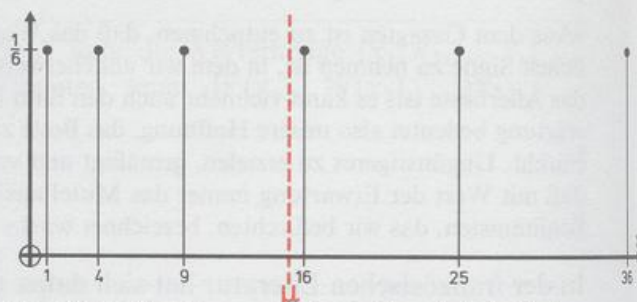


Fig. 174.1 Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße »Quadrat der Augenzahl« eines Laplace-Würfels mit Erwartungswert μ

Die Berechnung des Erwartungswerts wird besonders übersichtlich, wenn man die Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung um die Zeile $xW(x)$ erweitert.

Betrachten wir dazu das einfache

Beispiel 4: In einer Urne liegen 4 Kugeln, die mit den Zahlen 0, 1, 2 und 3 beschriftet sind. Man zieht 2 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen. Die Zufallsgröße X sei die größere der beiden gezogenen Zahlen. Wir berechnen den Erwartungswert von X :

x	1	2	3
$W(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
$xW(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$

$\Rightarrow \mathcal{E}X = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$.

11.2. Die kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße

Einführendes Beispiel: Die 52 Karten des Bridgespiels werden auf 4 Spieler verteilt. Theodor hat dabei keine Herzkarte erhalten. Nun interessiert er sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit seine Spielgegnerin Dorothea eine bestimmte Höchstzahl von Herzkarten, z.B. höchstens 8 Herzkarten, erhalten hat. Wir wollen die Anzahl der Herzkarten, die Dorothea erhält, mit X bezeichnen. Dann ist X eine Zufallsgröße, die die Werte $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{14} = 13$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie den Wert x_i annimmt,

$$\text{berechnet sich zu } P(X = x_i) = W(x_i) = \frac{\binom{13}{x_i} \binom{26}{13-x_i}}{\binom{39}{13}}. \text{ Die Werte der Wahr-}$$

scheinlichkeitsfunktion W sind in Tabelle 175.1 wiedergegeben. Theodor interessiert sich also für Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse » X ist höchstens so

groß wie b «, z. B. » X ist höchstens so groß wie 8«. Für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse schreiben wir kurz $P(X \leq b)$, im Beispiel $P(X \leq 8)$. Kennt Theodor die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X , z. B. aus Tabelle 175.1, so kann er die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 8)$ als Summe berechnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= P(X = 0 \cup X = 1 \cup \dots \cup X = 8) = \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 8) = \\ &= W(x_1) + W(x_2) + \dots + W(x_9) = \\ &= \sum_{x_i \leq 8} W(x_i) = \\ &= 0,99859. \end{aligned}$$

$$\text{Tab. 175.1 } x \mapsto \frac{\binom{13}{x} \binom{26}{13-x}}{\binom{39}{13}}$$

x	$W(x)$
0	0,00128
1	0,01546
2	0,07420
3	0,18703
4	0,27505
5	0,24754
6	0,13897
7	0,04864
8	0,01042
9	0,00132
10	0,00009
11	$3,12 \cdot 10^{-6}$
12	$4,16 \cdot 10^{-8}$
13	$1,23 \cdot 10^{-10}$

Um die lästigen Summationen nicht immer wieder durchführen zu müssen, stellt sich Theodor mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion W eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq b)$ auf. Da diese Wahrscheinlichkeiten eine Funktion von b sind, nennt er sie kurz $F(b)$; also $F(b) := P(X \leq b)$. Tabelle 175.2 zeigt uns die von Theodor durchgeführte Summation.

Auch beim darauffolgenden Spiel hat Theodor keine Herzkarte erhalten. Nun möchte er aber die Wahrscheinlichkeit dafür wissen, daß Dorothea mehr als a Herzkarten, aber höchstens b Herzkarten erhalten hat, kurz $P(a < X \leq b)$. Nehmen wir für $a = 3$ und $b = 8$, so ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 8) &= P(X = 4 \cup X = 5 \cup \dots \cup X = 8) = \\ &= P(X = 4) + P(X = 5) + \dots + P(X = 8) = \\ &= W(x_5) + W(x_6) + \dots + W(x_9) = \\ &= \sum_{3 < x_i \leq 8} W(x_i) = \\ &= 0,72062. \end{aligned}$$

b	$F(b)$
0	0,00128
1	0,01674
2	0,09094
3	0,27797
4	0,55302
5	0,80056
6	0,93953
7	0,98817
8	0,99859
9	0,99991
10	1,00000
11	1,00000
12	1,00000
13	1

Tab. 175.2 $b \mapsto F(b)$. Die Werte für $b = 10, 11$ und 12 sind Rundungswerte, wohingegen $F(13)$ exakt 1 ist.

Wahrscheinlichkeiten dieser Art kann Theodor, statt umständlich zu summieren, leichter mit Hilfe seiner Tabelle 175.2 » $b \mapsto F(b)$ « berechnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
 P(3 < X \leq 8) &= \sum_{3 < x_i \leq 8} W(x_i) = \\
 &= \sum_{x_i \leq 8} W(x_i) - \sum_{x_i \leq 3} W(x_i) = \\
 &= P(X \leq 8) - P(X \leq 3) = \\
 &= F(8) - F(3).
 \end{aligned}$$

Allgemein erhält man

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Die Summation vieler Summanden reduziert sich also bei Verwendung der Funktion F auf die Bildung der Differenz zweier Tabellenwerte dieser Funktion.

So wie im vorstehenden Beispiel sind bei vielen Zufallsgrößen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen der Form » $a < X \leq b$ « von Bedeutung. Man wird daher, ergänzend zur Wahrscheinlichkeitsfunktion W einer Zufallsgröße X , auf ganz \mathbb{R} eine weitere Funktion F definieren, die die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse » $X \leq b$ « liefert. Man nennt F kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X und legt sie folgendermaßen allgemein fest:

Definition 176.1: Die Funktion

$$F: x \mapsto P(X \leq x), D_F = \mathbb{R}$$

heißt **kumulative Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X .

Die Beifügung »kumulativ«* weist darauf hin, daß der Wert $F(x)$ durch Aufhäufen, d. h. durch Summieren der Wahrscheinlichkeiten für alle Werte x_i , die höchstens so groß wie x sind, gewonnen wird. Manche Autoren unterdrücken die Beifügung »kumulativ« und nennen F kurz »Verteilungsfunktion der Zufallsgröße«.

Zur Berechnung der Werte der kumulativen Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße merken wir uns

Satz 176.1: Hat die Zufallsgröße X die Wertemenge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, so berechnet man $F(x)$ gemäß

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} W(x_i).$$

Funktionsterm und Graph einer kumulativen Verteilungsfunktion veranschaulicht das einfache

Beispiel: X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung W

gemäß	x	-1,5	-0,5	0,5	2
	$W(x)$	0,4	0,2	0,1	0,3

Figur 170.1 a) zeigt den Graphen von W . Für die kumulative Verteilungsfunktion F dieser Zufallsgröße X ergibt sich

* cumulus = aufgehäuft, aufgetürmt, aufgeschichtet.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x < -1,5 \\ 0,4 & \text{für } -1,5 \leq x < -0,5 \\ 0,6 & \text{für } -0,5 \leq x < 0,5 \\ 0,7 & \text{für } 0,5 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion F ist in Figur 177.1 dargestellt. Sie zeigt besonders anschaulich, wie durch »Aufhäufen« der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $W(x_i)$ der Graph von F entsteht.

Die erste graphische Darstellung einer kumulativen Verteilungsfunktion, und zwar von relativen Häufigkeiten, stammt von *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (1768 bis 1830) aus dem Jahre 1821.

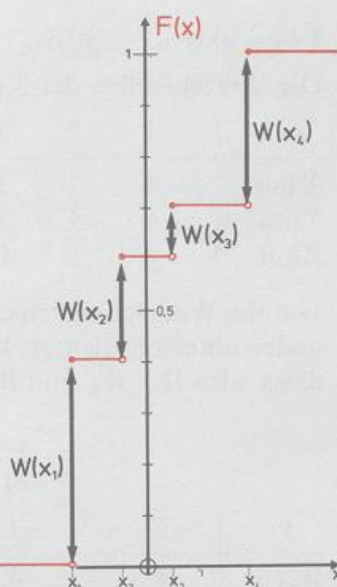


Fig. 177.1 Kumulative Verteilungsfunktion F zur Wahrscheinlichkeitsfunktion W von Figur 170.1.

Abschließend stellen wir einige Eigenschaften von kumulativen Verteilungsfunktionen zusammen, die sich unmittelbar aus Definition 176.1 ergeben.

Satz 177.1:

Ist F kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X , so gilt

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- 3) F ist monoton wachsend auf \mathbb{R} .
- 4) F ist rechtsseitig stetig*, d. h., $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$.
- 5) Nimmt die Zufallsgröße X einen Wert x_i mit der Wahrscheinlichkeit $W(x_i) \neq 0$ an, so springt der Graph von F bei x_i um $W(x_i)$ nach oben; F ist also bei x_i unstetig.
- 6) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

11.3. Funktionen einer Zufallsgröße

Beispiel: Beim einfachen Würfelwurf werden folgende Gewinnpläne vereinbart:
Plan 1: Von der doppelten Augenzahl wird 7 subtrahiert; die so erhaltene Zahl stellt den Gewinn in DM dar.

