UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

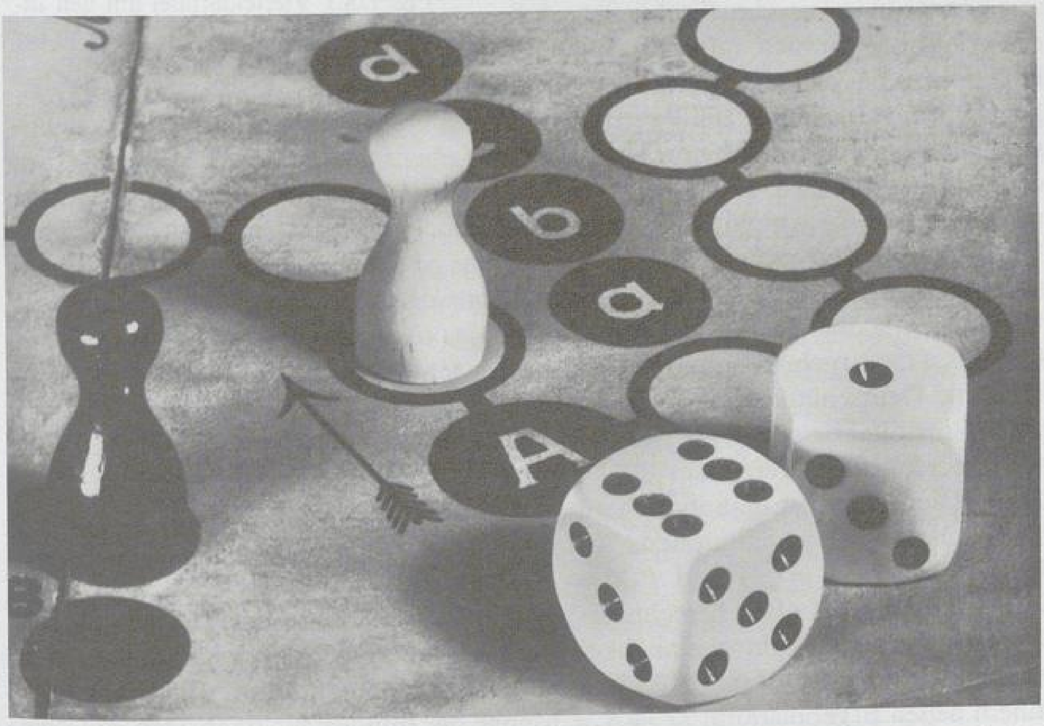
München, [20]03

9. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Visual Library

9. Bedingte Wahrscheinlichkeiten



Beim »Mensch ärgere dich nicht« darf man bis zu 3mal versuchen, durch Werfen einer Sechs herauszukommen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{91}{1296} \approx 7{,}0\,\%$ kann der Schwarze den Weißen schlagen. Aber er schlägt ihn mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$, falls er herauskommt. – Erfunden wurde dieses Spiel 1905 von dem Münchner *Josef Friedrich Schmidt* (1871–1948). 1912 nahm er die Produktion auf. Aber niemand wollte es für 35 Pf kaufen. Daher schenkte *Schmidt* seinen Bestand von 3000 Spielen 1914 dem Deutschen Roten Kreuz: In Lazaretten, Soldatenheimen und schließlich sogar in Schützengräben wurde es gespielt. Bis Kriegsende 1918 war die erste Million von Spielen abgesetzt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

9. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

9.1. Einführung

Problem: Leben deutsche Frauen länger als deutsche Männer?
Ein Blick in das *Statistische Jahrbuch* gibt uns erste Informationen: Am 1.1.1970 waren 4,8 Millionen von den 61,2 Millionen Einwohnern der Bundesrepublik Deutschland mindestens 70 Jahre alt. Von den 29,2 Millionen Männern waren 1,7 Millionen über 70 Jahre alt (siehe Figur 128.1). Der Anteil der Männer an der Gesamtbevölkerung betrug damals also $\frac{29{,}2 \text{ Mill.}}{61{,}2 \text{ Mill.}} \approx 47{,}7\%$, der Anteil der Männer an den mindestens 70jährigen jedoch $\frac{1{,}7 \text{ Mill.}}{4{,}8 \text{ Mill.}} \approx 35{,}4\%$.
Der Anteil der Männer unter den »Alten« ist somit kleiner als unter der Gesamtbevölkerung. (Das Bild des Altersaufbaus auf Seite 29 zeigt dies anschaulich.) Daraus könnte man vorschnell schließen, daß die deutschen Frauen tatsächlich länger lebten als die deutschen Männer. Eine genauere Untersuchung müßte jedoch auch noch weitere Faktoren berücksichtigen, wie etwa den Einfluß von Kriegen, von Lebensgewohnheiten wie etwa Rauchen oder Trinken usw. Dementsprechend müßte dann auch die Fragestellung präzisiert und die Antwort differenziert werden.

	S	$\bar{S}$	
M	1,7 Mill.		29,2 Mill.
$\bar{M}$			
	4,8 Mill.		61,2 Mill.

Fig. 128.1 Vierfeldertafel mit den Informationen über alte Männer in der Bundesrepublik Deutschland

Überlegungen der vorstehenden Art führen uns zu einem neuen Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dazu denken wir uns die oben berechneten Anteile als Wahrscheinlichkeiten des Zufallsexperiments »Auswahl einer Person auf gut Glück«. Der Ergebnisraum Ω ist hier die Menge der Einwohner der Bundesrepublik Deutschland. Die Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, ist für jeden Einwohner gleich groß; also liegt ein Laplace-Experiment vor. Wir betrachten dabei folgende Ereignisse:
$M :=$ »Die Person ist männlich« und
$S :=$ »Die Person ist mindestens 70 Jahre alt«.
Damit gilt: $P(M) = \frac{292}{612}$ und $P(S) = \frac{48}{612}$ und $P(M \cap S) = \frac{17}{612}$.
Läßt sich nun das oben berechnete Verhältnis $\frac{17}{48} \approx 35{,}4\%$ der Männer zu den »Alten« auch als Wahrscheinlichkeit deuten? Der Quotient zeigt, daß es sich tatsächlich um eine Laplace-Wahrscheinlichkeit handeln kann, allerdings über einem neuen Ergebnisraum $\Omega' := S =$ Menge der mindestens 70jährigen, auf dem man eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P' festlegt. $P'(M)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine aus den mindestens 70jährigen ausgewählte Person ein Mann ist.

Es gilt $P'(M) = \dfrac{|M \cap S|}{|S|} = \dfrac{17}{48}$. Diese Zahl läßt sich auch als Quotient zweier Wahrscheinlichkeiten über dem ursprünglichen Ergebnisraum Ω deuten: Es gilt nämlich

$$\frac{|M \cap S|}{|S|} = \frac{|M \cap S| / |\Omega|}{|S| / |\Omega|} = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}.$$

Dieser Quotient wird üblicherweise als »(bedingte) Wahrscheinlichkeit von M unter der Bedingung S« bezeichnet. Man verwendet dafür das Symbol $P_S(M)$ und definiert allgemein:

Definition 129.1: (Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ist B ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit und A ein beliebiges Ereignis,

dann heißt $P_B(A) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

die **(bedingte) Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.**

Bemerkungen:

1) Für $P_B(A)$ sind außer der angegebenen Sprechweise auch noch andere im Gebrauch. So liest man $P_B(A)$ auch als »Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
   - unter der Voraussetzung, daß B eingetreten ist«
   - unter der Annahme, daß B eingetreten ist«
   - unter der Voraussetzung, daß B eintritt«
   - unter der Annahme, daß B eintritt«
   -, wenn man schon weiß, daß B bereits eingetreten ist«
   -, falls B«
   - unter der Hypothese B«.
2) Statt $P_B(A)$ findet man in der Literatur auch die Bezeichnung $P(A|B)$, die allerdings problematisch ist, da es sich bei $A|B$ um keine Menge und damit auch um kein Ereignis handelt. Darüber hinaus macht das Symbol $P(A|B)$ nicht ausreichend klar, daß es sich bei der bedingten Wahrscheinlichkeit um eine im allgemeinen von der ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung P verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilung P_B handelt.

In Definition 129.1 gaben wir dem Quotienten $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ den Namen einer Wahrscheinlichkeit. Wir müssen noch zeigen, daß dies zulässig ist, d.h., daß es sich bei P_B überhaupt um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt.

Satz 129.1: Sind (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $P(B) \neq 0$, dann ist $P_B : A \mapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω.