Plan 2: Von der Augenzahl wird 3 subtrahiert und das Ergebnis quadriert. Die so erhaltene Zahl stellt den Gewinn in DM dar.

Bezeichnen wir die Zufallsgröße »Augenzahl« mit X , so lassen sich die durch die beiden Gewinnpläne definierten Zufallsgrößen »Gewinn Y « bzw. »Gewinn Z « mit Hilfe von X folgendermaßen ausdrücken:

* Merke: Verteilungsfunktion – rechtsseitig stetig.

$$Y := 2 \cdot X - 7 \quad \text{bzw.} \quad Z := (X - 3)^2.$$

Die Wertetabellen der 3 Funktionen X , Y und Z lauten:

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$Y(\omega)$	-5	-3	-1	1	3	5
$Z(\omega)$	4	1	0	1	4	9

Um die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsgrößen X , Y und Z voneinander unterscheiden zu können, kennzeichnen wir sie durch entsprechende Indizes, also W_X , W_Y und W_Z . Für sie ergeben sich folgende Wertetabellen:

	x	1	2	3	4	5	6					
	$W_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$					
y	-5	-3	-1	1	3	5		z	0	1	4	9
$W_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$W_Z(z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Wir ersehen aus den obigen Tabellen, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung W_X der Zufallsgröße X gleichmäßig ist, d. h., alle ihre Werte haben die gleiche Wahrscheinlichkeit. Auch $Y = 2X - 7$ ist eine gleichmäßig verteilte Zufallsgröße, wohingegen $Z = (X - 3)^2$ nicht mehr gleichmäßig verteilt ist!

Die Zufallsgrößen Y und Z können wir mathematisch als Verkettung der reellwertigen Funktion X mit den Funktionen $g: x \mapsto 2x - 7$ bzw. $h: x \mapsto (x - 3)^2$ auffassen; es gilt nämlich $Y = g \circ X$ und $Z = h \circ X$.

Allgemein kann man sagen: Da jede Zufallsgröße X eine reellwertige Funktion ist, läßt sie sich mit einer beliebigen reellen Funktion g , deren Definitionsmenge die Wertemenge von X enthält, verketteten. Das Ergebnis der Verkettung ist eine neue Zufallsgröße Y ; für sie gilt

$$Y(\omega) = (g \circ X)(\omega) := g(X(\omega)).$$

Als Verkettungsfunktionen können natürlich auch transzendente Funktionen wie \sin , \exp und \ln auftreten.

Zur Berechnung des Erwartungswerts der Zufallsgröße $Y := g \circ X$ ist es nicht nötig, die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y zu kennen. Es gilt nämlich

Satz 178.1: Besitzt die Zufallsgröße X die Wertemenge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung W , so gilt für den Erwartungswert der Zufallsgröße $g \circ X$:

$$\mathcal{E}[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i)W(x_i)$$

Beweis: Das X zugrundeliegende Zufallsexperiment habe die Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$. Dann gilt auf Grund von Bemerkung 6 (Seite 172):

$$\mathcal{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^N g(X(\omega_k))P(\{\omega_k\}).$$

Fassen wir alle Summanden zusammen, für die $X(\omega_k) = x_i$ gilt, so erhalten wir wegen $W(x_i) = \sum_{X(\omega_k)=x_i} P(\{\omega_k\})$ die Behauptung:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[g(X)] &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{X(\omega_k)=x_i} g(x_i) P(\{\omega_k\}) \right) = \sum_{i=1}^n \left(g(x_i) \cdot \sum_{X(\omega_k)=x_i} P(\{\omega_k\}) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_i) W(x_i). \end{aligned}$$

Beispiel: Bei Kenntnis von W_Z errechnet man unmittelbar

$$\mathcal{E}(Z) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{19}{6}.$$

Mit Satz 178.1 erhält man *ohne* Kenntnis von W_Z

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(h(X)) &= (1-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ (5-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

11.4. Die Varianz einer Zufallsgröße

Eine Zufallsgröße wird durch ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion weitgehend beschrieben. Für viele Zwecke genügt es sogar, nur über Parameter, die das Aussehen der Wahrscheinlichkeitsfunktion kennzeichnen, Bescheid zu wissen. Ein solcher Parameter ist der Erwartungswert einer Zufallsgröße; er gibt ihren »mittleren Wert« an. Er sagt jedoch nichts darüber aus, wie die einzelnen Funktionswerte der Zufallsgröße um diesen mittleren Wert streuen. Man wird also versuchen, die »mittlere Abweichung« der Funktionswerte von ihrem Erwartungswert durch eine Maßzahl zu kennzeichnen. Dafür bietet sich $\mathcal{E}(X - \mu)$ an.

$Y := X - \mu$ ist eine neue Zufallsgröße »Abweichung vom Erwartungswert μ «. Für sie gilt unter Verwendung von Satz 178.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X - \mu) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) W(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i W(x_i) - \mu \cdot \sum_{i=1}^n W(x_i) = \\ &= \mathcal{E} X - \mu \cdot 1 = \mu - \mu = 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis sollte nicht überraschen!

$\mathcal{E}(X - \mu)$ ist also ein untaugliches Maß. Da ja nur die Größe der Abweichungen und nicht ihre Richtung interessiert, könnte man $\mathcal{E}(|X - \mu|)$ als Maß wählen. Wegen der Unhandlichkeit des Absolutbetrags wählt man jedoch statt dessen $\mathcal{E}[(X - \mu)^2]$ als Abweichungsmaß. Das Quadrat sorgt dafür, daß die Richtung der Abweichung keine Rolle spielt. Darüber hinaus fallen Abweichungen um so stärker ins Gewicht, je größer sie sind. Es gibt selbstverständlich auch noch andere Funktionen der Abweichung $X - \mu$, die als Maß für das »Streuen der Werte der Zufallsgröße« verwendet werden könnten. Die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert μ , also $\mathcal{E}[(X - \mu)^2]$ hat sich jedoch als besonders brauchbar erwiesen.

Definition 180.1: μ sei der Erwartungswert der Zufallsgröße X . Als **Varianz** $\text{Var } X$ der Zufallsgröße X definiert man den Erwartungswert der quadratischen Abweichungen von μ , also

$$\text{Var } X := \mathcal{E}[(X - \mu)^2] = \mathcal{E}[(X - \mathcal{E} X)^2].$$

Wegen Satz 178.1 kann $\text{Var } X$, ohne die Verteilung von $(X - \mathcal{E} X)^2$ zu kennen, über die Wahrscheinlichkeitsverteilung W von X berechnet werden:

$$\text{Var } X = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 W(x_i)$$

Bemerkungen:

1. Statt $\text{Var } X$ schreibt man auch $\text{Var}(X)$, vor allem dann, wenn Mißverständnisse zu befürchten sind. Var ist nämlich eine Funktion, die »Varianz«, durch die der Zufallsgröße X eine nicht-negative reelle Zahl $\text{Var } X$ zugeordnet wird. Man müßte also zwischen der Funktion Var und dem Funktionswert $\text{Var } X$, dem Varianzwert, unterscheiden. Praktisch geschieht dies fast nie.
2. Andere Bezeichnungen für die Varianz sind *mittleres Abweichungsquadrat*, *Dispersion*, *zentrales Moment 2. Ordnung* oder auch *Streuungsquadrat*.
3. Die Zahl $\text{Var } X$ kann auch physikalisch gedeutet werden. Denkt man sich auf einem masselosen Stab an den Stellen x_i die Massen $W(x_i)$ angebracht, so stellt $\text{Var } X$ das Trägheitsmoment des Stabes in bezug auf den Massenschwerpunkt μ dar.

Beispiel 1: Wir berechnen die Varianz der Zufallsgröße $X :=$ Gewinn beim chuck-a-luck (siehe Seite 165 ff.): Mit $\mathcal{E} X = -\frac{17}{216}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Var } X &= (-1 + \frac{17}{216})^2 \cdot \frac{125}{216} + (1 + \frac{17}{216})^2 \cdot \frac{75}{216} + (2 + \frac{17}{216})^2 \cdot \frac{15}{216} + (3 + \frac{17}{216})^2 \cdot \frac{1}{216} = \\ &= \frac{199^2 \cdot 125 + 233^2 \cdot 75 + 449^2 \cdot 15 + 665^2 \cdot 1}{216^3} = \frac{12488040}{10077696} \approx 1,24. \end{aligned}$$

Diese Berechnung war sehr mühsam. Wir werden später in 12.4.2. sehen, wie man sie etwas vereinfachen kann. Unter Umständen kann die Rechnung aber schon durch eine tabellarische Anordnung übersichtlicher werden. Wir zeigen dies für die Varianz der Zufallsgröße »Größere der beiden gezogenen Zahlen« aus Beispiel 4 von Seite 174:

x	1	2	3	
$W(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	
$xW(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\Rightarrow \mu = \frac{14}{6}$
$x - \mu$	$-\frac{8}{6}$	$-\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	
$(x - \mu)^2$	$\frac{64}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{16}{36}$	
$(x - \mu)^2 W(x)$	$\frac{64}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{48}{216}$	$\Rightarrow \text{Var } X = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$

Die Werte der Zufallsgröße X waren Maßzahlen der Größe »Gewinn«, die in DM gemessen wird. Dementsprechend ist $\text{Var } X$ als Maßzahl einer Größe zu verstehen, die in $(\text{DM})^2$ gemessen wird. Das ist äußerst unanschaulich! Eine etwas anschaulichere Maßzahl erhält man, wenn man die Quadratwurzel aus dem Varianzwert zieht. Die so erhaltene Zahl σ heißt *Standardabweichung*. Sie wird in der Interpretation wieder in DM gemessen, also in derselben Einheit wie die Werte der Zufallsgröße und der Erwartungswert.

Allgemein legt man fest

Definition 181.1: Als *Standardabweichung* der Zufallsgröße X bezeichnet man die Zahl $\sigma(X) := \sqrt{\text{Var } X}$.

Auf Grund dieser Definition wird die Varianz Var oft auch mit σ^2 bezeichnet. Sind keine Mißverständnisse zu befürchten, dann schreibt man kurz σ statt $\sigma(X)$. In graphischen Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung W einer Zufallsgröße X trägt man gerne σ vom Erwartungswert μ aus nach beiden Richtungen ab. Figur 181.1 zeigt dies für die Zufallsgröße Gewinn X beim chuck-a-luck. Es ergibt sich $\sigma(X)$ zu $\sigma = \sqrt{\text{Var } X} \approx \sqrt{1,24} \approx 1,11$.

Die Standardabweichung σ läßt sich bei Glücksspielen als Maß für das Risiko auffassen; dazu

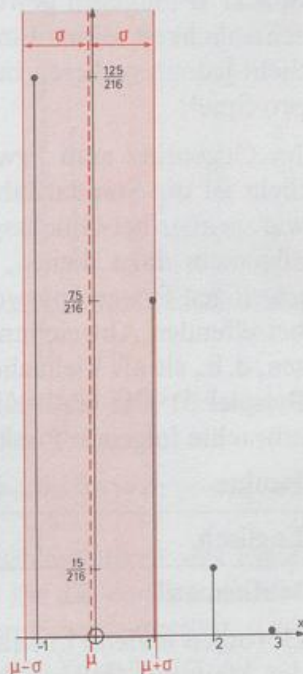


Fig. 181.1 Stabdiagramm zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße »Gewinn beim chuck-a-luck« mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ

Beispiel 2: Spieler A und Spieler B leisten beim Roulette (siehe Seite 22f.) einen Einsatz von jeweils 10 DM.

Spieler A

setzt auf »plein«, z. B. auf die 17.

Für die Zufallsgrößen Gewinn G_A und G_B erhalten wir dann folgende Aussagen:

g	-10	350
$W_{G_A}(g)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$\mathcal{E} G_A = \frac{-360 + 350}{37} = -\frac{10}{37};$$

$$\begin{aligned} \text{Var } G_A &= (-10 + \frac{10}{37})^2 \cdot \frac{36}{37} + \\ &\quad + (350 + \frac{10}{37})^2 \cdot \frac{1}{37} = \\ &= \frac{172\,627\,200}{50\,653}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{G_A} \approx 58,378.$$

Spieler B

setzt auf »rouge«.

g	-10	10
$W_{G_B}(g)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$$\mathcal{E} G_B = \frac{-190 + 180}{37} = -\frac{10}{37};$$

$$\begin{aligned} \text{Var } G_B &= (-10 + \frac{10}{37})^2 \cdot \frac{19}{37} + \\ &\quad + (10 + \frac{10}{37})^2 \cdot \frac{18}{37} = \\ &= \frac{5\,061\,600}{50\,653}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{G_B} \approx 9,996.$$

Die Standardabweichung des Gewinns von Spieler A ist wesentlich größer als die Standardabweichung des Gewinns von Spieler B, wie man auch erwartet hat. Spieler A gewinnt nämlich zwar mit kleiner Wahrscheinlichkeit sehr viel im Vergleich zum Einsatz, verliert aber mit großer Wahrscheinlichkeit seinen Einsatz. Spieler B hingegen gewinnt und verliert mit etwa gleicher, relativ großer Wahrscheinlichkeit seinen Einsatz. A geht also ein größeres Risiko ein als B. Auf lange Sicht jedoch verlieren beide Spieler dasselbe, nämlich im Mittel $\frac{1}{37}$ des Einsatzes pro Spiel!

Im Gegensatz zum Erwartungswert $\mathcal{E}X$ als mittlerem Wert von X auf lange Sicht ist die Standardabweichung $\sigma(X)$ nicht so leicht anschaulich greifbar. So wie sie aber bei Glücksspielen als Maß für das Risiko verwendet wurde, kann sie allgemein dazu dienen, Abweichungen verschiedener Zufallsgrößen von ihrem jeweiligen Erwartungswert miteinander zu vergleichen. Es ist dazu nur nötig, die betreffenden Abweichungen mittels der jeweiligen Standardabweichung zu messen, d. h., sie als Vielfache des jeweiligen σ darzustellen. Zur Verdeutlichung diene **Beispiel 3**: Die erste Klausur in den Grundkursen Englisch bzw. Mathematik erbrachte folgende Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Englisch	–	1	–	–	–	–	2	1	7	3	–	1	–	–	1	–
Mathematik	3	–	–	–	–	2	2	1	1	3	4	–	–	2	–	2

Dorothea erzielte in Mathematik 13 Punkte, in Englisch 11 Punkte. Sie ist nun der Meinung, daß sie in Mathematik relativ zu ihren Mitschülern besser abgeschnitten habe als zu ihren Mitschülern im Grundkurs Englisch; denn beide Arbeiten hatten den gleichen Durchschnitt von 8 Punkten, und sie liegt in Englisch nur 3 Punkte, in Mathematik jedoch 5 Punkte über diesem Durchschnitt.

Der Mathematiklehrer muß aber Dorotheas Euphorie dämpfen. Dorothea hat nämlich die Streuungen der Leistungen des jeweiligen Kurses um den Durchschnitt nicht berücksichtigt. Ein vernünftiges Abweichungsmaß sollte nämlich die Streuungen der Zufallsgröße in Rechnung stellen: Eine Abweichung um eine Einheit nach oben z. B. ist bei einer Zufallsgröße mit kleiner Streuung mehr wert als bei einer Zufallsgröße mit großer Streuung.

Die Standardabweichung der Zufallsgröße »Punktezahl in Mathematik« ergibt sich zu $\sigma_M = \sqrt{19,3} \approx 4,39$, die Standardabweichung von »Punktezahl in Englisch« zu $\sigma_E = \sqrt{6,625} \approx 2,57$. Die 5 Mathematikpunkte über dem Durchschnitt

entsprechen also einer Abweichung von $\frac{5}{\sqrt{19,3}} \cdot \sigma_M = 1,138 \sigma_M$, die 3 Englischpunkte über dem Durchschnitt hingegen einer Abweichung von $\frac{3}{\sqrt{6,625}} \cdot \sigma_E = 1,166 \sigma_E$.

Somit hat Dorothea im Vergleich zum Kurs in Englisch tatsächlich besser abgeschnitten!

Merke: Will man Abweichungen vom Mittelwert bei verschiedenen Zufallsgrößen miteinander vergleichen, so ist es sinnvoll, diese Abweichungen als Vielfache der jeweiligen Standardabweichungen anzugeben.

11.5. Die Ungleichung von Bienaymé-Tschebyschow

Wenn eine Zufallsgröße X den Erwartungswert μ hat, dann vermutet man, daß bei einer Ausführung des zugrundeliegenden Zufallsexperiments sich Werte der Zufallsgröße ergeben, die in der Nähe des Erwartungswertes μ liegen. Zur Untersuchung dieser Vermutung denken wir uns ein Intervall der Breite $2a$ (mit $a > 0$) symmetrisch um den Erwartungswert μ gelegt und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgröße X um mindestens a neben den Erwartungswert trifft. Anders ausgedrückt: Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße X Werte außerhalb des Intervalls $]\mu - a; \mu + a[$ annimmt.

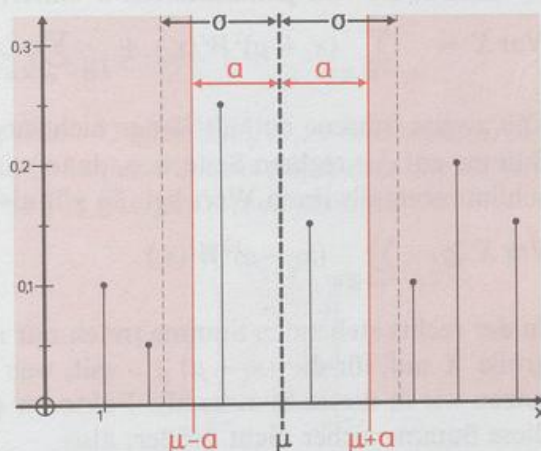


Fig. 183.1 Der rot unterlegte Teil veranschaulicht $P(|X - \mu| \geq a)$.

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $|X - \mu| \geq a$ untersuchen. (Siehe auch Figur 183.1) Da die Varianz ein Maß für die Streuung der Werte der Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert μ ist, liegt es nahe, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit von der Varianz der Zufallsgröße abhängen wird. Bei Zufallsgrößen mit großem Varianzwert müßte die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geq a)$ bei gleichem a auch groß sein. Vergrößert man hingegen a , so müßte diese gesuchte Wahrscheinlichkeit bei festem X abnehmen. Es ist offensichtlich, daß diese Wahrscheinlichkeit von der jeweils vorliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße abhängt. Bei der Herleitung eines allgemeinen schwachen Gesetzes der großen Zahlen (siehe 14.7.) bewies 1866 der russische Mathematiker *Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow* (1821 bis 1894)* eine Ungleichung, die die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geq a)$ unabhängig von der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung W_X abzuschätzen ermöglicht. Die Ungleichung und ihr Beweis finden sich bereits 1853 in einer Arbeit des französischen Statistikers *Irénée-Jules Bienaymé* (1796–1878)**.