Beweis: Wir benützen, daß P als Wahrscheinlichkeitsverteilung die 3 Axiome von *Kolmogorow* (Seite 80) erfüllt, und weisen nach, daß dies auch für P_B gilt.

1) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geqq 0$, da Zähler und Nenner nicht negativ sind.

2) $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

3) Offensichtlich folgt aus der Unvereinbarkeit von A_1 und A_2 auch die Unvereinbarkeit von $A_1 \cap B$ und $A_2 \cap B$. (Siehe Figur 130.1 und Aufgabe 139/7.) Damit gilt dann

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{P([A_1 \cup A_2] \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P([A_1 \cap B] \cup [A_2 \cap B])}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\ &= P_B(A_1) + P_B(A_2). \end{aligned}$$

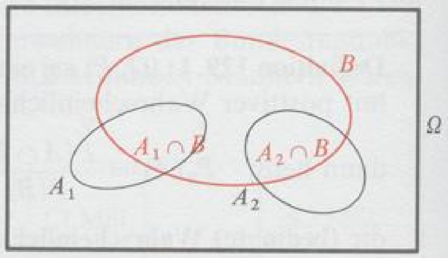


Fig. 130.1
$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$

Den Übergang von P zu P_B kann man sich anschaulich folgendermaßen vorstellen. Man hält am einmal gewählten Ergebnisraum Ω fest und ordnet allen Elementarereignissen $\{\omega_i\}$ mit $\omega_i \notin B$ die Wahrscheinlichkeit 0 zu. Dadurch wird die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 neu verteilt auf diejenigen Elementarereignisse $\{\omega_k\}$, für die $\omega_k \in B$ gilt. Für diese $\{\omega_k\}$ erhält man dann

$$P_B(\{\omega_k\}) = \frac{1}{P(B)} \cdot P(\{\omega_k\}).$$

Die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten dieser Elementarereignisse werden also mit dem Faktor $\frac{1}{P(B)}$ multipliziert, was jedoch im allgemeinen nicht für beliebige Ereignisse A gilt! Wegen der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsbelegung der Elementarereignisse aus Ω durch P_B ist also P_B insbesondere keine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω, selbst dann nicht, wenn P gleichmäßig ist.
Im übrigen könnte man auf bedingte Wahrscheinlichkeiten völlig verzichten, wenn man den Ergebnisraum wechselt und B als neuen Ergebnisraum Ω' wählt.

Diese Überlegungen sollen verdeutlicht werden durch das folgende
Beispiel: Eine Urne enthält 4 rote, 3 schwarze und eine grüne Kugel. Man zieht zweimal ohne Zurücklegen je eine Kugel. Auf Seite 55 errechneten wir auf $\Omega = \{\text{rr, rs, rg, sr, ss, sg, gr, gs}\}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung P:

ω	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs
$P(\{\omega\})$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{56}$

Wählt man als Bedingung das Ereignis $B :=$ »Die erste Kugel ist rot« $= \{\text{rr, rs, rg}\}$ mit $P(B) = \frac{1}{2}$, so erhält man die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung P_B auf Ω:

ω	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs
$P_B(\{\omega\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	0	0	0

Es wird also die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf diejenigen Ergebnisse verteilt, die r an erster Stelle haben; z.B.

$$P_B(\{rs\}) = \frac{1}{P(B)} \cdot P(\{rs\}) = \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{7}.$$

Wählen wir B als neuen Ergebnisraum Ω', so können wir auf den Begriff »bedingte Wahrscheinlichkeit« verzichten. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitsverteilung P' auf $\Omega' = \{rr, rs, rg\}$. Dabei beschreiben die Ergebnisse aus Ω' die Farbe der zweiten Kugel, die aus einer Urne mit 3 roten, 3 schwarzen und einer grünen Kugel gezogen wird. Diese neue Urne entsteht aus der ursprünglichen Urne durch Ziehen einer roten Kugel. Es gilt:

ω'	rr	rs	rg
$P'(\{\omega'\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

Der Anfänger neigt dazu, $P_B(A)$ mit $P(A \cap B)$ zu verwechseln, weil die umgangssprachlichen Beschreibungen dieser Wahrscheinlichkeiten sehr ähnlich klingen. (Vgl. Aufgabe 138/**1**.) In beiden Fällen handelt es sich tatsächlich ja auch um dieselbe Menge $A \cap B$. Bei $P(A \cap B)$ bezieht man die Überlegungen auf die Gesamtmenge Ω. Bei $P_B(A)$, was ja dasselbe ist wie $P_B(A \cap B)$ – vergleiche Aufgabe 139/**6. a)** –, ist die Bezugsmenge jedoch nur noch die Teilmenge B. Die 4-Feldertafel von Figur 131.1 veranschaulicht diesen Unterschied. Man achte also sorgfältig auf die gegebene Aufgabenstellung, um die Verwechslung zu vermeiden.

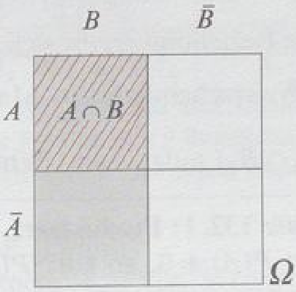


Fig. 131.1 $A \cap B$ als Teilmenge von Ω bzw. als Teilmenge von B

9.2. Die Wahrscheinlichkeit von *Und*-Ereignissen und die 1. Pfadregel

Figur 132.1 zeigt das Baumdiagramm für zweimaliges Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 4 roten, 3 schwarzen und einer grünen Kugel. Dabei bedeute z.B. $R_i :=$ »Rot beim i-ten Zug«. Über den Ergebnissen der jeweiligen Stufe sind die Ereignisse notiert, zu denen der Pfad bis dahin führt. Die Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen entpuppen sich nach dem, was wir gerade gelernt haben, als bedingte Wahrscheinlichkeiten über Ω. So gilt z.B. für die Wahrscheinlichkeit, beim 2. Zug eine rote Kugel zu ziehen, falls der 1. Zug eine rote Kugel ergab, $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{7}$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

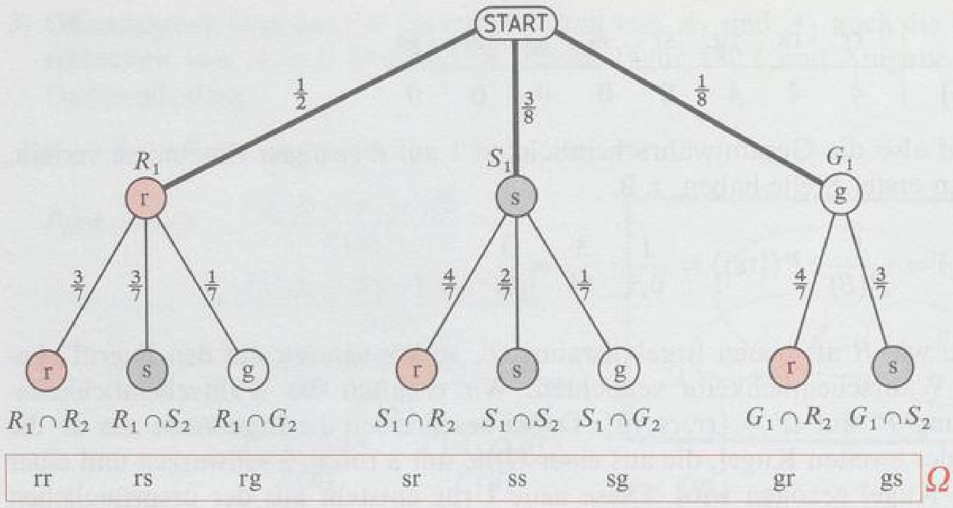


Fig. 132.1 Baumdiagramm zur Urne aus **9.2**.

Die 1. Pfadregel liefert uns den Zusammenhang zwischen der *Und*-Wahrscheinlichkeit $P(R_1 \cap R_2)$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(R_1)$ und $P_{R_1}(R_2)$:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P_{R_1}(R_2).$$

Diese Beziehung ergibt sich aber auch unmittelbar aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Man braucht nämlich $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)}$ nur nach $P(R_1 \cap R_2)$ aufzulösen! Wir merken uns diese wichtige Beziehung allgemein als

> **Satz 132.1: Produktsatz.**
> Ist $P(A) \neq 0$, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Der Produktsatz ist die wichtigste Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit. Oft sind nämlich $P(A)$ und $P_A(B)$ bekannt, und $P(A \cap B)$ wird gesucht.