Um nun die nach diesen beiden Mathematikern benannte Abschätzung unserer gesuchten Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geq a)$ zu gewinnen, betrachten wir die Definitionsgleichung der Varianz der Zufallsgröße X , nämlich

$$\text{Var } X = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 W(x_i),$$

* Чебышев (Betonung auf der letzten Silbe). Die Arbeit erschien 1867 unter dem Titel *Des valeurs moyennes*. – Siehe Seite 425.

** Siehe Seite 399.

und zerlegen die rechts stehende Summe in zwei Teile, deren einer all diejenigen x_i enthält, die von μ mindestens a entfernt sind:

$$\text{Var } X = \sum_{|x_i - \mu| \geq a} (x_i - \mu)^2 W(x_i) + \sum_{|x_i - \mu| < a} (x_i - \mu)^2 W(x_i).$$

Die zweite Summe enthält lauter nicht-negative Summanden. Lassen wir diese Summe auf der rechten Seite weg, dann wird die rechte Seite kleiner oder behält schlimmstenfalls ihren Wert bei. Es gilt also

$$\text{Var } X \geq \sum_{|x_i - \mu| \geq a} (x_i - \mu)^2 W(x_i).$$

In der rechts stehenden Summe treten nur mehr diejenigen Werte x_i der Zufallsgröße X auf, für die $|x_i - \mu| \geq a$ gilt, was mit $(x_i - \mu)^2 \geq a^2$ äquivalent ist. Ersetzen wir in dieser Summe alle Faktoren $(x_i - \mu)^2$ durch a^2 , dann machen wir diese Summe sicher nicht größer; also

$$\text{Var } X \geq \sum_{|x_i - \mu| \geq a} a^2 W(x_i) = a^2 \cdot \sum_{|x_i - \mu| \geq a} W(x_i) = a^2 P(|X - \mu| \geq a).$$

Da $a > 0$ war, gewinnen wir die Abschätzung der gesuchten Wahrscheinlichkeit durch Division mit a^2 . Die eingangs vermutete Abhängigkeit von $\text{Var } X$ und a zeigt

Satz 184.1: Die Ungleichung von Bienaymé-Tschebyschow.

Besitzt eine Zufallsgröße X einen endlichen Erwartungswert μ und einen endlichen Varianzwert, dann gilt für jedes reelle $a > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\text{Var } X}{a^2}$$

Aus der obigen Ungleichung erhält man sofort eine ihr äquivalente Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, in das gegebene Intervall $]\mu - a; \mu + a[$ hineinzutreffen; es gilt nämlich

$$P(|X - \mu| < a) = 1 - P(|X - \mu| \geq a), \quad \text{d. h.}$$

$$P(|X - \mu| < a) \geq 1 - \frac{\text{Var } X}{a^2}$$

Die Zahl $r_T := \frac{\text{Var } X}{a^2}$ heißt manchmal auch **Tschebyschow-Risiko**. Sie ist eine obere Schranke für das **wahre Risiko** $P(|X - \mu| \geq a)$, mit der Zufallsgröße X ihren Erwartungswert μ um mindestens a zu verfehlen.

Die gefundene Abschätzung kann je nach Verteilung der Zufallsgröße sehr genau oder sehr grob sein. (Vgl. Aufgabe 196/61 und 196/66.) Sie wird sogar trivial, wenn $\text{Var } X \geq a^2$, weil dann die betreffende Wahrscheinlichkeit durch eine Zahl abgeschätzt wird, die mindestens 1 ist.

Die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* gibt uns die Möglichkeit, die Bedeutung der Standardabweichung σ als Streuungsmaß einer Zufallsgröße deut-

licher zu erkennen. Setzen wir nämlich $a = t\sigma$ (mit $t > 0$) und beachten $\text{Var} X = \sigma^2$, so erhalten wir

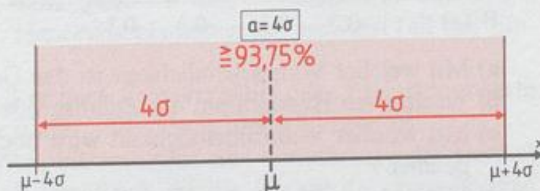
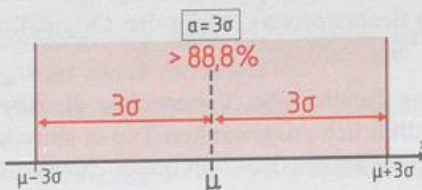
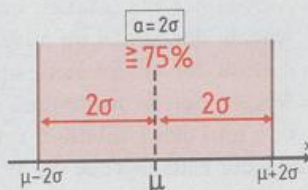
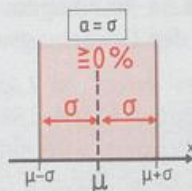
$$P(|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{bzw.} \quad P(|X - \mu| < t\sigma) \geq 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Für $t \leq 1$ liefert die *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung keine interessante Aussage. Setzt man jedoch für t die Werte 2, 3 oder 4 ein, so erhält man die für jede Zufallsgröße (mit endlichen μ und $\text{Var} X$)* gültigen Abschätzungen

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq \frac{3}{4} = 75\%$$

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9} > 88,8\%$$

$$P(|X - \mu| < 4\sigma) \geq \frac{15}{16} = 93,75\%$$



die in Figur 185.1 symbolisch wiedergegeben sind. Die erste dieser Abschätzungen besagt beispielsweise, daß die Werte jeder Zufallsgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% innerhalb des 2σ -Bereichs um den Erwartungswert liegen. Das *Tschebyschow*-Risiko, diesen 2σ -Bereich zu verfehlen, beträgt 25%.

Fig. 185.1 Man trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens

- 0% in den σ -Bereich (trivial!)
- 75% in den 2σ -Bereich
- $88\frac{8}{9}\%$ in den 3σ -Bereich
- 93,75% in den 4σ -Bereich

Aufgaben

Zu 11.1.

1. Das chuck-a-luck werde folgendermaßen abgewandelt:
 - a) Kein Einsatz; Auszahlung = Anzahl der Sechsen in DM,
 - b) Einsatz 10 DM; Auszahlung z^4 DM, wobei z = Anzahl der Sechsen.
 Bestimme in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße Gewinn X und berechne ihren Erwartungswert.
2. Ein Glücksspiel heiße **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns null ist. Ändere beim chuck-a-luck die Auszahlung
 - a) beim Ergebnis 666, b) beim Verlust so ab, daß das Spiel fair wird.

* Die beim *Petersburger Problem* (Aufgabe 189/23) aufgetretene Zufallsgröße »Auszahlung« erfüllt z. B. nicht diese Voraussetzungen.

**WERDENDEN ELTERN
sieht Hellseher das
Geschlecht des
Babys voraus. Bei Nicht-
eintreffen Geld zurück**

3. a) Berechne das zu erwartende Einkommen des Hellsehers, wenn er zum Hellsehen eine Laplace-Münze verwendet und für eine Vorhersage a DM verlangt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt sei 0,514. 100 Personen schicken pro Monat einen Auftrag.
- b) Kann der Hellseher sein Einkommen verbessern, ohne besser hellsehen zu müssen?
4. a) Zeichne für die Zufallsgröße »Augenzahl« beim einfachen Wurf eines Astragalus (siehe Seite 46f.) ein Stabdiagramm und ein Histogramm zur Breite 1.
- b) Berechne den Erwartungswert dieser Zufallsgröße.
5. »Es gibt drei Arten von Lügen: gewöhnliche Lügen, infame Lügen und die Statistik.« (Benjamin Disraeli [1804–1881] britischer Staatsmann)
Aus den 13 Wörtern wird eines auf gut Glück ausgewählt.
- a) Gib einen Ergebnisraum Ω an.
- b) Auf Ω seien folgende Zufallsgrößen definiert:
 B := Anzahl der Buchstaben im ausgewählten Wort,
 S := Anzahl der Silben im ausgewählten Wort,
 I := Anzahl der »i« im ausgesuchten Wort,
 K := Anzahl der Konsonanten im ausgewählten Wort; dabei sollen alle von a, e, i, o, u und den Umlauten verschiedenen Buchstaben als Konsonanten gelten.
 Gib zu jeder Zufallsgröße die Wahrscheinlichkeitsfunktion an und zeichne je ein Stabdiagramm.
- c) Berechne zu jeder Zufallsgröße aus b) den Erwartungswert und deute ihn.
- d) Beantworte a) – c) für den Originalton "There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics".
6. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Stunden, die ein Fernsehgerät an einem willkürlich ausgewählten Tag in einer bestimmten Familie in Betrieb ist. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsgröße gelte folgende Tabelle:
- | | | | | | | |
|--------|-----|------|-----|-----|---|----------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ≥ 5 |
| $W(x)$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,1 | | 0 |
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gerät 4 Stunden in Betrieb?
- b) Zeichne ein Histogramm der Zufallsgröße X .
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird höchstens, mindestens, genau 3 Stunden ferngesehen?
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mehr als 1 Stunde, aber höchstens 3 Stunden ferngesehen?
- e) Bestimme die Mindestanzahl der Stunden, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,5 täglich ferngesehen wird.
- f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau (mindestens) 2 Stunden ferngesehen wird unter der Voraussetzung, daß überhaupt ferngesehen wird?
- g) Berechne den Erwartungswert von X und deute ihn.
7. In einer Schublade befinden sich 4 schwarze und 6 braune Socken. Man zieht einen Socken nach dem anderen heraus, bis man zwei gleichfarbige hat.
- a) S := Anzahl der gezogenen Socken
Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion von S und zeichne ein Histogramm.
- b) Berechne den Erwartungswert von S .