Die 1. Pfadregel für längere Pfade liefert uns auch gleich Formeln für die Wahrscheinlichkeiten mehrfacher *Und*-Ereignisse. So gilt z.B. für 3 Ereignisse (vgl. Figur 132.2) ein Produktsatz der Form

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C), \text{ falls } P(A \cap B) \neq 0 \text{ ist.}$$

Die Produktsätze sind nichts anderes als ein algebraischer Ausdruck der 1. Pfadregel. Da zu ihrem Beweis (vgl. Aufgabe 142/**28**) nur die Eigenschaften der Wahr-

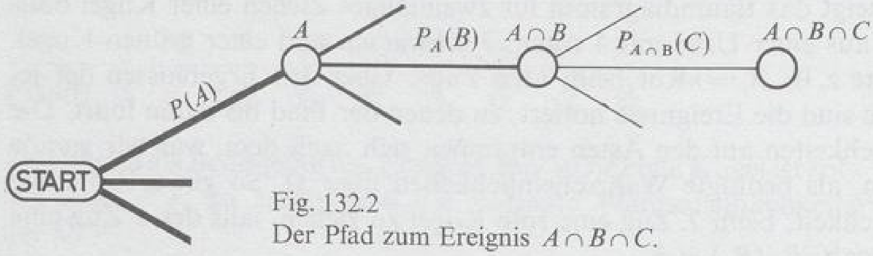


Fig. 132.2
Der Pfad zum Ereignis $A \cap B \cap C$.

scheinlichkeitsverteilung P und die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit benötigt werden, ist hiermit also nachträglich die Verwendung der 1. Pfadregel gerechtfertigt.
Abraham de Moivre (1667–1754) formulierte diese Produktsätze 1738 in der 2. Auflage seiner *Doctrine of Chances.**

9.3. Die totale Wahrscheinlichkeit und die 2. Pfadregel

Beispiel: Bei der Wahl zum 1. Deutschen Bundestag (1949) verteilten sich die abgegebenen Stimmen und die für die FDP wie folgt auf die damaligen Länder:

Nr.	Bundesland	Anteil der Wähler in %	Anteil der FDP in %
1	Baden-Württemberg	11,7	17,6
2	Bayern	19,8	8,5
3	Bremen	1,3	12,9
4	Hamburg	3,8	15,8
5	Hessen	9,2	28,1
6	Niedersachsen	14,0	7,5
7	Nordrhein-Westfalen	28,2	8,6
8	Rheinland-Pfalz	6,2	15,8
9	Schleswig-Holstein	5,8	7,4

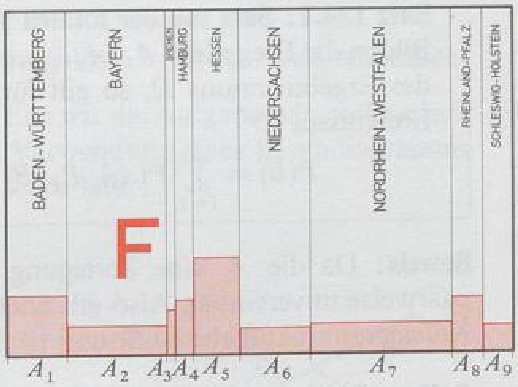


Fig. 133.1 Wähleranteile und Stimmenanteile der FDP in den 9 Bundesländern bei der Wahl zum 1. Deutschen Bundestag

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Wähler FDP gewählt?
Wir nehmen als Ergebnisraum Ω dieses Zufallsexperiments die Menge aller Wähler und betrachten die Ereignisse $F :=$ »Der Wähler hat seine Stimme der FDP gegeben« und $A_i :=$ »Der Wähler stammt aus dem i-ten Bundesland«. Die Ereignisse A_i bilden eine Zerlegung von Ω, da sie paarweise unvereinbar sind und ihre Vereinigung ganz Ω ergibt. Wegen der paarweisen Unvereinbarkeit der A_i sind auch die Ereignisse $F \cap A_i$ mit paarweise unvereinbar; außerdem gilt $F = \bigcup\limits_{i=1}^{9} F \cap A_i$, was Figur 133.1 anschaulich zeigt.

Mit dem verallgemeinerten 3. Axiom von *Kolmogorow* (Aufgabe 82/5) können wir nun die Wahrscheinlichkeit $P(F)$ des gesuchten Ereignisses F berechnen:

$$P(F) = P(\bigcup_{i=1}^{9} F \cap A_i) = \sum_{i=1}^{9} P(F \cap A_i).$$

Mit Hilfe des Produktsatzes 132.1 läßt sich diese Summe umformen zu

$$P(F) = \sum_{i=1}^{9} P(A_i) \cdot P_{A_i}(F).$$

Auf der rechten Seite sind nun alle Wahrscheinlichkeiten bekannt; wir erhalten

* Satz 132.1 lautet bei ihm: "The Probability of the happening of two Events dependent, is the product of the Probability of the happening of one of them, by the Probability which the other will have of happening, when the first shall have been consider'd as having happen'd."

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$P(F) = 0{,}117 \cdot 0{,}176 + 0{,}198 \cdot 0{,}085 + 0{,}013 \cdot 0{,}129 + 0{,}038 \cdot 0{,}158 + 0{,}092 \cdot 0{,}281 + \\ + 0{,}140 \cdot 0{,}075 + 0{,}282 \cdot 0{,}086 + 0{,}062 \cdot 0{,}158 + 0{,}058 \cdot 0{,}074 = \\ = 0{,}119\,795 \approx 12\%.$$

Die im obigen Beispiel durchgeführte Überlegung gilt allgemein für jede Zerlegung eines Ergebnisraums (vgl. Figur 134.1):

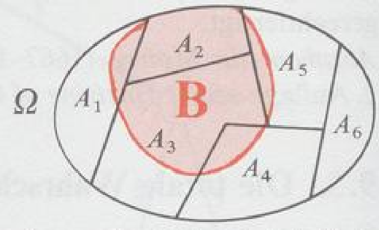


Fig. 134.1 Veranschaulichung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Satz 134.1: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.
Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung des Ergebnisraums Ω, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$

Beweis: Da die A_i eine Zerlegung von Ω bilden, sind die Ereignisse $B \cap A_i$ paarweise unvereinbar. Also gilt nach der Verallgemeinerung des 3. Axioms von *Kolmogorow* (Aufgabe 82/5) und nach dem Produktsatz 132.1

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B).$$

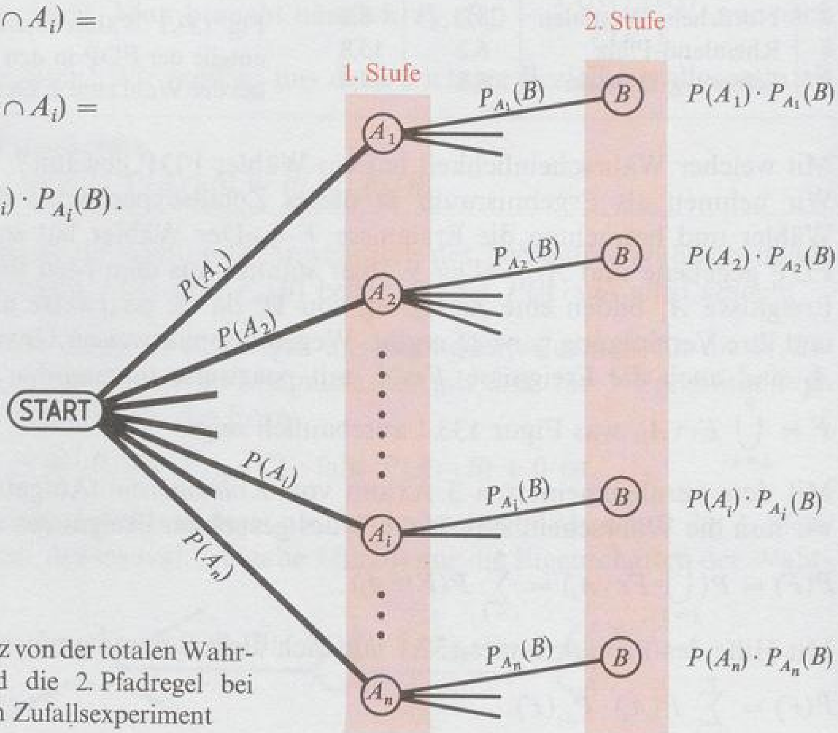


Fig. 134.2 Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und die 2. Pfadregel bei einem zweistufigen Zufallsexperiment

Wie man aus Figur 134.2 unmittelbar erkennt, ist der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit nichts anderes als die 2. Pfadregel für ein zweistufiges Zufallsexperiment.