8. Es werde mit zwei Laplace-Würfeln gewürfelt. Bei 4 DM Einsatz gelte folgender Auszahlungsplan:

Augensumme	Auszahlung in DM
gerade Primzahl	9
ungerade Primzahl	5
gerade Nicht-Primzahl	3
ungerade Nicht-Primzahl	0

- a) Stelle eine Wertetabelle für die Zufallsgröße $G := \text{»Gewinn«}$ auf.
 b) Stelle die Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von G auf und zeichne ihren Graphen (Abszisse $1 \cong 1$ cm, Ordinate $1 \cong 7,2$ cm).
 c) Zeichne ein Histogramm.
 d) Berechne den Erwartungswert von G .
9. *Das Morra-Spiel.* Zwei Spieler, die sich gegenüber sitzen, schnellen jeweils gleichzeitig die rechte Hand vor und strecken dabei mindestens einen der 5 Finger aus. Gleichzeitig ruft jeder Spieler eine Zahl. Gewonnen hat derjenige, der die richtige Anzahl der von beiden Spielern ausgestreckten Finger gerufen hat. Meist wurden 5 Partien gespielt. Nach einer anderen Version griff der Gewinner einer Partie ab der Mitte eines Stabes eine Spannweite ab. Sieger war, wer zuerst das Stabende erreichte.* Die Zufallsgröße Z sei die Anzahl der von beiden Spielern ausgestreckten Finger.
- a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z unter der Annahme, daß jeder Spieler jede Anzahl von Fingern mit gleicher Wahrscheinlichkeit zeigt.
 b) Bestimme den Erwartungswert μ der Zufallsgröße Z .
 c) Zeige, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z symmetrisch zu μ ist, d. h., daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $P(Z = \mu + x) = P(Z = \mu - x)$.
 d) Zeige allgemein: Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße symmetrisch zur Zahl a , dann ist a der Erwartungswert dieser Zufallsgröße.
10. *Christiaan Huygens* (1629–1695) behandelte 1657 in seinem *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* als Aufgabe XIII folgendes Problem:
 »Ich spiele mit einem anderen unter folgender Bedingung: Einer wirft 2 Würfel in einem Wurf. Kommt die Sieben heraus, so gewinne ich; jener aber, wenn die Zehn erscheint; tritt jedoch irgend etwas anderes ein, dann teilen wir das, was eingesetzt worden ist, zu gleichen Teilen untereinander auf. Herauszubekommen ist, welcher Teil des Einsatzes jedem von uns bestimmt ist.«
 Aus *Huygens'* Lösung ist ersichtlich, daß er nach dem Verhältnis der Erwartungswerte der Auszahlungen für die beiden Spieler sucht. – Bestimme dieses Verhältnis.
11. Ein Laplace-Würfel werde so oft geworfen, bis entweder eine 6 erscheint oder viermal nacheinander keine 6 erscheint. Die Zufallsgröße Z sei die Anzahl der dazu nötigen Würfe.
- a) Stelle mit Hilfe der geworfenen Augenzahlen einen möglichst einfachen Ergebnisraum auf und gib seine Mächtigkeit an.
 b) Gib die Ergebnismengen der Ereignisse $E_i := \{\omega | Z(\omega) = i\}$ an.
 c) Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Z an.
 d) Berechne den Erwartungswert von Z .

* Das Morra-Spiel, das heute noch in Italien gespielt wird, ist sehr alt. *Ptolemaios Hephaistion* (1. Jh. n. Chr.) schreibt die Erfindung des Spiels der schönen *Helena* zu. Daß es bei diesem Spiel sehr auf die Ehrlichkeit der Spieler ankommt, zeigt ein altes Sprichwort, das *Cicero* (106–43) in *De officiis* (3,77) zitiert: »Wenn sie nämlich jemandens Ehrlichkeit und Gutartigkeit loben, dann sagen sie, er sei's wert, mit ihm im Dunkeln Fingerzeigen zu spielen.« Das Finger- und Gutartigkeit loben – micare digitis – wurde bei den Römern so wie unser Knobeln sehr oft benützt, um Entscheidungen herbeizuführen. (Siehe z. B. *Sueton*, Aug. 13.) – *Pacioli* (um 1445–1517) erwähnt bei der Behandlung des probléme des partis eine Morra mit 10 Fingern je Spieler. – Bei der heute üblichen Morra ist auch eine geschlossene Faust möglich; erstaunlicherweise zählt sie wie 1 Finger.

12. Eine Laplace-Münze wird so lange geworfen, bis eine der beiden Seiten
 a) zum zweiten Mal, b) zum dritten Mal, c) zum n -ten Mal erscheint.
 Gib einen Ergebnisraum an. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße »Anzahl der dazu nötigen Würfe« und berechne ihren Erwartungswert. (Im Fall c) genügt die Summendarstellung.)
13. Aus den 32 Karten eines Schafkopfspiels* erhält jeder Spieler 8 Karten. Die höchsten Trümpfe sind die 4 »Ober« (= »Damen«). Wir betrachten folgende Zufallsgrößen:
 $X :=$ »Anzahl der Ober im Blatt des Spielers A«,
 $Y :=$ »Anzahl der Herzkarten im Blatt des Spielers A«.
 a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der beiden Zufallsgrößen auf.
 b) Berechne die Erwartungswerte von X und Y .
14. In einer Urne liegen vier Kugeln. Sie tragen die Zahlen 1, 2, 3 bzw. 4.
 a) Es dürfen k Kugeln ($1 \leq k \leq 4$) ohne Zurücklegen herausgenommen werden. Die Summe der auf den Kugeln stehenden Zahlen wird als Gewinn in DM ausbezahlt. Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsgrößen »Gewinn bei Entnahme von k Kugeln« auf.
 b) Löse dieselbe Aufgabe für den Fall $k = 2$, aber mit Zurücklegen.
 c) Berechne jeweils die Erwartungswerte.
15. Eine Zufallsgröße nehme genau 3 ganzzahlige Werte an, davon den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 und den Wert 100 mit der Wahrscheinlichkeit $0 < p < 0,5$. Wo muß der dritte Wert liegen, damit der Erwartungswert näher bei 100 als beim wahrscheinlichsten Wert liegt?
16. Beim Würfelspiel »Pentagramm« wird mit 3 Würfeln gespielt. Fällt eine Fünf, so erhält der Spieler 5 DM, bei 2 Fünfen erhält er 10 DM und bei 3 Fünfen 30 DM. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße »Auszahlung« bei diesem Spiel.
17. Beim Würfelspiel »Die böse Drei« wird mit 2 Würfeln gespielt. Der Spieler leistet vor dem Wurf einen Einsatz von 3 DM. Tritt nun beim Wurf die Augenzahl Drei nicht auf, so erhält der Spieler die Augensumme in DM ausbezahlt. Tritt hingegen die Drei mindestens einmal auf, so hat er die Augensumme in DM zu zahlen. Ist das Spiel fair?
18. n Briefe werden unbesehen in n adressierte Umschläge gesteckt. X sei die Anzahl der Briefe, die richtig stecken. Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion und den Erwartungswert von X für a) $n = 3$, ● b) $n = 4$.
19. Eine Lotterie laufe folgendermaßen ab: Man zahlt einen Einsatz von 10 DM und zieht eine Kugel aus einer Urne, die 4 rote und 6 schwarze Kugeln enthält. Je nach der gezogenen Farbe zieht man aus einer roten bzw. schwarzen Urne wieder eine Kugel. Die Zahl auf dieser Kugel ist die Auszahlung in DM.
 Die rote Urne enthält Kugeln mit den Zahlen 20, 20, 10, 10 und 0. Die schwarze Urne enthält Kugeln mit den Zahlen 100, 10, 0 und 0.
 a) Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße Gewinn an.
 b) Zeichne ein Stabdiagramm. c) Berechne den Erwartungswert.
20. Theodor und Dorothea setzen je 10 DM ein und vereinbaren folgendes Glücksspiel:
 In drei Urnen liegen verschiedene Anzahlen von weißen oder schwarzen Kugeln:
 $U_1: 3w, 5s$ $U_2: 4w, 3s$ $U_3: 4w, 3s$
 Theodor zieht eine Kugel aus U_1 und legt sie in U_2 , mischt U_2 und zieht dann eine Kugel aus U_2 ; diese legt er in U_3 , mischt und zieht schließlich aus dieser Urne eine Kugel. Ist sie schwarz, so erhält Dorothea das Geld auf dem Tisch, andernfalls Theodor.

* Schafkopf ist eines der ältesten deutschen Kartenspiele, das 4 Spieler mit deutschen oder französischen Karten spielen. Der Name rührt davon her, daß ursprünglich beim Ankreiden der gewonnenen Partien 8 Striche zum Bild eines Schafkopfes zusammengefügt wurden.