9.4. Die *Bayes*-Formel*

Beispiel: In einem Ferienort in Oberbayern leben während der Hochsaison 5mal soviel Touristen wie Einheimische. 60% der Touristen tragen einen Trachtenhut, dagegen nur jeder 5. Einheimische. Auf der Straße begegnet uns während der Hochsaison ein Mensch mit Trachtenhut. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Einheimischer?

Bedeuten $E :=$ »Der Mensch ist einheimisch« und $H :=$ »Der Mensch trägt einen Trachtenhut«, so gilt $P(E) = \frac{1}{6}$, $P_E(H) = \frac{1}{5}$ und $P_{\bar{E}}(H) = \frac{3}{5}$. Gesucht ist $P_H(E)$. Es handelt sich also um ein **Umkehrproblem:** Aus bekanntem $P_E(H)$ soll das unbekannte $P_H(E)$ berechnet werden.

Wegen $P_H(E) = \dfrac{P(H \cap E)}{P(H)}$ wäre das Problem gelöst, wenn die Wahrscheinlichkeiten $P(H)$ und $P(H \cap E)$ bekannt wären. Ehe wir die Aufgabe rein rechnerisch angehen, wollen wir zeigen, daß sie sich bei Verwendung eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel besonders einfach lösen läßt.

1) Lösung mit Hilfe eines Baumes

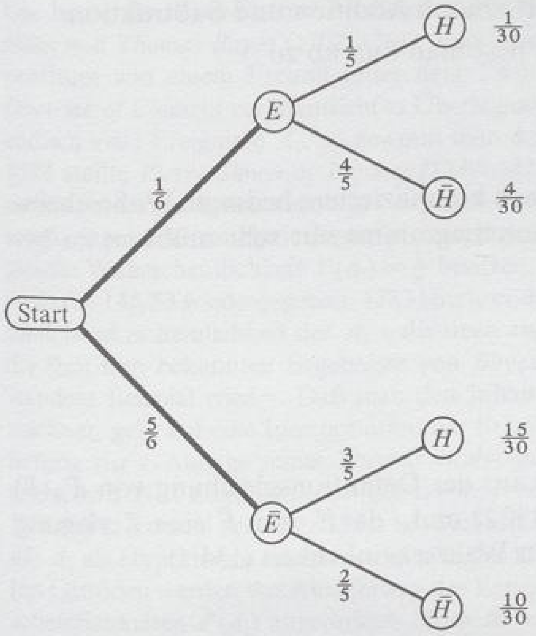


Fig. 135.1 Baum zum Umkehrproblem in üblicher Beschriftung

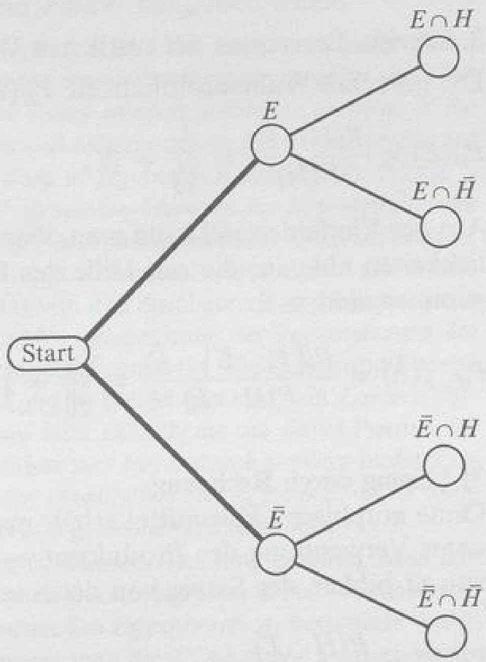


Fig. 135.2 Baum zum Umkehrproblem in ausführlicher Beschriftung

Dem Baum von Figur 135.1 entnimmt man

$P(H \cap E) = P(E \cap H) = \frac{1}{30}$ (1. Pfadregel),

$P(H) = P(E \cap H) + P(\bar{E} \cap H) = \frac{1}{30} + \frac{15}{30} = \frac{16}{30}$ (2. Pfadregel).

Also ist $P_H(E) = \frac{1}{16}$.

* gesprochen beız. – Siehe Seite 396.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Bemerkung: Der Baum von Figur 135.1 müßte eigentlich analog zu dem von Figur 132.1 beschriftet werden, was in Figur 135.2 ausgeführt ist. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir aber die oben angegebene vereinfachte Darstellung verwenden.

2) Lösung mit Hilfe einer Vierfeldertafel

	H	$\bar{H}$	
E			$\frac{1}{6}$
$\bar{E}$			$\frac{5}{6}$

$P_E(H) = \frac{1}{5}$

$P_{\bar{E}}(H) = \frac{3}{5}$

	H	$\bar{H}$	
E	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$
$\bar{E}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$		$\frac{5}{6}$

	H	$\bar{H}$	
E	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$
$\bar{E}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{25}{30}$
	$\frac{16}{30}$	$\frac{14}{30}$	

Man erhält die vollständige Vierfeldertafel in 3 Schritten:

1. Schritt: Eintragen des gegebenen $P(E)$ und damit auch von $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.
2. Schritt: Ausfüllen der Felder für $P(E \cap H)$ und $P(\bar{E} \cap H)$ mit Hilfe der gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten und des Produktsatzes.
3. Schritt: Berechnen der restlichen Werte durch Addition und Subtraktion.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_H(E)$ liest man nun ab zu

$$P_H(E) = \frac{P(H \cap E)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{16}{30}} = \frac{1}{16}.$$

Aus der Vierfeldertafel kann man aber auch kompliziertere bedingte Wahrscheinlichkeiten ablesen, die mit Hilfe des Baumdiagramms nur sehr mühsam zu bestimmen sind, z. B.

$$P_{H \cup E}(\bar{E}) = \frac{P([H \cup E] \cap \bar{E})}{P(H \cup E)} = \frac{\frac{15}{30}}{\frac{20}{30}} = \frac{3}{4}.$$

3) Lösung durch Rechnung

Ohne graphische Hilfsmittel erhält man aus der Definitionsgleichung von $P_H(E)$ unter Verwendung des Produktsatzes (132.1) und, da E und $\bar{E}$ eine Zerlegung von Ω bilden, des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit (134.1)

$$\begin{aligned} P_H(E) &= \frac{P(H \cap E)}{P(H)} = \\ &= \frac{P(E) \cdot P_E(H)}{P(E) \cdot P_E(H) + P(\bar{E}) \cdot P_{\bar{E}}(H)} = \\ &= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}} = \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Unser vorgeführtes Problem war zwar typisch, aber einfach, da die Zerlegung von Ω durch 2 Ereignisse bewirkt wurde. Im allgemeinen Fall liegt eine Zerlegung von Ω durch n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vor. Man kann dann einen Baum mit $2n$ Ästen und statt der 4-Feldertafel eine $2n$-Feldertafel zeichnen. Zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit $P_B(A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$ wendet man auf den Zähler den Produktsatz und auf den Nenner den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit an und erhält

Satz 137.1: ***Bayes*-Formel.**
Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung von Ω und ist B ein Ereignis mit $P(B) \neq 0$, so gilt für jedes i

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)}.$$

Sonderfall für $n = 2$:
Mit $A_1 = A$ und $A_2 = \bar{A}$ gilt $P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$.