- a) Wer ist im Vorteil? Berechne dazu den Erwartungswert der Zufallsgröße »Gewinn von Theodor«.
- b) Wie können die Einsätze gewählt werden, damit das Spiel fair ist?

21. a) Theodor bietet Dorothea folgendes Spiel an: Dorothea soll 20 DM auf den Tisch legen und zweimal das Glücksrad von Figur 189.1 drehen. Zeigt der Zeiger auf 2, so verdoppelt Theodor den gerade auf dem Tisch liegenden Betrag. Weist der Zeiger auf $\frac{1}{2}$, so halbiert er ihn. Dorothea erhält schließlich den Betrag, der auf dem Tisch liegt, nachdem das Rad zweimal gedreht worden ist. Berechne den Erwartungswert des Gewinns von Dorothea.



Fig. 189.1

b) Wie groß muß der Winkel α in Figur 189.2 gewählt werden, damit das Spiel fair ist?

c) $\mathcal{E}_\alpha(X)$ sei der Erwartungswert des Gewinns X von Dorothea in Abhängigkeit vom Winkel α . Zeichne den Graphen von $\alpha \mapsto \mathcal{E}_\alpha(X)$; $D = [0; 2\pi]$.

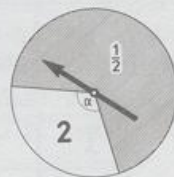


Fig. 189.2

d) Bestimme die Extremwerte der Funktion $\alpha \mapsto \mathcal{E}_\alpha(X)$.

22. a) Theodor setzt beim Roulette 10 DM auf »pair«. Die Zufallsgröße G sei sein Gewinn. Berechne ihren Erwartungswert.

b) Dorothea hat sich ein sicheres System zum Gewinnen ausgedacht. Sie setzt 10 DM auf »pair«. Gewinnt sie, so hört sie auf. Verliert sie jedoch, so verdoppelt sie den Einsatz und setzt wieder auf »pair«.

- 1) Wie oft kann sie maximal spielen, wenn sie 1000 DM bei sich hat?
- 2) Wie groß ist der Erwartungswert ihres Gewinns bei diesem Spielsystem?
- 3) Wie groß ist der Erwartungswert ihres Gewinns, wenn ihr beliebig viel Geld zur Verfügung steht?

23. Das Petersburg Problem von Nikolaus I. Bernoulli (1687–1759)*: Theodor wirft eine Laplace-Münze so oft, bis Adler erscheint. Dorothea muß 2^i DM an Theodor bezahlen, wenn Adler zum ersten Mal beim i -ten Wurf erscheint.

a) Welchen Einsatz muß Theodor vor Spielbeginn an Dorothea leisten, damit das Spiel fair ist, falls

- 1) nach höchstens 10 Würfeln abgebrochen wird; dabei muß Dorothea 2^{11} DM bezahlen, wenn 10mal Zahl fällt;
- 2) die Wurfzahl unbegrenzt ist.

b) Die Lösung von 2 zeigt, daß Dorothea mit der Annahme des Spiels eine Verpflichtung eingegangen ist, die sie nicht erfüllen kann. Siméon-Denis Poisson (1781–1840)** hat daher folgende Variante des Petersburgers Spiels vorgeschlagen. Dorothea besitzt ein Kapital K . Sie zahlt nach der Spielregel von Nikolaus Bernoulli, solange es ihr möglich ist. Übersteigt ihre Zahlungsverpflichtung jedoch ihr Kapital, so händigt sie dieses an Theodor aus. Welchen Einsatz muß Theodor bei dieser Variante leisten, damit das Spiel fair ist? Gib die Einsätze für $K = 32$ DM, 1024 DM, 10^6 DM und 10^9 DM an.

* Geronimo Cardano (1501–1576) beschäftigt sich mit dieser Aufgabe bereits im Kapitel LXI/17 seiner *Practica arithmeticae generalis* (1539). Nikolaus I. Bernoulli stellt das Problem im Brief vom 9. 9. 1713 an Montmort (1678–1719), der diesen in der 2. Auflage seines *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1713) abdruckt. Gabriel Cramer (1704–1752) schickt am 21. 5. 1728 einen Lösungsvorschlag an Nikolaus, den wiederum Daniel Bernoulli (1700–1782) als Anhang zu seiner eigenen Lösung *Specimen Theoriae novae de mensura sortis* abdruckt, die 1738 in Bd. 5 der *Petersburger Commentarien* zu den Jahren 1730/31 erscheint. So kommt das Problem zu seinem Namen.

** Siehe Seite 421.

- 24. Eines der beliebtesten Glücksspiele in Las Vegas (USA) ist Keno, eine Art Zahlenlotto*. Kenoscheine findet man in jedem Hotelzimmer und auf jedem Restauranttisch. Etwa alle 5 Minuten findet eine Ausspielung statt, bei der 20 der 80 Zahlen gezogen werden. In der einfachsten Form des Keno kreuzt der Spieler auf dem Schein (Bild) mindestens eine, höchstens aber 15 der 80 Zahlen an; der Mindesteinsatz beträgt 1\$. Die Auszahlung hängt von der Anzahl der richtig angekreuzten Zahlen ab und ist proportional zum Einsatz bis höchstens 25000\$. Es sei nun ein Einsatz von 1\$ angenommen.
 - a) Wie viele verschiedene Ausspielungen sind beim Keno möglich?
 - b) Theodor möchte bis zu 8 Zahlen ankreuzen und vergleicht die in einem Casino angebotenen Spielpläne: Berechne jeweils den Erwartungswert der Zufallsgröße Gewinn.

Spiel-typ	Anzahl der angekreuzten richtigen Zahlen		Aus-zahlung in \$
I	1	1	3
II	2	2	12
III	3	2	1
		3	42
IV	4	2	1
		3	4
		4	112
V	5	3	2
		4	20
		5	480
VI	6	3	1
		4	4
		5	88
		6	1500
VII	7	4	2
		5	24
		6	360
VIII	8	7	5000
		5	9
		6	90
		7	1500
		8	19000

GOLDEN NUGGET HOTEL

SPECIAL Introductory Offer!

YOU CAN WIN **\$25,000** FOR ONLY \$1.00! WHEN THE ATTACHED TICKET IS PLAYED, YOU WILL RECEIVE ONE FREE DRINK TOKEN

PICK ANY 8 NUMBERS			
Spots	Pays	Spots	Pays
5	\$7.00	7	\$1,800.00
6	\$80.00	8	\$25,000.00

(Both portions of this ticket must be presented intact.) We suggest you have your room key available for identification purposes. The SPECIAL RATE applies only when playing the ATTACHED Keno Ticket.

GOLDEN NUGGET HOTEL

Play KENO Win up to \$25,000

(SEE HOW YOU CAN WIN UP TO \$25,000 WHEN YOU PLAY KENO. MARK ANY 8 NUMBERS YOU WANT TO FOR BEFORE YOUR NUMBERS ARE CALLED.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
WINNING TICKET MUST BE CLAIMED BEFORE START OF NEXT DRAWING									
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

100
8
SR

SEE HOW YOU CAN WIN UP TO \$25,000 WHEN YOU PLAY KENO. MARK ANY 8 NUMBERS YOU WANT TO FOR BEFORE YOUR NUMBERS ARE CALLED.

- c) Theodor stellt fest, daß in verschiedenen Casinos von Las Vegas für den Spieltyp VIII verschiedene Spielpläne angeboten werden. Für welches der angegebenen Casinos wird er sich wohl entscheiden? Oder geht er lieber ins Casino der Aufgabe b)?

Anzahl der richtigen Zahlen	Auszahlung in \$ in Casino				
	A	B	C	D	E
5	9	5,30	8	8	8
6	85	70	75	84	80
7	1650	2000	1490	1640	1800
8	18000	25000	16000	17850	25000

25. Von einem gut gemischten Bridgespiel wird eine Karte nach der anderen aufgedeckt. Der erste schwarze König erscheint an k -ter Stelle.
- a) Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße $S :=$ Stelle des ersten schwarzen Königs.
- b) Berechne den Erwartungswert dieser Zufallsgröße und deute ihn.
26. Ein Gerät enthält 3 Bauteile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Bauteil Nr. k innerhalb eines Jahres ausfällt, beträgt $0,1 \cdot (k + 1)$, unabhängig vom Ausfallen der anderen Bauteile. Bestimme den Erwartungswert der Zufallsgröße Anzahl der während eines Jahres funktionierenden Bauteile.
27. In einem Weinkeller wurde in genau einem der n Fässer der Wein vom entlassenen Kellermeister aus Rache vergiftet. Zur Ermittlung des vergifteten Fasses geht man folgendermaßen vor. Man teilt die Fässer in 2 möglichst gleich große Gruppen auf; dann zapft man aus jedem Faß einer der beiden Gruppen eine Probe in ein Gefäß ab und untersucht diese Mischung auf Giftigkeit. Man setzt das Verfahren mit der Gruppe, die das Gift enthält, in gleicher Weise fort, bis das Giftfaß entdeckt ist. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der dazu nötigen Gifttests. Bestimme ihren Erwartungswert
- a) falls $n = 8$, b) falls $n = 11$, c) allgemein.
28. In der Informationstheorie wird jedem Zeichen aus einem Zeichenvorrat als *syntaktischer Informationsgehalt* der binäre Logarithmus aus dem reziproken Wert der Auftretenswahrscheinlichkeit dieses Zeichens zugeordnet. Dadurch ist eine Zufallsgröße auf der Menge der Zeichen definiert. Den Erwartungswert dieser Zufallsgröße nannte 1948 *Claude Elwood Shannon* (1916–2001) *Entropie* der Nachrichtenquelle. Berechne die Entropie H für folgende Quelle:

Zeichen	a	b	c	d	e
Auftretenswahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Wie läßt sich die Entropie interpretieren?