Die heute als *Bayes*-Formel bezeichnete Gleichung von Satz 137.1 stammt in dieser Form nicht von *Thomas Bayes* (1702–1761). Verallgemeinert man jedoch einerseits seine erst 1763 posthum von einem Freund unter dem Titel *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* veröffentlichten Überlegungen und reduziert diese dann andererseits auf endlich viele Ereignisse A_i, so gewinnt man den oben angegebenen Ausdruck für $P_B(A_i)$. 1774 stellte *Pierre Simon de Laplace* (1749–1827)* in seinem *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènemens* die obige Formel als Prinzip** an den Beginn seiner Untersuchungen, setzte dabei aber im Sinne *Bayes*' – ohne *Bayes*' Arbeit zu kennen – voraus, daß alle A_i die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(A_i) = \frac{1}{n}$ besitzen. Das von ihm durchgerechnete Beispiel ist in Aufgabe 145/**53** wiedergegeben. 1783 leitete er dann*** – wieder unter der Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit der A_i – die oben angegebene Formel für $P_B(A_i)$ her und beweist die ihm nun bekannten Ergebnisse von *Bayes*. Aufgabe 146/**54** gibt das von *Laplace* verwendete Beispiel wieder. Daß man den Inhalt von Satz 137.1 heute als *Bayes*-Formel bezeichnet, geht auf eine Interpretation der Erkenntnisse von *Bayes* durch *Laplace* in der Einleitung zur 2. Auflage seiner *Théorie Analytique des Probabilités* (1814) zurück, die er auch unter dem Titel *Essai philosophique sur les probabilités* getrennt veröffentlichte.
Die *Bayes*-Formel von Satz 137.1 hat vielfach eine interessante Deutung erfahren. Man faßt die A_i als Hypothesen oder Ursachen für das Eintreten eines Ereignisses B auf. Aus bestimmten Gründen werden vor Ausführung des Experiments den Hypothesen A_i bestimmte Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ zugeordnet. Nach *Bayes* nennt man die $P(A_i)$ daher **a-priori-Wahrscheinlichkeiten******. Weiß man aber über die Hypothesen A_i nichts, dann ist es nach *Bayes* gerechtfertigt, sie als gleichwahrscheinlich anzunehmen. Hinsichtlich B ist bekannt, daß es

* 1774 nennt er sich noch *de la Place*.

** PRINCIPE. – Si un évènement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'évènement, sont entre elles comme les probabilités de l'évènement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles, est égale à la probabilité de l'évènement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'évènement prises de chacune de ces causes.

*** *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres* (Suite).

**** Man beachte, daß die Begriffe *a priori* und *a posteriori* bei *Bayes* eine andere Bedeutung als bei *Jakob Bernoulli* haben. (Siehe Seite 70ff. und Seite 251.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

mit der Wahrscheinlichkeit $P_{A_i}(B)$ eintritt, falls A_i eintritt. Nun trete bei einem Versuch das Ereignis B ein. Dann ist $P_B(A_i)$ für jedes i die **a-posteriori-Wahrscheinlichkeit** dafür, daß A_i Ursache von B ist. Man wird daraufhin die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ überdenken und u.U. für die Hypothesen A_i andere Wahrscheinlichkeitswerte annehmen. (Vgl. hierzu die Aufgaben 146/**56** und 146/**57**.)

Eine wichtige Anwendung der *Bayes*-Formel findet sich bei der computerunterstützten Diagnosestellung. Die A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sind mögliche Krankheiten, die das Symptom B auslösen können. Oft kennt man die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ für das Auftreten der Krankheiten sowie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{A_i}(B)$ für das Auftreten des Symptoms B, falls die Krankheit A_i vorliegt. Mit Hilfe der *Bayes*-Formel läßt sich nun die Wahrscheinlichkeit $P_B(A_i)$ für das Vorliegen der Krankheit A_i, falls das Symptom B auftritt, bestimmen.

Problematisch dabei ist, ob die A_i eine Zerlegung von Ω sind, d.h., ob bei einem Patienten nicht mehrere dieser Krankheiten A_i gleichzeitig auftreten können. Auch sind die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ bzw. $P_{A_i}(B)$ oft nur ungenau bekannt und hängen zudem z.B. vom Patientenkreis und von der Gegend ab. So ist etwa die Wahrscheinlichkeit für Tbc bei den Patienten eines Internisten größer als bei denen eines Orthopäden.

Aufgaben

Zu 9.1.

1. **a)** Schreibe unter Verwendung der Ereignisse M und S aus dem Problem von Seite 128 in Symbolen
   1) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein männlicher Einwohner der Bundesrepublik Deutschland mindestens 70 Jahre alt ist,
   2) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Einwohner der Bundesrepublik Deutschland ein mindestens 70jähriger Mann ist,
   3) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein mindestens 70jähriger Einwohner der Bundesrepublik Deutschland ein Mann ist.
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten von Aufgabe **a)**.
2. Zeige die Richtigkeit der zum Titelbild dieses Kapitels gehörenden Behauptung (Seite 127).
3. Jemand wählt auf gut Glück eine natürliche Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 100\}$ aus. Wir betrachten die Ereignisse
   $A :=$ »Die Zahl ist gerade«, $B :=$ »Die Zahl ist durch 3 teilbar«,
   $C :=$ »Die Zahl ist durch 4 teilbar« und $D :=$ »Die Zahl ist durch 12 teilbar«.
   a) Berechne $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ und $P(D)$.
   b) Drücke in Worten aus und berechne die Wahrscheinlichkeiten
   1) $P_A(B)$ und $P_B(A)$, **4)** $P_B(C)$ und $P_C(B)$,
   2) $P_A(C)$ und $P_C(A)$, **5)** $P_B(D)$ und $P_D(B)$,
   3) $P_A(D)$ und $P_D(A)$, **6)** $P_C(D)$ und $P_D(C)$.
4. Theodor wirft eine L-Münze 3mal. Im Nebenzimmer sitzt Dorothea, die sich für das Ereignis »Beim 2. Mal fällt Adler« interessiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses,
   a) falls Dorothea keinerlei Informationen besitzt,
   b) falls Dorothea von Theodor erfährt, daß
   1) mindestens zweimal Adler gefallen ist, **3)** höchstens zweimal Adler gefallen ist,
   2) genau zweimal Adler gefallen ist, **4)** der erste Wurf Adler zeigte,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

5) drei Adler gefallen sind,
6) kein Adler gefallen ist,
7) genau ein Seitenwechsel aufgetreten ist,
8) eine Seite genau einmal gefallen ist.

5. Zwei L-Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) der erste Würfel 6 zeigt unter der Bedingung, daß die Augensumme mindestens 10 ist;
b) die Augensumme mindestens 10 ist unter der Bedingung, daß der erste Würfel 6 zeigt.

6. a) Zeige: $P_B(A \cap B) = P_B(A)$.
b) Berechne $P_A(A)$, $P_{\bar{A}}(A)$, $P_\Omega(A)$ und $P_A(\Omega)$.

7. Zeige die Gültigkeit der zum Beweis von Satz 129.1 benützten Behauptung:
$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$ (Vergleiche Figur 130.1.)

8. a) Begründe: Für $\omega \in B$ gilt $P_B(\{\omega\}) \geqq P(\{\omega\})$.
b) Zeige, daß es trotz der Ungleichung aus **a)** Ereignisse A gibt, für die $P_B(A) < P(A)$ gilt.
c) Beweise: Sind A und B unvereinbar, dann gilt: $P_A(B) = P_B(A)$.
d) Beweise: Sind A und B gleichwahrscheinlich, und ist $P(A) \cdot P(B) > 0$, dann gilt: $P_A(B) = P_B(A)$.

9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Augensumme beim Wurf zweier Laplace-Würfel 7 ist, falls die Augensumme
a) ungerade, **b)** prim, **c)** gerade ist?

10. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme zweier Laplace-Würfel eine Primzahl, falls sie ungerade ist?

11. Man zieht 5 Karten aus einem Bridge-Spiel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es lauter Herzen unter der Bedingung, daß alle 5 Karten rot sind?

12. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Produkt zweier Ziffern gerade, falls die Summe der beiden Ziffern
a) gerade, **b)** 7, **c)** prim, **d)** durch 3 teilbar, **e)** größer als 5 ist?

13. Dorothea wirft 10 L-Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen lauter Wappen oben, falls
a) die erste Münze Wappen zeigt,
b) mindestens eine Münze Wappen zeigt,
•**c)** mindestens fünf Münzen Wappen zeigen?

14. Ein Vater von zwei Kindern sagt:
a) »Eines meiner zwei Kinder ist ein Junge.«
b) »Das ältere meiner zwei Kinder ist ein Junge.«
Wie groß ist in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auch das zweite Kind ein Junge ist, falls Knaben- und Mädchengeburt als gleichwahrscheinlich gelten? Verwende bedingte Wahrscheinlichkeiten. Vergleiche auch die Lösung auf Seite 101.

•**15.** Die 52 Karten eines Bridgespiels werden auf 4 Spieler verteilt.
a) Theodor sagt, er habe ein As. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens ein weiteres As besitzt?
b) Theodor sagt, er habe das Pik-As. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens ein weiteres As besitzt?
Verwende bedingte Wahrscheinlichkeiten. Vergleiche auch die Lösung auf Seite 101.