29. *Jakob Bernoulli* (1655–1705) behandelt zum Abschluß des 3. Teils seiner *Ars Conjectandi* das Spiel mit den blinden Würfeln (*De alea tesserarum caecarum*)**.

a) »Problem XXIII: Blinde Würfel nennt man die sechs, bei unseren Jahrmarktsgauklern häufig zu findenden Würfel, welche zwar die Gestalt gewöhnlicher Würfel, aber auf fünf Seitenflächen keine Augen haben. Auf der sechsten Seitenfläche trägt der erste Würfel ein Auge, der zweite zwei Augen, ..., der sechste sechs Augen, so daß die Summe aller Augen auf den sechs Würfeln gleich 21 ist. Solche Würfel legen jene Schwindler, welche die Jahrmarktsbesucher prellen wollen, zusammen mit einer Liste auf, in welcher die für alle Augenzahlen von 1 bis 21 zu gewinnenden Geldpreise verzeichnet sind, wie dies z. B. auch die weiter unten folgende Tafel zeigt. Wer nun sein Glück versuchen will, zahlt dem Glückshafenmann einen Pfennig und wirft dann jene sechs Würfel auf das Spielbrett; wirft er eine bestimmte Anzahl Augen, so erhält er den ausgesetzten Preis, wirft er aber kein Auge, so ist sein Einsatz verloren.«

Augensumme	0	1–8	9–13	14–16	17	18	19	20	21
Preis in Pf	0	1	2	3	4	5	12	45	90

Man berechne die Hoffnungen der Spieler unter der Annahme, daß die blinden Würfel L-Würfel sind.

* Keno entstand vor über 2000 Jahren in China. Verbreitung im Westen der USA erfuhr er durch die im 19. Jh. beim Eisenbahnbau beschäftigten Chinesen.

** *Geronimo Cardano* (1501–1576) betrachtet diese Aufgabe in Cap. XXXII seines *Liber de ludo aleae*, ohne sie lösen zu können. Es gelingt ihm jedoch, den Erwartungswert der Augensumme richtig zu bestimmen – was wir erst in Aufgabe 216/27 angehen wollen.

- b) »Ich sah einst einen Marktschreier, der den Umstehenden, um sie anzulocken, die nachstehende Vergünstigung anbot:
 Problem XXIV: Der Spielbudenbesitzer verpflichtet sich, dem Spieler nach 5 Spielen alle seine der Reihe nach eingesetzten Pfennige zurückzugeben, wenn dieser fünfmal hintereinander kein Auge wirft. Welche Hoffnungen haben jetzt beide?«
- c) Zum Abschluß bemerkt *Bernoulli*, »daß ein Glückshafenmann einen noch größeren Gewinn [als in a)] für sich erzielen kann, wenn er sich verpflichtet, dem Spieler seinen gleich zu Beginn zu leistenden Einsatz von 2 Pf zurückzugeben, falls dieser zweimal hintereinander kein Auge wirft.«*
30. In einer Urne befinden sich 10 von 1 bis 10 nummerierte Kugeln. Es werden der Urne 2 Kugeln entnommen. Die Zufallsgröße G sei die größte Nummer, die dabei gezogen wird. Berechne Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert von G , falls
- a) mit Zurücklegen, b) ohne Zurücklegen gezogen wird.
- 31. Aufgabe 30 soll nun verallgemeinert werden. In einer Urne befinden sich τ von 1 bis τ nummerierte Kugeln. Es werden n Kugeln entnommen. Die Zufallsgröße G sei die größte Nummer, die dabei gezogen wird.
- a) Ziehen mit Zurücklegen
- 1) Berechne allgemein den Erwartungswert der Zufallsgröße G .
 - 2) Werte das Ergebnis von 1) für $n = 1, 2, 3$ aus.
 - 3) Gib unter Verwendung von $\int_0^{\tau} x^k dx$ eine Näherungsformel für $E G$ an.
 - 4) Berechne den Erwartungswert näherungsweise für $\tau = 100$ und $n = 1, 2, 3, 10, 100$.
- b) Ziehen ohne Zurücklegen
- 1) Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße G unter Verwendung von
$$\sum_{s=0}^S \binom{k+s}{k} = \binom{k+S+1}{k+1}. \quad (\text{Beweis durch vollständige Induktion möglich.})$$
 - 2) Berechne den Erwartungswert für $\tau = 100$ und $n = 1, 2, 3, 10, 100$.
- 32. Berechne die mittlere Lebenserwartung M_0 eines Neugeborenen und M_x eines x -jährigen unter der Voraussetzung, daß die Todesfälle jeweils in der Mitte des Altersintervalls $[x; x+1[$ eintreten und daß ferner $l_{101} = 0$ ist. Wie groß ist also nach Tabelle 159.1 die mittlere Lebenserwartung
- a) eines/einer 80jährigen,
 - b) eines neugeborenen, einjährigen bzw. zweijährigen Knaben,
 - c) eines neugeborenen, einjährigen bzw. zweijährigen Mädchens?
- Was besagen diese Ergebnisse?

Zu 11.2.

33. Stelle die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße Gewinn beim chuck-a-luck auf und zeichne ihren Graphen.
34. a) Stelle die kumulativen Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen B, S, I und K aus Aufgabe 186/5. b) auf und zeichne jeweils ihren Graphen.
 b) Berechne $F_B(4,2)$, $F_S(4,2)$, $F_I(4,2)$ und $F_K(4,2)$.
35. Stelle die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße
- a) G aus Aufgabe 187/8, b) Z aus Aufgabe 187/11 auf und zeichne ihre Graphen.

* Das aus dem 16. Jh. stammende neuniederländische *loterije* = Glücksspiel verdrängt im 18. Jh. das altheimische *Glückshafen*. Dieser ist vermutlich in Italien entstanden. Die früheste Nachricht von einem Glückshafen auf deutschem Boden stammt aus München aus dem Jahre 1467 anlässlich des Tiburtius-Schießens; Augsburg folgt 1470, Basel 1471, Erfurt 1477. Als Einrichtung zur Unterstützung der Armen findet man ihn auf dem Münchener Oktoberfest seit 1816, ausgenommen die Zeit von 1844 bis 1850. Seit 1947 übernimmt das Bayerische Rote Kreuz die Ausrichtung.

36. Bestimme die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X aus Aufgabe 186/6 und zeichne ihren Graphen.
 37. Die kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße sei wie folgt definiert:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 0,17 & 0 \leq x < 1 \\ 0,23 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 0,58 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsgröße auf.

38. Beweise: $W(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.
 39. Für zwei reelle Zahlen $a < b$ werden für die Zufallsgröße X folgende Ereignisse betrachtet:
 a) Der Wert der Zufallsgröße ist höchstens a ,
 - ist größer als a ,
 - ist kleiner als a ,
 - ist mindestens a .
 b) Der Wert der Zufallsgröße ist größer als a , aber höchstens b ;
 - ist mindestens a , aber höchstens b ;
 - ist mindestens a , aber kleiner als b ;
 - ist größer als a , aber kleiner als b .

Stelle in jedem Fall eine Formel für die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse auf unter Verwendung der kumulativen Verteilungsfunktion und/oder der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

- c) Wie vereinfachen sich diese Formeln, wenn $a = x_i$ und $b = x_k$ ist, wobei x_i und x_k Werte der Zufallsgröße X sind?
 40. Eine Laplace-Münze werde so oft geworfen, bis entweder Adler erscheint oder fünfmal nacheinander kein Adler erscheint. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der dazu nötigen Würfe.
 a) Zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X .
 (Einheit auf der Hochwertachse $\hat{=} 8$ cm.)
 b) Zeichne die Graphen folgender auf \mathbb{R} definierter Funktionen:
 $g: x \mapsto P(X < x)$ $h: x \mapsto P(X \geq x)$ $k: x \mapsto P(X > x)$
 c) Wie kann man die Funktionsterme $g(x)$, $h(x)$ und $k(x)$ aus **b)** durch $F(x)$ und $W(x)$ ausdrücken, wenn F die kumulative Verteilungsfunktion aus **a)** und W die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X sind?

41. Jede Zahl x , für die sowohl $P(X \leq x) \geq p$ als auch $P(X \geq x) \geq 1 - p$ gilt, heißt **Quantil p -ter Ordnung** der Zufallsgröße X . (Siehe Figur 193.1.) Einige Quantile werden besonders häufig verwendet und haben daher eigene Namen*, und zwar
Median für $p = \frac{1}{2}$,
erstes oder unteres Quartil für $p = \frac{1}{4}$ und
drittes oder oberes Quartil für $p = \frac{3}{4}$.

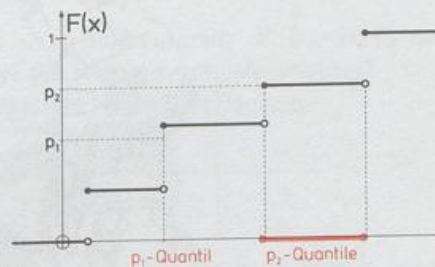


Fig. 193.1 Quantile der Ordnung p_1 bzw. p_2 .

* lat.: *quantus*? = wie groß? - *quarta* = der 4. Teil - *medianus* = in der Mitte liegend.
 Den Ausdruck »Median« prägte 1843 *Antoine Augustin Cournot* (1801–1877). »Quartil« führte 1879 *Donald McAlister* (1854–1934) ein, die Verallgemeinerung »Quantil« 1940 *Maurice George Kendall* (1907–1983). 1885 bildete *Francis Galton* (1822–1911) die **Percentile** zu $p = 0,01$.

- a) Berechne zur Zufallsgröße X aus Aufgabe 40 die Mediane, die ersten Quartile, die dritten Quartile und die Quantile der Ordnung 90%.
- b) Für welche p -Werte ist die Zahl 2 bzw. die Zahl 2,5 ein Quantil p -ter Ordnung?

Zu 11.3.

42. Die Zufallsgröße X sei die Augenzahl beim Wurf eines Laplace-Würfels. Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen und die Erwartungswerte folgender Zufallsgrößen:

$$A := X + 1 \quad B := 2X \quad C := 2X + 1 \quad D := (X - 3,5)^2 \quad Z := e^X$$

43. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Adler beim 4fachen Wurf einer Laplace-Münze. Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen und die Erwartungswerte folgender Zufallsgrößen:

$$\begin{aligned} A &:= X - 2 & B &:= |X - 2| & C &:= (X - 2)^2 \\ D &:= (X - 2)^3 & E &:= \sin \frac{1}{2} \pi X & F &:= \sin \pi X \end{aligned}$$

Zu 11.4.

44. Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Augenzahl«
- beim Wurf mit einem Laplace-Würfel,
 - beim Wurf mit einem Astragalus (siehe Seite 46f.).
45. Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Augensumme« beim Wurf zweier Laplace-Würfel.
46. a) Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Anzahl der ausgestreckten Finger« beim Morraspiel (siehe Aufgabe 187/9).
- b) Zeichne in ein Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße den Erwartungswert und die Standardabweichung ein.

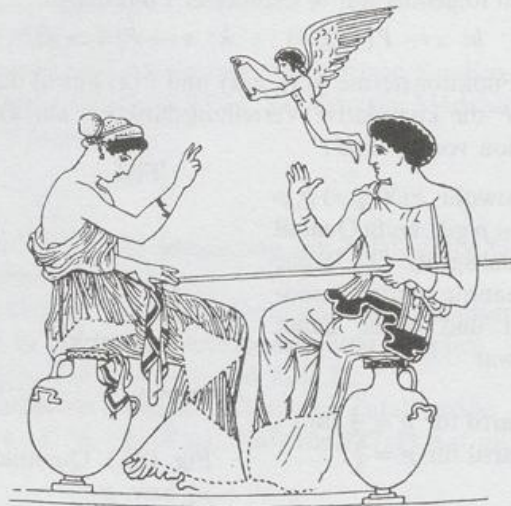


Fig. 194.1 Zwei junge Frauen beim Morra-Spiel – Rotfigurige attische Hydria aus Nola, um 420 v. Chr. – Slg. ex Czartoryski, Warschau, Nationalmuseum

- 47. Berechne jeweils Erwartungswert und Varianz für die Zufallsgröße »Augenzahl eines Efron-Würfels« aus Aufgabe 160/26.
- 48. Berechne jeweils Erwartungswert und Varianz für die Zufallsgröße »Sektorzahl« eines Glücksrads nach *D. Morgenstern* aus Aufgabe 161/27.
- 49. Berechne die Standardabweichungen der Zufallsgrößen X und Y von Aufgabe 188/13.
- 50. Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Auszahlung« von Aufgabe 188/16.
- 51. Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Auszahlung« von Aufgabe 188/17.
- 52. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Note« beim würfelnden Lehrer (Aufgabe 67/13).
- 53. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Spieldauer« des Wurfspiels (engl. darts) aus Aufgabe 67/12. a).
- 54. a) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Spieldauer« des Spiels »Ziehen einer schwarzen Kugel« aus Aufgabe 67/10.
b) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Spieldauer« unter der Bedingung, daß Berta siegt.
- 55. Die Zufallsgröße X nimmt die Werte 0 und 1 mit den Wahrscheinlichkeiten q bzw. p an. Zeige, daß $E X = p$ und $\text{Var } X = pq$ ist.
- 56. Eine Zufallsgröße nehme die Werte $1, 2, \dots, n$ an und sei gleichmäßig verteilt. Berechne Erwartungswert und Varianzwert dieser Zufallsgröße.
- 57. Bei 2 Parallelklassen ergaben sich bei einer Prüfung folgende Notenverteilungen:

Note	1	2	3	4	5	6
Klasse a	0	4	7	5	3	1
Klasse b	1	3	5	7	4	0

- a) Zeichne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsgrößen $X_i :=$ »Note eines beliebig aus Klasse i ausgewählten Schülers«, $i = a, b$.
- b) Zeige, daß die Erwartungs- und Varianzwerte der beiden Zufallsgrößen übereinstimmen, obwohl die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen verschieden sind.
- 58. Bei Plattenspielern kommt es darauf an, daß die Drehzahl möglichst konstant bleibt. Die Antriebsmotoren zweier Firmen A und B werden getestet. Dabei werden die Abweichungen vom Sollwert in 4 Stufen angegeben. Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer solchen Abweichung gilt:

Abweichungsgrad	0	1	2	3
Firma A	0,70	0,20	0,06	0,04
Firma B	0,76	0,04	0,20	0

Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße »Abweichungsgrad« X_i ($i = A, B$) und die Standardabweichungen. Welche Firma liefert die besseren Antriebsmotoren?

- 59. Zwei Schulaufgaben ergaben in zwei Klassen folgende Notenverteilungen:

Note	1	2	3	4	5	6	μ
Schülerzahl Klasse 1	5	2	5	5	2	1	3,0
Schülerzahl Klasse 2	1	2	13	10	8	6	4,0

Schüler A hat in Klasse 1 die Note 2 erhalten, Schüler B in Klasse 2 die Note 3. Beide liegen also um 1 Notenstufe über ihrem Klassenmittel. Welcher Schüler hat relativ zu seiner Klasse besser abgeschnitten?

- 60. In einer Schulaufgabe erreicht ein Schüler 32 Punkte in Algebra und 27 Punkte in Geometrie. Durchschnittlich wurden in Algebra 26 Punkte, in Geometrie 22 Punkte erreicht. In welchem Fach war der Schüler besser, wenn die zugehörigen Standardabweichungen 5,8 bzw. 4,5 betragen?

Zu 11.5.

61. Beim Wurf einer L-Münze werde vereinbart: Fällt Zahl, so verfällt der Einsatz von 1 DM. Fällt Wappen, so werden 2 DM ausgezahlt.
- a) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße Gewinn.
- b) Zeige, daß in der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* (Satz 184.1) für $a = 1$ hier das Gleichheitszeichen gilt; d. h., daß das *Tschebyschow*-Risiko hier gleich dem wahren Risiko ist.
- c) Berechne $P(|X - \mu| \geq a)$ für $a = 0,5$ und $a = 2$.
Vergleiche damit die jeweilige Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeit durch die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*.
62. In einer Urne liegen vier Kugeln, die mit den Zahlen 0, 1, 2 und 3 beschriftet sind. Man zieht zwei Kugeln zugleich. Die Zufallsgröße X sei die größere der beiden gezogenen Zahlen. Berechne $P(|X - \mu| \geq a)$ und untersuche die Genauigkeit der *Tschebyschow*-Abschätzung für
- a) $a = 1$, b) $a = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, c) $a = 3$, d) $a = 10$.
63. X sei die Augensumme beim Wurf zweier L-Würfel. Bestimme $P(|X - \mu| < a)$ für $a = 2$, $a = \sigma$, $a = 2\sigma$ und $a = 3\sigma$ und vergleiche dazu jeweils die Abschätzung durch die *Tschebyschow*-Ungleichung.
64. Für die Zufallsgröße X gelte $\text{Var} X = 2$. Wie groß muß a gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße Werte annimmt, die sich um weniger als a vom Erwartungswert unterscheiden, mindestens
- a) 50%, b) 90%, c) 95%, d) 99% beträgt?
65. Als *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung wird für nicht-konstante Zufallsgrößen X manchmal auch die Abschätzung

$$P(|X - \mu| > a) < \frac{\text{Var} X}{a^2}$$

bezeichnet.

- a) Beweise diese Form der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*.
- b) Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $P(|X - \mu| \leq a)$?
66. Eine Zufallsgröße X besitzt die Verteilung
- | x | $-t$ | 0 | t |
|--------|------------------|---------------------|------------------|
| $W(x)$ | $\frac{1}{2t^2}$ | $1 - \frac{1}{t^2}$ | $\frac{1}{2t^2}$ |
- Berechne $\mathcal{E} X$ und $\text{Var} X$ und zeige, daß für $a = t\sigma$ die *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung zu einer Gleichung wird.
67. Beweise: Ist Y eine nicht negative Zufallsgröße mit endlichem Erwartungswert, und ist $k > 0$, dann gilt $P(Y \geq k) \leq \frac{\mathcal{E}(Y)}{k}$.
- Welche Abschätzung ergibt sich für $P(Y > k)$?
68. Beweise die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* mit Hilfe des Satzes von Aufgabe 67.