•**16. a)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige unter der Bedingung, daß man mindestens vier Richtige hat? (Lotto 6 aus 49)
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau 5 Richtige unter der Bedingung, daß man mindestens 4 Richtige hat? (Lotto 6 aus 49)
c) Bei der Übertragung der Ziehung der Lottozahlen (6 aus 49) fallen nach dem Zug der

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

vierten Kugel Bild und Ton aus. Begeistert ruft Dorothea Theodor zu: »Hol Champagner, wir haben schon vier Richtige!«
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit für
1) 6 Richtige, **2)** genau 5 Richtige?

17. a) Zwei Laplace-Würfel werden geworfen. Ist die Augensumme 9, 10 oder 11, dann gibt es einen Preis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Preis unter der Bedingung, daß der erste Würfel die Augenzahl i $(1 \leqq i \leqq 6)$ zeigt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Preis unter der Bedingung, daß mindestens ein Würfel die Augenzahl i zeigt?

18. Im Umgang mit dem Begriff der Bedingten Wahrscheinlichkeit ist Vorsicht geboten, wie das Paradoxon von *E. H. Simpson* aus dem Jahre 1951 zeigt. Es lautet:
Es kann sein, daß
einerseits zugleich $P_{B\cap C}(A) \geqq P_{\bar{B}\cap C}(A)$ und $P_{B\cap \bar{C}}(A) \geqq P_{\bar{B}\cap \bar{C}}(A)$ zutreffen,
andererseits aber $P_B(A) < P_{\bar{B}}(A)$ gilt.

Hierzu zwei Beispiele.
a) In der folgenden Tabelle ist für das Jahr 1910 sowohl die Zusammensetzung der Bevölkerung wie auch die der an Tuberkulose Gestorbenen nach Weißen und Farbigen aufgegliedert für die Städte New York und Richmond/Virginia wiedergegeben*:

	Gesamtbevölkerung		Todesfälle	
	New York	Richmond	New York	Richmond
Weiße	4675174	80895	8365	131
Farbige	91709	46733	513	155

Betrachte bezüglich eines beliebig ausgewählten Bürgers die Ereignisse $N :=$ »Er stammt aus New York«, $W :=$ »Er ist ein Weißer« und $T :=$ »Todesursache Tuberkulose« und zeige damit, daß die Tbc-Todesraten sowohl für Weiße wie auch für Farbige in Richmond niedriger waren als in New York, daß aber die Gesamt-Tbc-Todesrate in Richmond höher war als in New York. Identifiziere N, W und T mit A, B und C des Paradoxons.

b) Gegeben ist folgende 8-Felder-Tafel von Wahrscheinlichkeiten:

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B	$\frac{12}{52}$	$\frac{8}{52}$	$\frac{5}{52}$	$\frac{15}{52}$
$\bar{B}$	$\frac{2}{52}$	$\frac{4}{52}$	$\frac{3}{52}$	$\frac{3}{52}$
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Zeige, daß sowohl $P_{B\cap C}(A) > P_{\bar{B}\cap C}(A)$
als auch $P_{B\cap \bar{C}}(A) > P_{\bar{B}\cap \bar{C}}(A)$,
aber auch $P_B(A) = P_{\bar{B}}(A)$
zutreffen.

Was bedeuten die betreffenden Wahrscheinlichkeiten, wenn die Ereignisse bezüglich einer speziellen Krankheit folgende Bedeutung haben:
$A :=$ »Ein Erkrankter überlebt«,
$B :=$ »Ein Erkrankter wird mit einem neuen Medikament behandelt« und
$C :=$ »Ein Erkrankter ist männlich«?

19. Zwei L-Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist unter der Bedingung, daß die beiden Augenzahlen verschieden sind, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) genau ein Würfel 6 zeigt,
b) mindestens ein Würfel 6 zeigt,
c) der erste Würfel 6 zeigt,
d) die Augensumme 6 ist,
e) die Augensumme mindestens 6 ist?

* *Cohen, M. R. / Nagel, E., An Introduction to Logic and Scientific Method* (1934), Seite 449.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

20. Aus einem gut gemischten Bridge-Spiel werden nacheinander 3 Karten gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) die zweite Karte ein As ist,
b) die dritte Karte ein As ist,
c) die zweite Karte ein As ist, falls die erste Karte ein As ist,
d) die dritte Karte ein As ist, falls die erste Karte ein As ist,
e) die dritte Karte ein As ist, falls die zweite Karte ein As ist,
f) die dritte Karte ein As ist, falls die erste und die zweite Karte Asse sind,
g) die dritte Karte ein As ist, falls die erste Karte ein As und die zweite Karte kein As sind,
h) die dritte Karte ein As ist, falls die erste Karte das Herz-As ist,
i) die dritte Karte ein As ist, falls die erste Karte eine Herz-Karte ist,
•**j)** die dritte Karte ein As ist, falls die erste Karte eine Herz-Karte und die zweite Karte keine Herz-Karte sind.

•**21.** Die vier Spieler A, B, C und D erhalten je 13 Karten eines Bridge-Spiels.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat C, der Partner von A, das restliche As, falls A drei Asse hat?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat B oder D drei Herzkarten, falls A zehn Herzkarten in der Hand hat?

:**22.** Ein Spieler erhält 13 Karten eines Bridge-Spiels. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er 10 Herz-Karten, falls er mit den ersten 6 Karten 5 Herz-Karten bekam?

:**23.** Florian spielt Skat. Seine Hand von 10 Karten enthält genau 2 Buben.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Skat genau ein weiterer Bube liegt?
b) Florians Buben sind der Herz- und der Karobube. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt **1)** genau 1 Bube, **2)** nur der Kreuzbube im Skat?

24. In einer Gruppe sind 5 Franzosen, 10 Briten und 6 Deutsche. Zwei Personen werden ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau 1 Brite ausgelost wird, falls beide Personen verschiedener Nationalität sind? (Vgl. auch die Aufgaben 62/**37** und 62/**38**.)

Zu 9.2.

25. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einem Autofahrer in einer Wohngegend ein Ball vor den Wagen rollt, sei 1%. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß hinter einem Ball ein Kind auf die Straße läuft, sei 99%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) einem Ball ein Kind folgt (Bedingte Wahrscheinlichkeit!),
b) ein Ball auf die Straße rollt und ein Kind auf die Straße läuft (Wahrscheinlichkeit eines *Und*-Ereignisses!)?

26. Urnen-Experiment von *Pólya*: In einer Urne sind 2 rote und 3 weiße Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen, sodann sie selbst und noch eine weitere Kugel der gleichen Farbe in die Urne gelegt. Dies wird mehrmals wiederholt.*
Das *Pólya*-Urnen-Experiment ist als Modell für die Ausbreitung einer Infektionskrankheit gedacht. Das Ziehen einer Kugel bedeutet: Ansteckung einer Person mit einem Krankheitserreger.
Rote Kugel: Die Krankheit bricht aus.
Weiße Kugel: Die Krankheit bricht trotz Ansteckung nicht aus (Immunität).
Das Hinzufügen roter bzw. weißer Kugeln bedeutet dann, daß jeder Krankheitsfall die Wahrscheinlichkeit für neue Krankheitsfälle erhöht, jeder »Immunitätsfall« diese Wahrscheinlichkeit erniedrigt. Der Inhalt der Urne gibt jeweils die augenblickliche Wahrscheinlichkeit für eine Ansteckung an.

* Nach *Über die Statistik verketteter Vorgänge*, 1923, zusammen mit *F. Eggenberger*

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wie groß ist in dem oben beschriebenen *Pólya*-Experiment die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man
a) bei den ersten beiden Zügen je eine rote Kugel zieht,
b) bei den ersten drei Zügen je eine rote Kugel zieht,
c) bei den ersten drei Zügen je eine weiße Kugel zieht? (Deutung?)

27. Bei einem *Pólya*-Experiment enthalte die Urne 1 rote und 9 weiße Kugeln. Beantworte die Fragen von Aufgabe **26** für den Fall, daß nach jedem Zug die gezogene Kugel und weitere 3 Kugeln der gleichen Farbe in die Urne gelegt werden. Was ändert sich, wenn nur beim Zug einer roten Kugel 3 weitere rote Kugeln hineingelegt werden, beim Zug einer weißen Kugel aber nur eine weitere weiße Kugel in die Urne kommt?

28. a) Leite den Produktsatz für 3 Ereignisse aus dem Produktsatz 132.1 für 2 Ereignisse her.
b) Wie lautet der Produktsatz für n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$? Beweise ihn!

Zu 9.3.

29. Untersuchungen haben ergeben, daß in Deutschland 8% der Männer und 0,6% der Frauen farbenblind (rot-grün-blind) sind. Berechne unter Verwendung der Daten aus **9.1.** die Wahrscheinlichkeiten für
a) einen farbenblinden Mann, **b)** eine farbenblinde Frau,
c) für eine farbenblinde Person in Deutschland.

30. Drei Urnen sind wie folgt mit farbigen Kugeln gefüllt:

Urne	grün	rot	blau
1	4	1	0
2	3	2	2
3	5	6	3

Man wählt willkürlich eine Urne und zieht dann eine Kugel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie blau (rot; grün)?

31. Ein Betrieb hat 2 Abteilungen. Die erste besteht aus 15 Männern und 5 Frauen, die zweite aus 8 Männern und 4 Frauen. Jede Abteilung bestimmt durch das Los einen Sprecher; aus den beiden Abteilungssprechern wird ein Betriebssprecher wiederum durch das Los ermittelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Betriebssprecher eine Frau?

•32. Eine Fabrik bezieht elektronische Schalter von 3 verschiedenen Zulieferfirmen A, B und C. Jeder zweite Schalter kommt von A, jeder dritte von B, der Rest von C. Von den A-Schaltern sind 10% defekt, von den B-Schaltern 5%, von den C-Schaltern nur 1%. Die Endkontrolle der Fabrik entdeckt 95% aller defekten Schalter und akzeptiert alle guten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein Gerät, das in den Verkauf kommt, einen defekten Schalter?

•33. Ein Blumenhändler hat ein Sortiment von Tulpenzwiebeln. 20% der Zwiebeln ergeben gelbe Tulpen, der Rest rote. 60% der Zwiebeln ergeben Tulpen mit glatten Blättern, die anderen haben spitze Blätter. 10% der gelben Tulpen sind glattblättrig. Man betrachtet die Ereignisse $R :=$ »Die Tulpe wird rot« und $G :=$ »Die Tulpe wird glatte Blätter haben«. Beschreibe in Worten und berechne
a) $P(R \cap G)$, $P_G(R)$, $P_R(G)$ und $P_{\bar{G}}(R)$,
b) $P_{R \cap G}(R \cup G)$, $P_{R \cap \bar{G}}(\bar{R} \cup G)$ und $P_{R \cap \bar{G}}(R \cup G)$.
c) $P_{R \cup G}(R \cap G)$, $P_{R \cup \bar{G}}(\bar{R} \cap G)$ und $P_{R \cup \bar{G}}(R \cap G)$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

34. *Heikle Fragen.* Karies ist eine Volksseuche. Durch eine Umfrage soll das Zahnputzverhalten einer Bevölkerungsgruppe untersucht werden. Um wahre Antworten zu erhalten, geht man folgendermaßen vor. Man legt jeder Person 2 Fragen vor, von denen sie eine wahrheitsgemäß mit JA bzw. NEIN beantworten muß. Die Nummer der zu beantwortenden Frage ermittelt sie insgeheim durch Drehen eines Glücksrades, dessen zwei Sektoren die Nummern 1 bzw. 2 tragen. Die Wahrscheinlichkeit für Sektor 1 ist p.

a) Frage 1: »Putzen Sie regelmäßig nach dem Frühstück die Zähne?«
Frage 2: »Putzen Sie nach dem Frühstück Ihre Zähne nur gelegentlich oder nie?«
Von n befragten Personen antworteten m Personen mit JA. Bestimme daraus einen Näherungswert für den Anteil derjenigen Personen, die regelmäßig ihre Zähne nach dem Frühstück putzen, in Abhängigkeit von n, m und p.

b) Der psychologisch erwünschte Fall $p = \frac{1}{2}$ führt bei der Fragestellung von **a)** leider zu keinem Ergebnis. Ersetzt man Frage 2 aber durch eine Frage, bei der die Wahrscheinlichkeit für ein JA bekannt ist, so kann man auch mit zwei gleich großen Sektoren arbeiten. Wir wählen als neue Frage 2: »Sind Sie am siebenten Tag eines Monats geboren?« Berechne damit einen Näherungswert für den gesuchten Anteil.

Zu 9.4.

35. In einem Studentenheim sind 40% der Männer und 5% der Frauen größer als 1,75 m. 60% der Bewohner sind Männer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Heimbewohner, der höchstens 1,75 m groß ist, eine Frau?

36. In Cluny findet ein deutsch-französisches Jugendtreffen statt, zu dem 80 Deutsche und 120 Franzosen erschienen sind. 60% der deutschen Teilnehmer sind blond, dagegen nur 20% der französischen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist
a) ein blonder Teilnehmer ein Franzose,
b) ein nicht-blonder Teilnehmer ein Franzose,
c) ein nicht-blonder Teilnehmer ein Deutscher?

37. Am Jugendtreffen von Aufgabe **36** nehmen am 2. Tag auch 40 Italiener teil, von denen 4 blond sind. Beantworte unter dieser veränderten Situation die Fragen von Aufgabe **36**.

38. Drei Maschinen A, B und C produzieren 60%, 30% bzw. 10% einer bestimmten Schraubensorte. Der Ausschußanteil beträgt beziehungsweise 5%, 2% und 1%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine defekte Schraube von Maschine A?

39. Bei der Durchführung des Experiments aus Aufgabe **30** erhält man **a)** eine blaue, **b)** eine rote, **c)** eine grüne Kugel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus Urne 2?

40. Berechne unter Verwendung der Daten aus **9.3.** die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein FDP-Wähler aus Bayern stammt.

41. In einem fernen Land haben 40% der Bevölkerung eine lange Nase, 30% der Bevölkerung kurze Beine und 70% der Bevölkerung lügen nie. Langnasige, kurzbeinige Lügner gibt es nicht. Jeweils 10% der Bevölkerung sind kurznasige, kurzbeinige Lügner bzw. kurznasige, kurzbeinige Nichtlügner bzw. kurznasige, langbeinige Lügner. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mein ferner Freund ein Lügner, falls er
a) kurzbeinig **b)** langnasig **c)** kurzbeinig und kurznasig ist?

42. In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen rauchen 30%. Unter den weiblichen Betriebsangehörigen ist der Anteil der Raucher 50%.
a) Berechne den Anteil der weiblichen Raucher.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger
1) weiblich, falls »er« raucht,
2) männlich, falls er raucht,
3) Raucher, falls er männlich ist?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

•c) Wieviel Prozent der weiblichen Raucher müssen sich mindestens das Rauchen abgewöhnen, damit der Anteil der Raucher unter den Männern (die sich nicht bessern!) größer ist als unter den Frauen?

43. In einer Klasse fallen 10% der Schüler wegen Mathematik allein, 15% wegen einer Fremdsprache allein und 5% wegen Mathematik und einer Fremdsprache durch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein durchgefallener Schüler
a) nur wegen Mathematik,
b) nur wegen einer Fremdsprache,
c) wegen Mathematik und einer Fremdsprache durchgefallen,
wenn aus anderen Gründen keiner durchgefallen ist?

44. Die Schüler der Klassen 9a, 9b und 9c können eine quadratische Gleichung mit den Wahrscheinlichkeiten 95%, 80% und 90% lösen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt Theodor aus der 9a (24 Schüler) bzw. aus der 9b (28 Schüler) bzw. aus der 9c (28 Schüler), falls wir feststellen können, daß er keine quadratische Gleichung lösen kann?

45. Das 3-Kasten-Problem von *Joseph Bertrand* (1822–1900). Gegeben sind 3 Kästen mit je 2 Schubladen. In jeder Schublade liegt eine Münze; im ersten Kasten Gold–Gold, im zweiten Silber–Silber, im dritten Gold–Silber. Ich wähle einen Kasten, ziehe eine Schublade und sehe eine Goldmünze. Mit welcher hierdurch bedingten Wahrscheinlichkeit ist in der anderen Schublade meines Kastens auch eine Goldmünze (eine Silbermünze)?

46. Die Schüler einer Schule gehören zu 70% der Unter- und Mittelstufe, zu 30% der Oberstufe an. In der Unter- und Mittelstufe erhalten 10% der Schüler eine staatliche Beihilfe, in der Oberstufe 20%. Ein Schüler wird willkürlich ausgewählt, und es wird festgestellt, daß er Beihilfe erhält. Wie groß ist unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit, daß er der Oberstufe angehört?

47. In der Bundesrepublik Deutschland waren 1975 0,5% der Bevölkerung aktiv an Tuberkulose (= Tbc) erkrankt. Man weiß auf Grund langjähriger Erfahrung, daß ein spezieller Tbc-Röntgentest 90% der Kranken und 99% der Gesunden richtig diagnostiziert.
a) Eine medizinische Diagnose kann in zweierlei Weise falsch sein:
Fehler 1. Art: Der Patient hat die betreffende Krankheit, sie wird aber nicht erkannt.
Fehler 2. Art: Der Patient ist gesund, wird aber für krank erklärt.
Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art und für einen Fehler 2. Art?
b) Herr Meier hat am Röntgentest teilgenommen. Das Untersuchungsergebnis weist ihn als Tbc-krank aus. Mit welcher dadurch bedingten Wahrscheinlichkeit ist er wirklich an Tbc erkrankt?
c) Frau Meier erhielt die Mitteilung, daß sie auf Grund des Befundes dieser Untersuchung gesund sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie in diesem Fall wirklich gesund?
d) Welche bedingten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich in den Aufgaben **b)** und **c)**, falls Familie Meier aus einer Bevölkerungsschicht stammt, die nur zu 0,5‰ aktiv an Tbc erkrankt ist?

48. Bei Verdacht auf Brustkrebs bedient man sich häufig der Röntgen-Mammographie als Hilfsmittel zur Diagnose. Die neuerdings angewandte Ultraschall-Mammographie (= Sonographie) ist noch zuverlässiger und belastet den Organismus wesentlich weniger. Dazu berichtete die Süddeutsche Zeitung am 26.8.1980:

> »Insgesamt war die Sonographie in 2118 Fällen angewandt und die Diagnose mit dem Ergebnis der feingeweblichen Untersuchung verglichen worden. Die mikroskopische Analyse hatte 1180mal Krebs ergeben, was zu 85% aus dem Ultraschall-Bild ablesbar war. Vor allem aber: Die Treffsicherheit für gutartige Veränderungen lag mit 83% fast ebenso hoch.«

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

a) Deute die 85% und die 83% als bedingte Wahrscheinlichkeiten.
b) Stelle eine 4-Feldertafel der absoluten und der relativen Häufigkeiten auf.
c) Erfahrungsgemäß entwickelt sich bei jeder zwanzigsten Frau über 35 Jahren irgendwann einmal ein Brustkrebs. Frau Huber und Frau Schmitt sind beide älter als 35 Jahre. Auf Grund der Sonographie diagnostiziert der Arzt bei Frau Huber Brustkrebs, bei Frau Schmitt hingegen äußert er keinen Verdacht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Frau Huber wirklich Krebs, und mit welcher Wahrscheinlichkeit könnte Frau Schmitt trotzdem an Brustkrebs erkrankt sein?

49. In einer Firma werden Rauchsensoren als Feuerwarnanlage installiert. Sie melden ein Feuer mit 95% Wahrscheinlichkeit. An einem Tag ohne Brand geben sie mit 1% Wahrscheinlichkeit falschen Alarm. Die Feuersirene heult. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es wirklich brennt, wenn die Feuermeldung
a) aus den Büroräumen, b) aus der Fabrikation kommt
und wenn die Wahrscheinlichkeiten für einen Brand dort 0,1% bzw. 10% sind?

50. An einem Ort sei an $\frac{1}{5}$ aller Tage schlechtes Wetter, an den übrigen Tagen gutes Wetter. Die Zuverlässigkeit der Wettervorhersage ist je nach Wetterlage verschieden. Es habe sich herausgestellt, daß am Vorabend eines Tages mit gutem Wetter die Vorhersage mit 70% Wahrscheinlichkeit »gut«, mit 20% Wahrscheinlichkeit »wechselhaft« und im übrigen »schlecht« lautet. Ein Schlechtwettertag wird dagegen mit 60% Wahrscheinlichkeit zutreffend angekündigt, mit 30% Wahrscheinlichkeit aber als »wechselhaft« und mit 10% Wahrscheinlichkeit als »gut« vorausgesagt.
Heute abend wird schlechtes Wetter angesagt. Mit welcher hierdurch bedingten Wahrscheinlichkeit ist morgen wirklich schlechtes Wetter? – Entsprechende Frage für Wetterbericht »schön« und schönes Wetter morgen.

51. Auf einer von Barbaren bewohnten Insel war es üblich, dort landende Fremdlinge einem grausamen Spiel zu unterwerfen. Sie wurden vor 3 verschlossene Truhen A, B und C geführt, von denen eine einen Goldklumpen enthielt, während die beiden anderen leer waren. Konnte der Fremdling die »Goldtruhe« erraten, so wurden ihm der Goldklumpen und die Freiheit geschenkt; andernfalls wurde er der Göttin geopfert.
Der schiffbrüchige Theodor erklärt, A sei die Goldtruhe. Daraufhin öffnet die Priesterin Dorothea die Truhe C; Theodor sieht, daß sie leer ist. Er meint nun, seine Chance freizukommen habe sich auf 50% erhöht. Hat er recht, falls
a) Dorothea Bescheid wußte, in welcher der Truhen sich das Gold befindet, diese aber auf keinen Fall öffnen wollte,
b) Dorothea nicht Bescheid wußte, in welche der Truhen die Oberpriesterin das Gold gelegt hatte, und sie zufällig eine leere Truhe geöffnet hat?

52. Modell einer Prüfungssituation: Es werden zu einer Frage n verschiedene Antworten angeboten, von denen genau eine richtig ist. Es gebe 2 Sorten von Prüflingen: Die einen (Anteil p) haben sich gut vorbereitet und kreuzen deshalb die richtige Antwort an. Die übrigen haben nichts gelernt und kreuzen auf gut Glück an (etwa durch Würfeln).
Es wird ein Prüfling beliebig ausgewählt und festgestellt, daß er richtig angekreuzt hat. Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit war er gut vorbereitet? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit bei wachsendem n? Grenzwert für $n \to \infty$?

•53. a) Aufgabe von *Laplace* von 1774: Urne 1 enthalte w_1 weiße und s_1 schwarze Kugeln, Urne 2 hingegen w_2 weiße und s_2 schwarze. Aus einer Urne werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen; f davon sind weiß. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kugeln aus der Urne i gezogen wurden, falls jede Urne mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt werden kann.
b) Welche Werte ergeben sich für $w_1 = 8$, $s_1 = 7$, $w_2 = 5$, $s_2 = 15$, $n = 6$ und $f = 4$?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

54. **a)** Aufgabe von *Laplace* von 1783: Eine Urne enthält 3 Kugeln. Jede Kugel ist entweder schwarz oder weiß. Das Mischungsverhältnis *weiß*:*schwarz* ist unbekannt. Es werde m-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen; die Stichprobe liefert lauter weiße Kugeln. Bestimme die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für jedes Mischungsverhältnis, wenn a priori alle 4 Mischungsverhältnisse gleichwahrscheinlich waren.

b) Was ergibt sich für $m \to \infty$?

55. Eine Urne enthält 4 Kugeln. Jede Kugel ist entweder schwarz oder weiß. Der Anteil der weißen Kugeln ist unbekannt. Jede der 5 Möglichkeiten für die Anzahl der weißen Kugeln soll zunächst gleichwahrscheinlich sein (a-priori-Wahrscheinlichkeit). Man zieht dreimal je eine Kugel mit Zurücklegen und erhält die Farbfolge

a) www, **b)** wss.

Berechne die dadurch bedingten a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für die 5 Möglichkeiten.

•**56.** Was erhält man in Aufgabe **55**, wenn nach jedem Zug die a-priori-Wahrscheinlichkeiten durch die jeweils bedingten a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ersetzt werden und erst darauf wieder neu eine Kugel gezogen wird?

57. Theodor möchte das Mischungsverhältnis der Urne von Aufgabe **55** schätzen. Sein Urteil soll möglichst scharf sein, d.h., es sollen möglichst wenig Werte für das Mischungsverhältnis angegeben werden. Außerdem soll die Sicherheit des Urteils möglichst groß sein. Theodor führt Aufgabe **56** aus. Welche Mischungsverhältnisse wird er nach jedem Zug nehmen, wenn die Sicherheit seines Urteils mindestens

a) 60%, **b)** 85%

betragen soll? Gib außerdem die jeweilige tatsächliche Sicherheit an.

•**58.** Löse **a)** Aufgabe **55**, **b)** Aufgabe **56**, falls man ohne Zurücklegen zieht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN