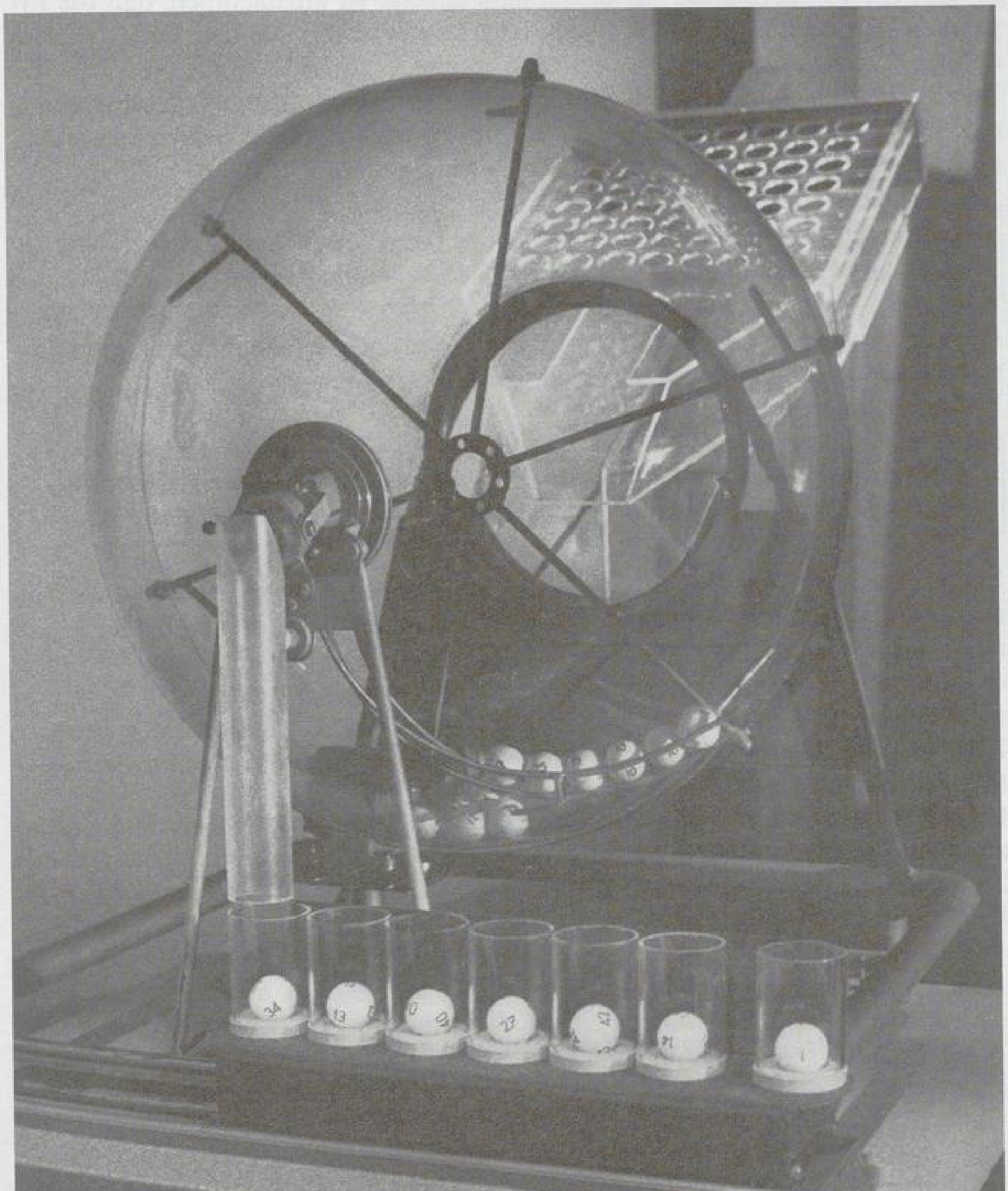
Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

8. Laplace-Experimente

8. Laplace-Experimente



Das preußische General-Ober-Finanz-Krieges- und Domainen-Directorium hat 1757 die Einrichtung einer Lotterie abgelehnt, »da die jetzigen Zeitläufte nicht so beschaffen, daß denen Königlichen Unterthanen noch mehrere Gelegenheit zu geben, sich vom Gelde zu entblößen«. Am 8. 2. 1763 unterschrieb *Friedrich II.* das Patent zur Errichtung der Kgl. Preußischen Lotterie.

8. Laplace-Experimente

8.1. Definition und einfache Beispiele

Es gibt reale Experimente, bei denen man geneigt ist anzunehmen, daß die Ergebnisse gleich häufig auftreten. So erwartet man bei einem symmetrischen Würfel, daß die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 etwa gleich häufig auftreten.
Im zugehörigen stochastischen Modell ist es dann sinnvoll, den Ergebnisraum Ω und die Wahrscheinlichkeitsverteilung P so zu wählen, daß die Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ gleiche Wahrscheinlichkeit p haben.

> **Definition 84.1:** Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **gleichmäßig**, wenn alle Elementarereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Laplace hat bei seinen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie vor allem mit solchen gleichmäßigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen gearbeitet.
Wir legen daher fest:

> **Definition 84.2:** Ein stochastisches Experiment heißt **Laplace-Experiment,** wenn die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung gleichmäßig ist.

In der Praxis wird man so vorgehen, daß man zunächst diese Laplace-Annahme macht und sie dann in Versuchen überprüft. Stimmen die so erhaltenen Resultate nicht mit den unter der Laplace-Annahme berechneten überein, dann wird man das stochastische Modell abändern. Entweder wählt man eine andere, nicht gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P^* auf Ω, oder man nimmt einen anderen Ergebnisraum Ω', für den man wieder die Laplace-Annahme macht. Dazu betrachten wir folgendes
Beispiel: In einer Urne liegen eine rote und eine schwarze Kugel. Wir ziehen zweimal eine Kugel mit Zurücklegen.
Zu diesem realen Experiment lassen sich verschiedene stochastische Modelle konstruieren.

1. Stochastisches Modell:

$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $\omega_1 :=$ »Beide Kugeln sind rot«
$\omega_2 :=$ »Beide Kugeln sind schwarz«
$\omega_3 :=$ »Die Kugeln sind verschiedenfarbig«

Die Laplace-Annahme führt zu folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	ω_1	ω_2	ω_3
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dieses stochastische Modell bewährt sich in der Praxis nicht. ω_3 tritt nämlich etwa doppelt so häufig auf wie ω_1 bzw. ω_2. Der Grund dafür ist leicht einzusehen. Bei den zwei Zügen kann die Verschiedenfarbigkeit auf zwei Arten entstehen:

Zuerst »rot« und dann »schwarz« oder umgekehrt. Für »rot-rot« bzw. »schwarz-schwarz« gibt es jedoch nur je eine Möglichkeit.

Um das stochastische Modell der Realität anzupassen, können wir entweder eine nicht gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P^* wählen oder einen anderen Ergebnisraum Ω' konstruieren, auf dem eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung zu realistischen Werten führt.

2. Stochastisches Modell:

Man behält den Ergebnisraum Ω bei und wählt als neue Wahrscheinlichkeitsverteilung P^*:

ω	ω_1	ω_2	ω_3
$P^*(\{\omega\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

3. Stochastisches Modell:

Man wählt einen Ergebnisraum Ω', der die Reihenfolge der Kugeln berücksichtigt:

$\Omega' := \{\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4\}$ mit $\omega'_1 :=$ »rot-rot«
$\omega'_2 :=$ »rot-schwarz«
$\omega'_3 :=$ »schwarz-rot«
$\omega'_4 :=$ »schwarz-schwarz«.

Auf Ω' legt man die gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung P' fest:

ω'	ω'_1	ω'_2	ω'_3	ω'_4
$P'(\{\omega'\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Das 2. und das 3. stochastische Modell geben das reale Experiment zufriedenstellend wieder. Das 1. und das 3. stochastische Modell sind Laplace-Experimente, nicht jedoch das 2. stochastische Modell.

Laplace-Experimente haben den Vorteil, daß für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen eine besonders einfache Formel gilt. Zu ihrer Herleitung berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit p eines Elementarereignisses $\{\omega_i\}$.
Nach Definition 42.1 gilt mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = n \cdot p, \quad \text{also} \quad p = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Für ein beliebiges Ereignis A, das aus k Ergebnissen besteht, ergibt sich damit

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k\text{-mal}} = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Also gilt $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Die so berechneten Wahrscheinlichkeiten nennt man auch **Laplace-Wahrscheinlichkeiten.**
Da A genau dann eintritt, wenn sich ein Ergebnis ω mit $\omega \in A$ einstellt, nennt man diese ω die für A günstigen Ergebnisse. Man kann daher die letzte Formel folgendermaßen in Worte fassen:

Satz 86.1:
Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A bei einem Laplace-Experiment =

$$= \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Man sieht leicht ein, daß durch die Laplace-Annahme eine zulässige Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert wird. (Siehe Aufgabe 111/**1**.) An drei Beispielen wollen wir die Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten vorführen.

Beispiel 1: Würfelwurf mit einem Würfel

$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A :=$ »Augenzahl ist prim«, $P(A) = \dfrac{|\{2, 3, 5\}|}{|\Omega|} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Beispiel 2: Würfelwurf mit zwei Würfeln

$\Omega := \{(1|1), (1|2), \ldots, (2|1), \ldots, (6|6)\}$, $A :=$ »Augensumme ist mindestens 10«,

$$P(A) = \frac{|\{(6|6), (6|5), (6|4), (5|6), (5|5), (4|6)\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Beispiel 3: Ziehen einer Karte aus einem Bridgespiel* (Bild 87.1)

$\Omega := \{\text{Kreuz-As, Kreuz-2, …, Pik-König}\}$
$A :=$ »Die gezogene Karte ist eine Dame«

$$P(A) = \frac{|\{\text{Kreuz-Dame, Pik-Dame, Herz-Dame, Karo-Dame}\}|}{|\Omega|} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

* Bridge ist um 1896 aus dem über 300 Jahre alten englischen Whist hervorgegangen, wenngleich in Griechenland und auch in Konstantinopel schon vor 1870 ein ähnliches Kartenspiel unter dem Namen Khedive oder auch Biritch gespielt wurde. Das Bridge ist ein 4-Personen-Spiel von 52 Blatt. Verwendet werden die sog. französischen Karten. Je 13 Karten in der aufsteigenden Reihenfolge 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As bilden eine der 4 »Farben«, deren Symbole und Namen nachstehend in aufsteigender Wertfolge wiedergegeben sind.

französisch:	trèfle	carreau	cœur	pique
deutsch:	Kreuz; Treff	Karo	Herz	Pik

Die Eins im Kartenspiel (und auch im Würfelspiel) heißt As. Im Lateinischen bedeutet *as* »Das Ganze als Einheit«; dementsprechend wurde mit *as* die Einheit des Längen-, des Flächen- und auch des Gewichtsmaßes bezeichnet. Seit etwa 289 v. Chr. wurde *as* in Rom auch als Münzeinheit verwendet. – Der Ursprung der Spielkarten ist umstritten. Weder *Dante* (1265–1321), *Boccaccio* (1313–1375), *Petrarca* (1304–1374) noch *Chaucer* (1340–1400) erwähnen sie. Erstmals verboten wurden sie (lt. Abschrift von kurz vor 1398) am 24. 3. 1367 in Bern, dann am 23. und 24. März 1377 in Florenz (im Original erhalten). Es folgen 1377 Siena, 1378 Regensburg, 1379 St. Gallen und Konstanz, 1380 Nürnberg und Perpignan, … Belegt sind Spielkarten 1377 in Basel/Freiburg, 1378 in Zaragoza, 1379 in Viterbo und im Brabant, 1380 in Barcelona, 1381 in Marseille, …

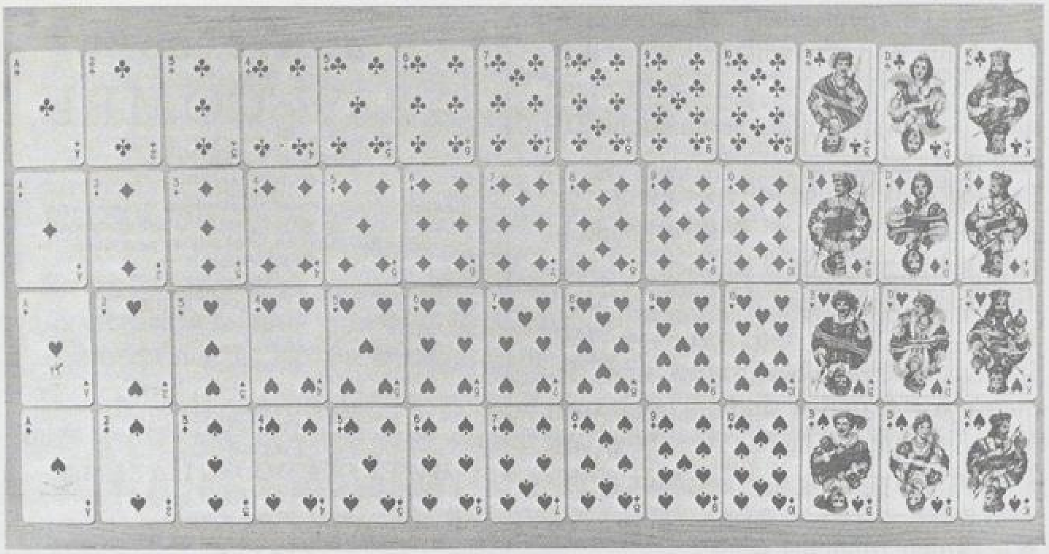


Bild 87.1 Die 52 französischen Karten des Bridgespiels

Das Problem bei der Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten besteht darin, die Anzahlen $|A|$ und $|\Omega|$ zu bestimmen. Dies ist bei großen Anzahlen nicht immer durch Abzählen in vernünftiger Zeit möglich. Wir wollen daher im nächsten Abschnitt Hilfsmittel entwickeln, durch die dieses mühsame Abzählen erleichtert wird.

8.2. Kombinatorische Hilfsmittel

Wie schwer das Abzählen der Mengen A und Ω ist, zeigte sich uns ja schon bei den wiederholt aufgeworfenen Problemen der Augensummen von 2 bzw. 3 Würfeln. Die Schwierigkeit liegt, allgemein gesprochen, darin, den Abzählvorgang so zu systematisieren, daß kein Element vergessen und andererseits keines mehrfach gezählt wird. Dem Zweig der Mathematik, der sich mit solchen Vorgängen befaßt, gab 1666 *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) durch seine *Dissertatio de Arte Combinatoria* den Namen »Kombinatorik«. Welchen Rahmen sich dabei der 20jährige *Leibniz* steckte, zeigt das Titelblatt seiner Arbeit (Bild 88.1). *Leibniz* war nämlich überzeugt, daß

»per Artem Combinatoriam alle Notiones Compositae der ganzen Welt in wenig Simplices als deren Alphabet reducirt, und aus solches alphabets Combination wiederumb alle Dinge, samt ihren theorematibus, und was nur von ihnen zu inventiren müglich, ordinata methodo mit der Zeit zu finden, ein weg gebahnet wird.«*

Für ihn ist die kombinatorische Kunst die Grundlage einer universalen Wissenschaft aller Dinge. So weit wollen wir es aber nicht treiben! Unser bescheidenes Ziel ist es, in einigen einfachen Fällen Abzählvorgänge zu beherrschen.
Die wichtigste Art, Anzahlen abzuzählen, lernen wir kennen in folgender

* Brief *Leibnizens* an Herzog *Johann Friedrich* von Hannover, September 1671.

Aufgabe: Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine willkürlich aus dem Intervall [100; 999] herausgegriffene natürliche Zahl lauter verschiedene Ziffern hat.

Es liegt ein Laplace-Experiment vor. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A müssen wir also die Anzahl der Elemente von $\Omega = \{100, 101, \ldots, 998, 999\}$ und von $A = \{102, 103, \ldots, 986, 987\}$ bestimmen. Die Elemente von Ω und A sind 3-Tupel, auch Tripel genannt. Für das Abzählen von Tupeln eignet sich das folgende Zählverfahren.

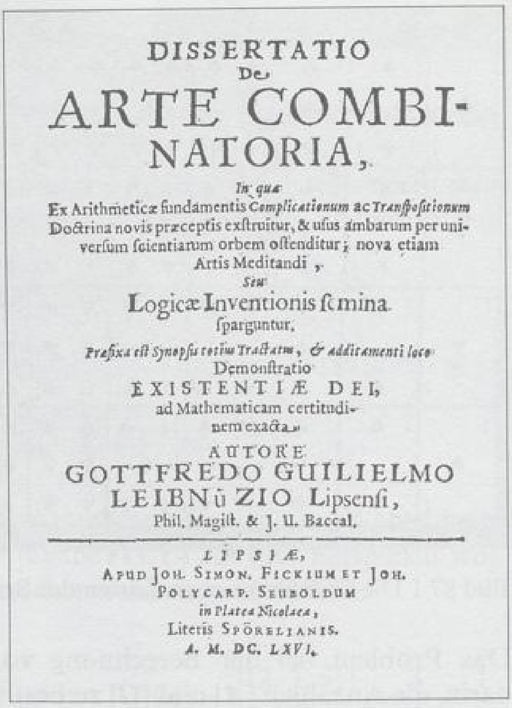

DISSERTATIO
De
ARTE COMBINATORIA,
In quâ
Ex Arithmeticæ fundamentis Complicationum ac Transpositionum Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi,
Seu
Logicæ Inventionis semina
sparguntur.
Præfixa est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco Demonstratio
EXISTENTIÆ DEI,
ad Mathematicam certitudinem exacta.
AUTORE
GOTTFREDO GUILIELMO
LEIBNüZIO Lipsensi,
Phil. Magist. & J. U. Baccal.
LIPSIÆ,
Apud Joh. Simon. Fickium et Joh. Polycarp. Seuboldum
in Platea Nicolaea,
Literis Spörelianis.
A. M. DC. LXVI.

Bild 88.1 Das Titelblatt der *Dissertatio de Arte Combinatoria* von *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716)

Wir zählen zunächst Ω ab:

Für die 1. Stelle des Tupels gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich 1, 2, ..., 9.

Für die 2. Stelle des Tupels gibt es 10 Möglichkeiten, nämlich $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Für die 3. Stelle des Tupels gibt es 10 Möglichkeiten, nämlich $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Zu jeder der 9 Möglichkeiten für die 1. Stelle gibt es 10 Möglichkeiten an der 2. Stelle. Das ergibt $9 \cdot 10$ Fälle. Zu jedem dieser $9 \cdot 10$ Fälle gibt es wieder 10 Möglichkeiten, die 3. Stelle zu besetzen. Das ergibt insgesamt $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ Möglichkeiten. Wir erhalten somit $|\Omega| = 900$.

Die Mächtigkeit von Ω hätten wir in diesem Beispiel natürlich durch die Subtraktion $999 - 99 = 900$ erhalten können! Auf eine so einfache Methode können wir aber zur Berechnung von $|A|$ nicht zurückgreifen. Dagegen hilft unser oben verwendetes Abzählverfahren auch hier.

Wir zählen nun A ab:

Für die 1. Stelle des Tupels gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich 1, 2, ..., 9. Für die 2. Stelle des Tupels gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 außer der Ziffer an der 1. Stelle. Für die 3. Stelle des Tupels gibt es 8 Möglichkeiten, nämlich die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ außer den Ziffern an der 1. und 2. Stelle. Das ergibt insgesamt $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ Elemente von A. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{648}{900} = 72\%$.

Das vorgeführte Verfahren ist zum Abzählen von Tupeln oft hilfreich. Es ist unter den Namen **Produktregel** und **Zählprinzip** bekannt. Ein k-Tupel ist bekanntlich eine Anordnung $(a_1|a_2| \ldots |a_k)$ oder kurz $a_1 a_2 \ldots a_k$; dabei sind zwei k-Tupel genau dann gleich, wenn sie an jeder Stelle übereinstimmen. Die Anzahl der Elemente einer Menge von k-Tupeln bestimmt man mit Hilfe der

Produktregel:
Für die Besetzung der 1. Stelle a_1 des k-Tupels gebe es n_1 Möglichkeiten;
für die Besetzung der 2. Stelle a_2 des k-Tupels gebe es, gegebenenfalls unter Berücksichtigung der Wahl von a_1, dann n_2 Möglichkeiten;
für die Besetzung der 3. Stelle a_3 des k-Tupels gebe es, gegebenenfalls unter Berücksichtigung der Wahl von a_1 und a_2, dann n_3 Möglichkeiten;
....;
für die Besetzung der k-ten Stelle a_k des k-Tupels gebe es, gegebenenfalls unter Berücksichtigung der ersten $(k-1)$ Belegungen, dann n_k Möglichkeiten.
Dann enthält die Menge $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ k-Tupel.

Einige weitere Beispiele sollen die Tragfähigkeit der Produktregel aufzeigen.

Beispiel 1: In einer Schule gibt es 17 Unterstufenklassen, 13 Mittelstufenklassen und 9 Oberstufenklassen. Zu einer Sitzung soll aus jeder Stufe ein Klassensprecher erscheinen.
Nach der Produktregel gibt es $17 \cdot 13 \cdot 9 = 1989$ Möglichkeiten für die Zusammenstellung eines solchen 3-Tupels oder Tripels.

Beispiel 2: Beim Würfeln mit 4 Würfeln gibt es $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ Quadrupel als Ergebnisse. (4-Tupel heißen auch Quadrupel.)

Beispiel 3: In der Elferwette beim Fußballtoto* gibt es $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{11} = 177\,147$ Möglichkeiten für eine Tippreihe (siehe Bild 90.1).

Beispiel 4: An einem Pferderennen nehmen 20 Pferde teil. Bei einem Wettabschluß sollen die ersten drei Plätze richtig angegeben werden (Dreierwette). Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung der ersten drei Plätze?
Nach der Produktregel erhalten wir $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ Möglichkeiten.
Wenn alle Pferde ans Ziel kommen, ist das Ergebnis des Rennens ein 20-Tupel. Dafür gibt es nach der Produktregel $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ Möglichkeiten.

Die 20-Tupel des letzten Beispiels entstanden dadurch, daß man alle Reihenfolgen konstruierte, die aus den 20 verschiedenen Startnummern gebildet werden können. Allgemein gesprochen handelt es sich also darum, die Anzahl der n-Tupel zu bestimmen, die man aus n verschiedenen Elementen so bilden kann, daß jedes Element genau einmal auftritt. Da alle diese n-Tupel aus einem ersten dadurch entstehen, daß man die n Elemente miteinander beliebig vertauscht, nannte *Jakob Bernoulli* (1655–1705) jedes solche n-Tupel eine **Permutation**** der gegebenen n Elemente. Mit der Produktregel ergeben sich $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, solche n-Tupel zu bilden.

* Toto ist eine Abkürzung für Totalisator, womit der amtliche Wettbetrieb im Pferdesport erstmals 1871 in Frankreich bezeichnet wurde. 1921 wurde ein Fußballtoto in England eingeführt; 1948 ließen Baden-Württemberg, Bayern, Bremen und Schleswig-Holstein ein Fußballtoto zu, 1953 die DDR.

** *Ars Conjectandi*, II. Cap. 1 – Überhaupt ist Teil II der *Ars Conjectandi* ein hervorragendes Lehrbuch der Kombinatorik, die in Teil III ihre Anwendung findet.

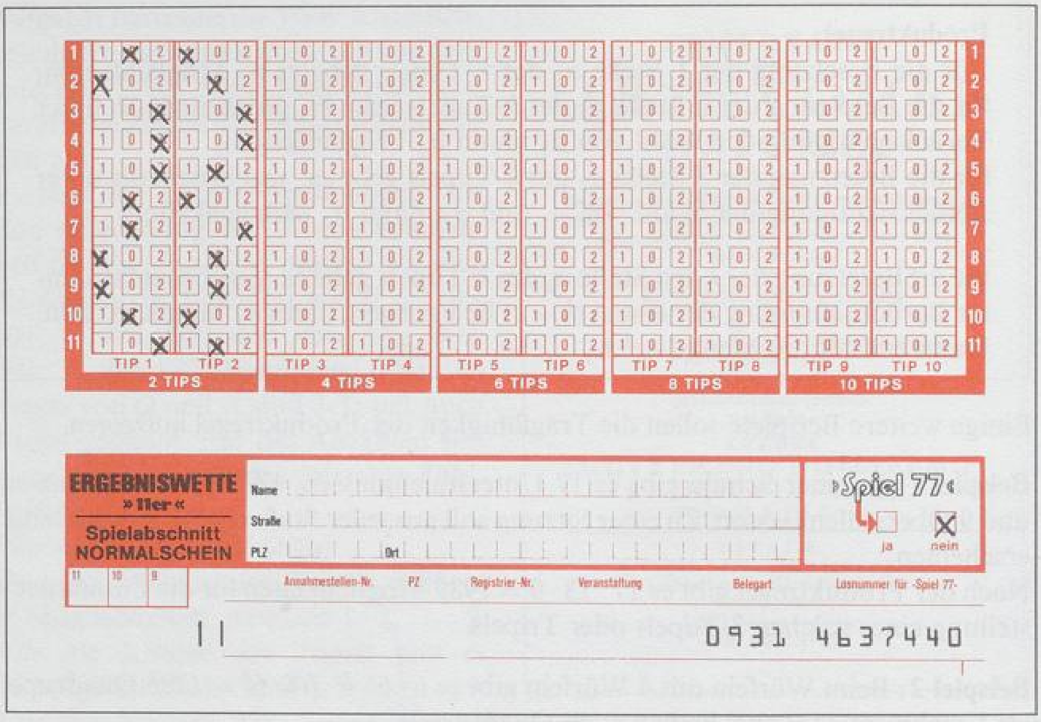


Bild 90.1 Totoschein mit 2 ausgefüllten Tippreihen.

Das hier auftretende Produkt der ersten n natürlichen Zahlen spielt in der Mathematik öfters eine Rolle. 1808 hat der Mathematiker *Christian Kramp* (1761–1826) vorgeschlagen, dieses Produkt mit $n!$, gesprochen *n Fakultät*, abzukürzen*. $1!$ und $0!$ sind dadurch noch nicht definiert. Für $n \geqq 3$ gilt die Rekursionsformel $n! = (n-1)! \cdot n$. Setzt man hier $n = 2$ bzw. $n = 1$, so erhält man formal $2! = 1! \cdot 2$ bzw. $1! = 0! \cdot 1$, was die Festlegungen $1! = 1$ und $0! = 1$ nahelegt. Wir fassen die Überlegungen zusammen in

Definition 90.1: $0! := 1$
$1! := 1$
$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für alle natürlichen Zahlen > 1

Damit gilt

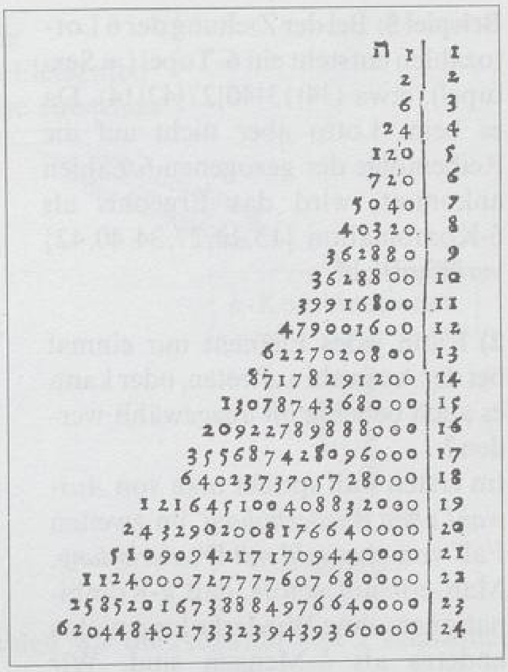
Satz 90.1: Zu jeder Menge von n Elementen gibt es $n!$ Permutationen.

Zur Menge $\{a, b, c\}$ gibt es also $3! = 6$ Permutationen, nämlich abc, acb, bac, bca, cab und cba.

Als Anwendung von Satz 90.1 betrachten wir folgendes Problem. Bei Schwimmwettkämpfen sind die Bahnen nicht ganz gleichwertig. Außerdem spielt es eine

* Das Wort *Fakultät* hat *Christian Kramp* zur Bezeichnung von Produkten der Form $y(y+1)(y+2) \cdot \ldots \cdot (y+(n-1))$ im Brief vom 30.5.1796 an *Carl Friedrich Hindenburg* (1741–1808) eingeführt, der ihn im *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Heft 5 (1796), abdruckte. Das Ausrufezeichen als Kennzeichen der speziellen Fakultät $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ führte *Kramp* 1808 in seinen *Élémens d'Arithmétique universelle* ein.
facultas (lat.) = Kraft, etwas zu vollbringen.

Rolle, wer in den benachbarten Bahnen schwimmt. Um diese Ungerechtigkeit zu beseitigen, müßte man eigentlich die 8 Teilnehmer so oft schwimmen lassen, bis alle möglichen Bahnbesetzungen aufgetreten sind. Das ergäbe allerdings an Stelle *eines* Wettkampfes $8! = 40320$ Wettkämpfe! Um einen 1500-m-Kraulwettkampf entscheiden zu können, müßte man dann über 1 Jahr Tag und Nacht schwimmen. Das dürfte der Grund sein, warum der Weltschwimmverband diese Art der Entscheidung noch nicht eingeführt hat.



ח 1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40320	8
362880	9
3628800	10
39916800	11
479001600	12
6227020800	13
87178291200	14
1307874368000	15
20922789888000	16
355687428096000	17
6402373705728000	18
121645100408832000	19
2432902008176640000	20
51090942171709440000	21
1124000727777607680000	22
25852016738884976640000	23
620448401733239439360000	24

Bild 91.1 Tabelle der Fakultäten aus *Leibnizens* *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666), die übrigens zu seinem Ärger 1690 ohne sein Wissen nachgedruckt wurde.

Das schnelle Anwachsen der Fakultäten zeigen überdies die Fakultätentabelle von Bild 91.1 und zwei schöne Aufgaben aus dem *Treatise of Algebra* von 1685 des *John Wallis* (1616–1703).* (Siehe Aufgabe 113/**26.**)

Kombinatorische Fragestellungen sind sehr vielfältig und oft nur trickreich zu bewältigen. Wir wollen uns hier nur mit den einfachsten Fällen beschäftigen. Dazu betrachten wir eine Menge von n unterscheidbaren Elementen, kurz n-Menge genannt. Aus ihr wollen wir k Elemente auswählen. Auf wie viele Arten kann eine solche Auswahl getroffen werden?

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir zwei Vorfragen klären.

1) Spielt die Reihenfolge eine Rolle, in welcher die k Elemente ausgewählt werden?

Kommt es auf die Reihenfolge an, dann ist das Ergebnis der Auswahl ein **k-Tupel****; spielt hingegen die Reihenfolge keine Rolle, so ist das Ergebnis der Auswahl eine **k-Kombination*****.

* Der vollständige Titel des 1685 englisch erschienenen Werks lautet *Treatise of Algebra, Both Historical and Practical, Showing the Original, Progress, and Advancement Thereof, From Time to Time: and by What Steps It Hath Attained to the Height at Which Now It is.* 1693 erschien es lateinisch, um einiges vermehrt.

** Früher nannte man die k-Tupel auch *Variationen zur k-ten Klasse* bzw. *Variationen der Länge k*.

*** Früher sagte man dafür auch *Kombination zur k-ten Klasse* oder *Kombination der Länge k*.
Combinatio bedeutete bei den Römern eine Zusammenfassung von je 2 Elementen (bini = je 2). Bei *Gaius Iulius Hyginus* (ca. 60 v. Chr. – 10 n. Chr.), Grammatiker, Polyhistor und Bibliothekar von Kaiser *Augustus*, findet man für eine Zusammenfassung von je 3 Elementen das Wort *conternatio* (terni = je 3). Diese Bezeichnungen erweitert 1635 *Marin Mersenne* (1588–1648) über 3 hinaus. *Leibniz* schreibt 1666 dafür sogar *Com2natio*, *Con3natio* etc., obwohl *combinatio* schon damals im heutigen Sinne verwendet wurde. *Leibniz* bezeichnete statt dessen eine Zusammenfassung von Dingen als *Komplexion*, was in Deutschland erst *Carl Friedrich Hindenburg* (1741–1808) durch das heute übliche *Kombination* verdrängte. Leider konnte sich das von *Frans van Schooten* (um 1615–1660) eingeführte *electio* nicht durchsetzen.
Im Briefwechsel *Fermat-Pascal* versteht *Fermat* unter *combinaison* die heutigen k-Tupel, wohingegen *Pascal* darunter die k-Mengen versteht. Daher definiert *Pascal* 1654 in seinem *Traité du triangle arithmétique* expressis verbis *combinaison* als k-Menge.

Beispiel 5: Bei der Ziehung der 6 Lottozahlen entsteht ein 6-Tupel (= Sextupel), etwa (34|13|40|27|42|14). Da es beim Lotto aber nicht auf die Reihenfolge der gezogenen 6 Zahlen ankommt, wird das Ergebnis als 6-Kombination $\{13, 14, 27, 34, 40, 42\}$ veröffentlicht.

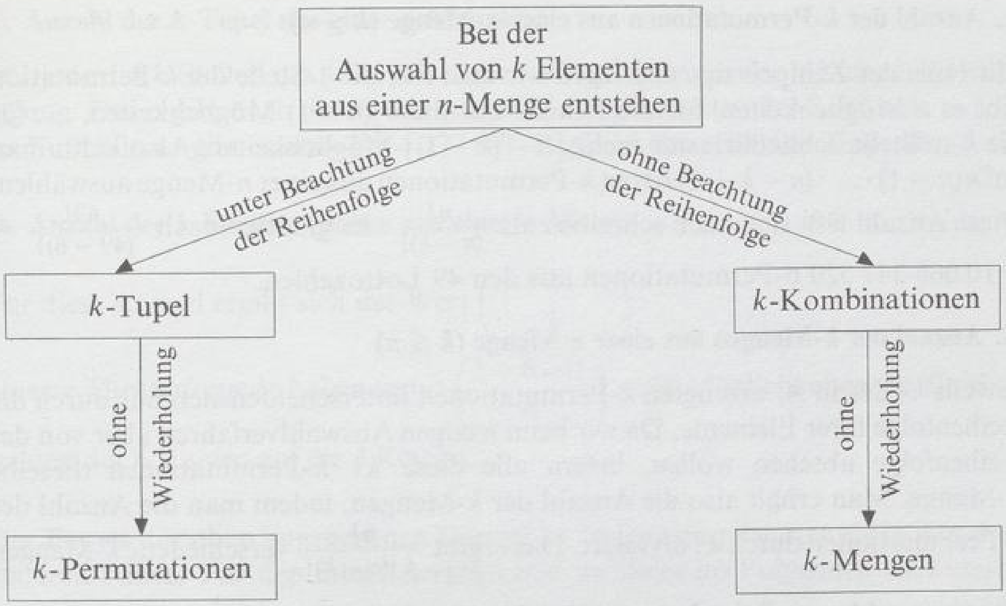
Bild 92.1 Ziehung beim Lotto »6 aus 49«
oben: 6-Menge, natürlich geordnet
unten: ursprünglich gezogenes 6-Tupel

2) Kann jedes Element nur einmal bei der Auswahl auftreten, oder kann es auch beliebig oft ausgewählt werden?
Im ersten Fall spricht man von *Auswahl ohne Wiederholung*, im zweiten Fall von *Auswahl mit Wiederholung*. Man erkennt sofort, daß k-Kombinationen ohne Wiederholung nichts anderes als k-Mengen sind. Wir werden im folgenden für diesen Fall die Bezeichnung ***k*-Menge** der Bezeichnung *k-Kombination ohne Wiederholung* vorziehen, weil sie suggestiver ist. Bei k-Tupel ist Auswahl mit Wiederholung zugelassen. Ist jedoch bei der Auswahl der Elemente keine Wiederholung von Elementen zugelassen, so wollen wir die entstehenden *k-Tupel ohne Wiederholung* kürzer als ***k*-Permutationen** bezeichnen. Ist dabei überdies $k = n$, so spricht man üblicherweise nicht von einer n-Permutation, sondern nur von einer Permutation (der n gegebenen Elemente), wie wir es bereits auf Seite 89 eingeführt hatten.

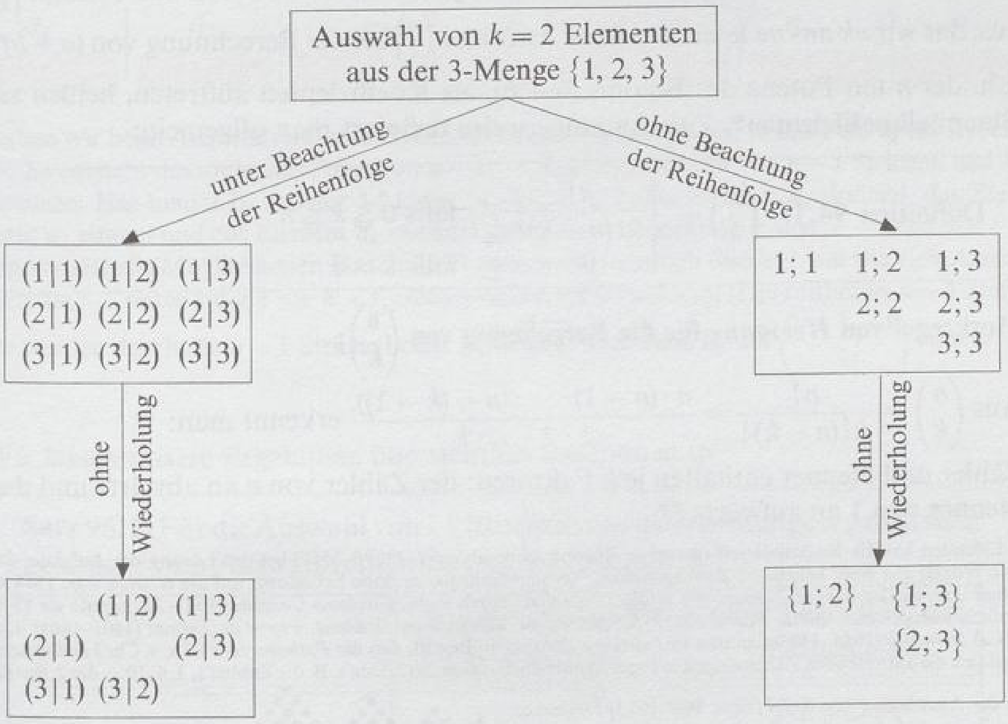
Beispiel 6: Das Ziehen der 6 Lottozahlen liefert zunächst ein Sextupel ohne Wiederholung, also eine 6-Permutation, die als natürlich geordnete 6-Menge veröffentlicht wird. Beim Fußballtoto hingegen ist eine Tippreihe ein 11-Tupel (mit Wiederholung), das aus der 3-Menge $\{0, 1, 2\}$ ausgewählt wird.

Für den noch fehlenden Fall einer k-Kombination mit Wiederholung betrachten wir
Beispiel 7: Eine Gruppe von 6 Personen möchte ins Theater gehen und läßt sich 6 Karten der teuersten Preisklasse schicken. Die Plätze dieser Preisklasse liegen in den ersten 3 Reihen. Eine Möglichkeit der Auswahl besteht dann aus 6 Karten, von denen jede entweder für die erste, die zweite oder die dritte Reihe gilt.

In einer Übersicht stellen wir die vier genannten Fälle noch einmal zusammen.



Zur Illustration dieser Übersicht betrachten wir die Auswahl von 2 Elementen aus einer Menge von 3 Elementen.



Gibt es für die Elemente der Menge, aus der ausgewählt wird, eine »natürliche« Anordnung, so schreibt man die Kombinationen bzw. Mengen in dieser natürlichen Anordnung, um die Darstellung übersichtlicher zu machen.
Im Folgenden wollen wir Formeln für die Anzahl der jeweils möglichen Auswahlen entwickeln.

A. Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge ($k \leqq n$)

Mit Hilfe des Zählprinzips überlegen wir uns: Für die 1. Stelle der k-Permutation gibt es n Möglichkeiten, für die 2. Stelle nur mehr $(n-1)$ Möglichkeiten, ..., für die k-te Stelle schließlich nur mehr $[n-(k-1)]$ Möglichkeiten. Also kann man auf $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ Arten k-Permutationen aus einer n-Menge auswählen. Diese Anzahl läßt sich auch schreiben als $\frac{n!}{(n-k)!}$. Es gibt demnach $\frac{49!}{(49-6)!} =$ $= 10\,068\,347\,520$ 6-Permutationen aus den 49 Lottozahlen.

B. Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge ($k \leqq n$)

Jeweils $k!$ der in **A.** erzeugten k-Permutationen unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge ihrer Elemente. Da wir beim jetzigen Auswahlverfahren aber von der Reihenfolge absehen wollen, liefern alle diese $k!$ k-Permutationen dieselbe k-Menge. Man erhält also die Anzahl der k-Mengen, indem man die Anzahl der k-Permutationen durch $k!$ dividiert. Das ergibt $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ verschiedene k-Mengen aus einer n-Menge. Beim Lotto »6 aus 49« gibt es somit $\frac{49!}{6!(49-6)!} = 13\,983\,816$ verschiedene Ergebnisse.

Die Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge drückt man durch das Symbol $\binom{n}{k}$ aus, das wir »k aus n« lesen. Da diese Anzahlen $\binom{n}{k}$ bei der Berechnung von $(a+b)^n$, d.h. der n-ten Potenz des Binoms $(a+b)$, als Koeffizienten auftreten, heißen sie **Binomialkoeffizienten***. Zweckmäßigerweise definiert man allgemein:

> **Definition 94.1:** $$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \leqq k \leqq n \\ 0, & \text{falls } k > n \end{cases}$$

Merkregel von *Hérigone* für die Berechnung von $\binom{n}{k}$:

Aus $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ erkennt man:

Zähler und Nenner enthalten je k Faktoren; der Zähler von n an abwärts und der Nenner von 1 an aufwärts.**

* Erfunden hat die Binomialkoeffizienten in Europa *Michael Stifel* (1487?–1567) bei der Lösung der Aufgabe, die n-te Wurzel aus einer beliebigen Zahl zu ziehen. Veröffentlicht hat er seine Erfindung, auf die er stolz war, 1544 in seiner *Arithmetica integra.* Namen gab er diesen Zahlen jedoch nicht. *Girolamo Cardano* (1501–76) nannte sie 1570 einfach *multiplicandi. Blaise Pascal* (1623–62) nannte sie *Zahlen n-ter Ordnung*, *Pierre de Fermat* (1601–1665) und *Jakob Bernoulli* (1655–1705) nannten sie *figurierte Zahlen*, ein Begriff, den die *Pythagoreer* (5. Jh. v. Chr.) einführten, weil sich die auftretenden Zahlenfolgen in Figuren anordnen lassen. So bilden z. B. die Zahlen 1, 3, 6, 10 ... der 2. Spalte in der Anordnung von *Stifel* (siehe Bild 105.1) Dreiecke: 
William Oughtred (1574–1660) nannte sie 1631 *unciae*, eine Bezeichnung, die auch *Leonhard Euler* (1707–1783) noch verwendet. Die früheste Belegstelle für den Namen »Binomialkoeffizient«, die wir entdecken konnten, sind die *Anfangsgründe der Mathematik*, III, 1, Seite 385, von *Abraham Gotthelf Kästner* (1719–1800) aus dem Jahre 1760. *Leonhard Euler* verwendete für die Binomialkoeffizienten 1778 das Symbol $\left(\frac{n}{k}\right)$, 1781 dann $\left[\frac{n}{k}\right]$. Das heute übliche $\binom{n}{k}$ führte 1826 *Andreas von Ettingshausen* (1796–1878) in *Die combinatorische Analysis* ein.

** In dieser Form gab *Pierre Hérigone* († ca. 1643) als erster in seinem *Cursus mathematicus nova, brevi, et clara methodo demonstratus* (1634) die allgemeine Formel zur Bestimmung der Anzahl der k-Mengen aus einer n-Menge an.

C. Anzahl der *k*-Tupel aus einer *n*-Menge

Für jede der k Stellen des k-Tupels stehen alle n Elemente der n-Menge zur Verfügung. Das ergibt nach der Produktregel n^k Möglichkeiten der Auswahl.
Im Fußballtoto gibt es also $3^{11} = 177\,147$ Möglichkeiten für eine Tippreihe.

D. Anzahl der *k*-Kombinationen aus einer *n*-Menge

Für diese Anzahl ergibt sich der Wert $\binom{n+k-1}{k}$.

Unsere Theaterfreunde haben somit $\binom{3+6-1}{6} = 28$ Möglichkeiten für die Verteilung der 6 Karten auf die 3 Reihen.

Der **Beweis** der oben angegebenen Formel ist leider komplizierter als in den drei anderen Fällen. Für den interessierten Leser werde er im Folgenden entwickelt.

Durch $n-1$ Trennstriche erzeugen wir zunächst für jedes der n Elemente der n-Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ein Feld.

$$a_1 \;\Big|\; a_2 \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; a_i \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; a_{n-1} \;\Big|\; a_n$$

Ziehen wir beim Auswahlverfahren das Element a_i, so schreiben wir in das Feld a_i ein Kreuz $+$. Es entsteht dadurch eine Folge von $n+k-1$ Zeichen, nämlich von $n-1$ Strichen und k Kreuzen. Hat man z.B. aus der 4-Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ das Element a_1 dreimal, das Element a_3 einmal und das Element a_4 zweimal gezogen, so entsteht die Folge $+++\|+|++$. Man erhält alle Möglichkeiten für solche Folgen, wenn man sich überlegt, auf wie viele Arten man die k Kreuze auf die $n+k-1$ Zeichenstellen verteilen kann. (Die restlichen $n-1$ Stellen werden durch die $n-1$ Striche belegt.) Das geht aber nach **B.** auf $\binom{n+k-1}{k}$ Arten.

Wir fassen unsere Ergebnisse übersichtlich zusammen in

Satz 95.1: Für die Auswahl von k Elementen aus einer n-Menge ergeben sich, abhängig vom Auswahlverfahren, folgende Anzahlen:

	mit Beachtung der Reihenfolge	ohne Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholung ($k \in \mathbb{N}_0$)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Wiederholung ($k \leqq n$)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Bemerkung:
Für diese Anzahlen gibt es verschiedene Bezeichnungsweisen. Einige geläufige geben wir hier an:

Anzahl der k-Tupel (= k-Variationen) mit Wiederholung aus einer n-Menge = $= V_{\mathrm{mW}}(n; k) = {}^{\mathrm{W}}V_n^k$.

Anzahl der k-Tupel (= k-Variationen) ohne Wiederholung aus einer n-Menge = $= V_{\mathrm{oW}}(n; k) = V_n^k$.

Anzahl der k-Kombinationen mit Wiederholung aus einer n-Menge = $= K_{\mathrm{mW}}(n; k) = {}^{\mathrm{W}}C_n^k$.

Anzahl der k-Mengen (= k-Kombinationen ohne Wiederholung) aus einer n-Menge = $K_{\mathrm{oW}}(n; k) = C_n^k$.

Zusammenfassend illustrieren wir die vier unterschiedlichen Abzählprobleme.

Beispiel 8: Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sie
a) 3 numerierte Sitzplätze sind,
b) 3 unnumerierte Stehplätze sind?

Dabei müssen wir noch jeweils unterscheiden, ob ein Schüler
α) genau eine Karte oder
β) mehrere Karten nehmen kann.

Lösung:

aα) Jede Verteilung der 3 unterschiedlichen Karten auf die 15 Schüler stellt eine 3-Permutation aus den 15 Schülern dar. Es gibt also $\frac{15!}{(15-3)!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ Möglichkeiten.

aβ) Jede Verteilung der 3 unterschiedlichen Karten auf die 15 Schüler stellt ein Schülertripel dar. Es gibt also $15^3 = 3375$ Möglichkeiten.

bα) Jede Verteilung der 3 gleichwertigen Karten auf die 15 Schüler stellt eine Menge von 3 Schülern (= 3-Kombination ohne Wiederholung) dar. Es gibt also $\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ Möglichkeiten.

bβ) Jede Verteilung der 3 gleichwertigen Karten auf die 15 Schüler stellt eine Kombination von 3 Schülern (mit Wiederholung) dar. Es gibt also $\binom{15+3-1}{3} = \binom{17}{3} = 680$ Möglichkeiten.

8.3. Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Mit den in **8.2.** erarbeiteten kombinatorischen Hilfsmitteln können wir jetzt Laplace-Wahrscheinlichkeiten auch in komplizierteren Fällen berechnen.

Beispiel 1: In einem Studentenheim ist es Brauch, daß jeder an seinem Geburtstag alle Mitbewohner zu einer Geburtstagsfeier einlädt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einem Tag mehr als eine Feier stattfindet, wenn im Heim
a) 10 Studenten, **b)** n Studenten wohnen?*

Lösung: Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß unser Kalender keine Schalttage kennt und daß die Geburten gleichmäßig übers Jahr verteilt sind, d. h., daß jeder Tag mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{365}$ als Geburtstag für eine bestimmte Person in Frage kommt.
a) Ein möglicher Ergebnisraum Ω ist die Menge aller 10-Tupel aus den 365 Tagen des Jahres. Also gilt $|\Omega| =$ Anzahl der 10-Tupel aus einer 365-Menge $= 365^{10}$. Das Ereignis $A :=$ »Mindestens zwei Feiern finden am gleichen Tag statt« besteht aus allen 10-Tupeln, in denen mindestens zwei gleiche Elemente sind. Dieses Ereignis läßt sich nur schwer abzählen. Sehr viel einfacher bestimmt man dagegen die Mächtigkeit des Gegenereignisses $\bar{A} =$ »Alle Feste finden an verschiedenen Tagen statt«. $\bar{A}$ besteht aus allen 10-Tupeln, in denen alle 10 Elemente verschieden sind. $|\bar{A}|$ ist also die Anzahl der 10-Permutationen aus einer 365-Menge $=$
$= \frac{365!}{(365-10)!} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 356.$

Damit ergibt sich $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 356}{365^{10}} = 11{,}7\%$.

b) Im allgemeinen Fall haben wir anstelle der 10-Tupel jeweils die n-Tupel zu nehmen.

Wir erhalten $P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$, falls $0 \leqq n \leqq 365$.

Für $n > 365$ gilt selbstverständlich $P(A) = 1$.

Tabelle 98.1 und Figur 98.1 zeigen den Verlauf dieser Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n.
Erstaunlicherweise ist $P(A) > \frac{1}{2}$ bereits für $n = 23$.
In einer Klasse mit 30 Schülern kann man schon mit einer Wahrscheinlichkeit von 71% damit rechnen, daß mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben.

Beispiel 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto »6 aus 49« mit einer Tippreihe
a) genau 4 Richtige,
b) mindestens 4 Richtige zu haben?

Lösung: Ein möglicher Ergebnisraum Ω ist die Menge aller 6-Mengen aus der 49-Menge $\{1, 2, \ldots, 48, 49\}$. $|\Omega|$ ist also die Anzahl der 6-Mengen, die man aus der 49-Menge bilden kann, also $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$. Da keine Veranlassung besteht anzunehmen, daß eine dieser 6-Mengen vor irgendeiner anderen ausgezeichnet ist, nehmen wir auf Ω eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

* Das Problem geht auf eine 1939 veröffentlichte Arbeit *Richard v. Mises'* (1883–1953) zurück.

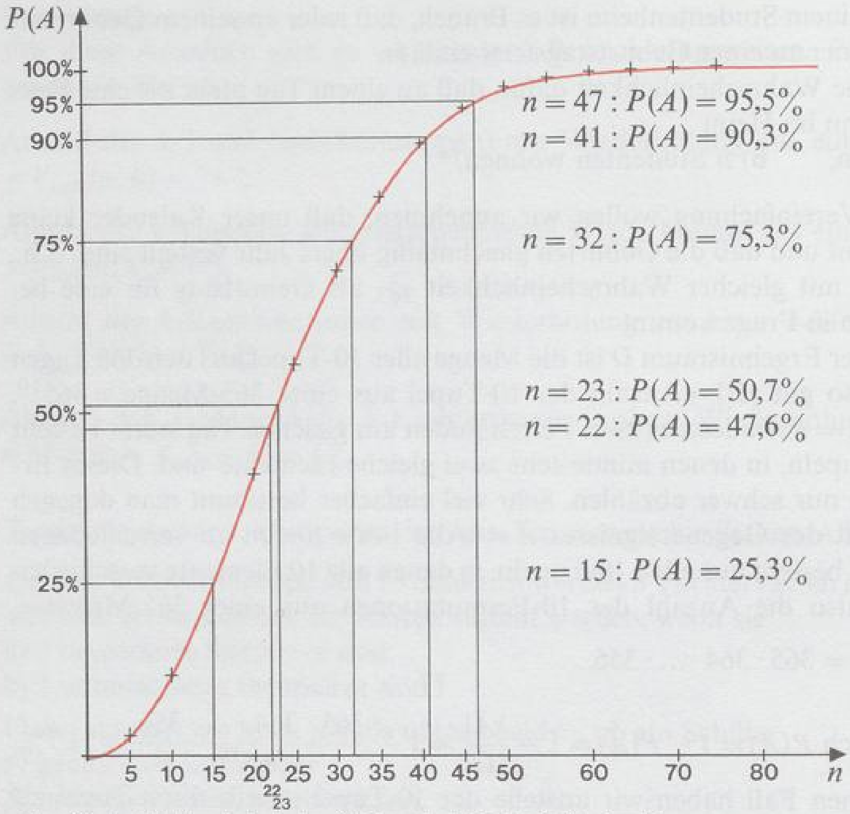


Fig. 98.1 Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit für das Zusammenfallen mindestens zweier Geburtstage von der Anzahl n der Personen

n	$P(A)$
0	0,000
5	0,027
10	0,117
15	0,253
20	0,411
25	0,569
30	0,706
35	0,814
40	0,891
45	0,941
50	0,970
55	0,986
60	0,994
65	0,998
70	0,999
75	1,000

Tab. 98.1 $P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter n Personen mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben.

a) Das betrachtete Ereignis $A :=$ »Genau 4 Richtige« besteht aus den Ziehungen von 6 Kugeln, bei denen genau 4 Kugelnummern mit 4 von den 6 auf dem Tippschein angekreuzten Zahlen übereinstimmen (siehe Bild 99.1). Zur Berechnung der Anzahl dieser günstigen Ergebnisse verwenden wir das Zählprinzip. Zunächst gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten, die 4 Treffer auf die 6 angekreuzten Zahlen zu verteilen. Dann aber gibt es noch $\binom{43}{2}$ Möglichkeiten, die beiden weiteren gezogenen Kugelnummern auf die 43 nicht angekreuzten Zahlen zu verteilen. Man erhält somit $|A| = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,545$ und damit für

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{13\,545}{13\,983\,816} = 0{,}000\,968\,6 \approx 0{,}097\% \approx 1‰.$$

b) Hier sind auch noch die Ergebnisse günstig, die genau 5 bzw. 6 Treffer enthalten. Da die Ereignisse A, $B :=$ »Genau 5 Richtige« und $C :=$ »Genau 6 Richtige« unvereinbar sind, gilt auf Grund von Satz 64.1:

$$P(\text{»Mindestens 4 Richtige«}) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) =$$

$$= \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} =$$

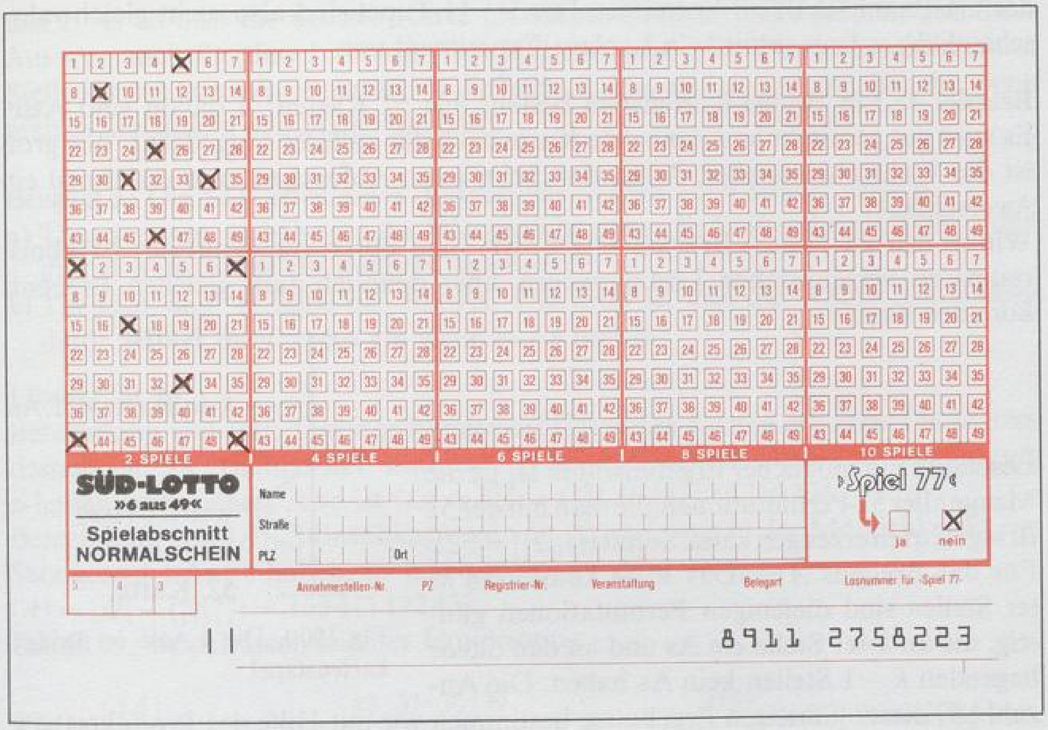


Bild 99.1 Lottoschein mit 2 ausgefüllten Spielfeldern

$$= \frac{13545 + 258 + 1}{13983816} = 0{,}0009871 \approx 0{,}099\% \approx 1\permil.$$

Füllt man also sehr oft Tippzettel aus, so kann man in etwa 1 von 1000 Fällen damit rechnen, mindestens 4 Richtige getippt zu haben. Bei 2 Tippreihen pro Woche kann man also etwa alle 10 Jahre einmal ein solches Erfolgserlebnis haben!

Beispiel 3: Wegen katastrophaler Wetterverhältnisse mußten an einem Spieltag sämtliche Spiele der Bundesliga ausfallen. Für die Totospieler wurden die 11 Spiele daher ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an diesem Spieltag mit einer Tippreihe (siehe Bild 90.1) genau 9 Richtige getippt zu haben?

Lösung: Ein möglicher Ergebnisraum Ω ist die Menge aller 11-Tupel, die man aus der 3-Menge $\{0, 1, 2\}$ bilden kann. Also gilt $|\Omega| =$ Anzahl der 11-Tupel aus einer 3-Menge $= 3^{11} = 177147$. Das Ereignis $A :=$ »Genau 9 Richtige« besteht aus denjenigen 11-Tupeln, die an genau 9 Stellen dieselben Zahlen aufweisen wie unsere Tippreihe. Diese 9 Richtigen lassen sich auf $\binom{11}{9}$ Arten aus den 11 getippten Zahlen auswählen. Für die restlichen 2 falschen Tips gibt es jeweils 2 Möglichkeiten. Der Produktsatz liefert also $|A| = \binom{11}{9} \cdot 2^2$. Damit erhält man

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{11}{9} \cdot 2^2}{3^{11}} = \frac{220}{177147} \approx 0{,}001242 \approx 1\permil.$$

Für einen normalen Spieltag ist diese Überlegung natürlich falsch, da die Erfahrung zeigt, daß die Zahl 1 im 11-Tupel erheblich öfter auftritt als die Zahl 0, und diese wiederum häufiger als die Zahl 2, weil die Heimmannschaft gegenüber der Gastmannschaft im Vorteil ist. Die 3^{11} 11-Tupel sind also nicht gleichwahrscheinlich; es liegt somit kein Laplace-Experiment vor.

Beispiel 4: Ein Bridge-Kartenspiel besteht aus 52 Karten; 4 davon sind Asse. Es wird gut gemischt und dann eine Karte nach der anderen aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim k-ten Aufdecken zum erstenmal ein As erscheint?

Wir wollen an diesem Beispiel zeigen, wie man durch die Wahl des Ergebnisraums zu verschiedenen Lösungswegen, aber dennoch zum gleichen Ergebnis kommen kann.

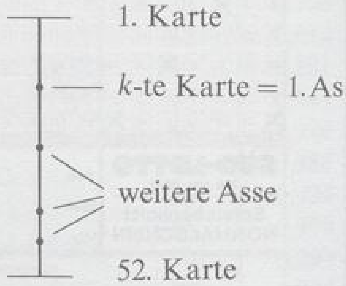


Fig. 100.1 Die 4 Asse im Bridgekartenstapel

Lösung 1: Ein möglicher Ergebnisraum Ω_1 ist die Menge aller 52-Permutationen, die man mit den 52 Bridgekarten erzeugen kann. Somit ist $|\Omega_1| = 52!$. Für das Ereignis $A :=$ »Das 1. As kommt an k-ter Stelle« sind diejenigen Permutationen günstig, die an k-ter Stelle ein As und an den davor liegenden $k-1$ Stellen kein As haben. Die Anzahl $|A|$ dieser günstigen Ergebnisse bestimmen wir mit Hilfe des Produktsatzes: Die ersten $k-1$ Stellen werden gebildet von den $(k-1)$-Permutationen aus der 48-Menge der 48 Nicht-Asse; das ergibt $\frac{48!}{(48-(k-1))!}$ Möglichkeiten. Für die k-te Stelle steht eines der 4 Asse zur Verfügung; das ergibt 4 Möglichkeiten. Die restlichen $52-k$ Stellen werden durch die Permutationen der noch verbliebenen $52-k$ Karten belegt; das ergibt $(52-k)!$ Möglichkeiten. Nach dem Produktsatz ist also $|A| = \frac{48!}{(49-k)!} \cdot 4 \cdot (52-k)!$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten wir somit

$$P(A) = \frac{48! \cdot 4 \cdot (52-k)!}{(49-k)! \cdot 52!} = \frac{1}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 13} \cdot \frac{(52-k)!}{(49-k)!} = \frac{(52-k)(51-k)(50-k)}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 13}.$$

Lösung 2: Wir denken uns die Stellen, an denen die Karten im Stapel liegen, von 1 bis 52 durchnumeriert. Die Nummern der Stellen, an denen die 4 Asse liegen, bilden eine 4-Menge. Ein möglicher Ergebnisraum Ω_2 ist dann die Menge aller 4-Mengen, die man aus der 52-Menge der Nummern von 1 bis 52 bilden kann. Das ergibt $|\Omega_2| = \binom{52}{4}$. Die für das Ereignis A günstigen Ergebnisse bestehen jetzt aus den 4-Mengen, die als kleinstes Element die Zahl k enthalten. Die übrigen 3 Zahlen einer solchen Menge müssen aus den nach k kommenden Nummern $k+1$, $k+2, \ldots, 52$ ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{52-k}{3}$ Möglichkeiten. Für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ erhalten wir damit auf diesem Weg den Ausdruck $P(A) = \frac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}$, der völlig anders aussieht als der in Lösung 1 errechnete. Durch eine einfache Umformung kann die Gleichheit aber leicht gezeigt werden.

Da $\binom{52-k}{3}$ mit wachsendem k monoton fällt, nimmt die Wahrscheinlichkeit für A monoton mit wachsender Platznummer k ab. Die wahrscheinlichste Stelle für das 1. As ist also die oberste Karte im Stapel. Man bedenke jedoch, daß diese Aussage auch für den 1. König, die 1. Dame usw. gilt! Die wahrscheinlichste Stelle für das letzte As ist natürlich die letzte Karte, was man leicht einsieht, wenn man in Gedanken den Stapel umkehrt.

Beispiel 5: Die 52 Karten eines Bridgespiels werden auf 4 Spieler verteilt.

a) Theodor sagt, er habe ein As. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens ein weiteres As besitzt?

b) Theodor sagt, er habe das Pik-As. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens ein weiteres As besitzt?

Lösung für **a)**:

Berechnung von $|\Omega|$: Theodor könnte auf $\binom{52}{13}$ Arten Karten erhalten. Da er mindestens ein As erhalten hat, sind die $\binom{48}{13}$ Möglichkeiten, einen Satz ohne As zu erhalten, abzuziehen. Also ist $|\Omega| = \binom{52}{13} - \binom{48}{13} = 442085310304$.
Berechnung von $|A|$: Subtrahiert man von $|\Omega|$ die Anzahl der Möglichkeiten, im Satz genau 1 As zu haben, so erhält man $|A|$. Also
$|A| = |\Omega| - \binom{4}{1}\binom{48}{12} = 163411172432$.
Damit ergibt sich nach leichter Umformung

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{52 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 - 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39} = 1 - \frac{9139}{14498} = 0{,}3696 \approx 37\%.$$

Lösung für **b)**:

Theodor hat das Pik-As erhalten. Für seine weiteren 12 Karten gibt es noch $\binom{51}{12}$ Möglichkeiten; also ist $|\Omega| = \binom{51}{12}$. Davon sind wieder $\binom{48}{12}$ Möglichkeiten ohne As. Daher ist

$|A| = |\Omega| - \binom{48}{12}$. Somit ergibt sich

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{48}{12}}{\binom{51}{12}} = 1 - \frac{9139}{20825} = \frac{11686}{20825} = 0{,}5612 \approx 56\%.$$

Es ist zunächst erstaunlich, daß die beiden Wahrscheinlichkeiten so verschieden sind. Man muß dabei jedoch bedenken, daß den beiden Aufgaben verschiedene Wahrscheinlichkeitsräume zugrunde liegen. Im Fall **a)** besteht Ω aus all den Spielen, in denen Theodor mindestens ein As erhalten hat, im Fall **b)** hingegen aus all den Spielen, bei denen Theodor das Pik-As erhalten hat. Man erkennt also, daß die zusätzliche Information, welches As Theodor hat, erheblichen Einfluß auf das Ergebnis hat.
Ähnlich, aber leichter durchschaubar ist

Beispiel 6: Ein Vater von zwei Kindern sagt:

a) »Eines meiner zwei Kinder ist ein Junge.«

b) »Das ältere meiner zwei Kinder ist ein Junge.«

Wie groß ist in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auch das zweite Kind ein Junge ist, falls Knaben- und Mädchengeburt als gleichwahrscheinlich angenommen werden?

Lösung: Ordnet man die Paare dem Alter nach, so erhält man mit J := Junge, M := Mädchen:

Fall **a)**:

$\Omega = \{(J, J), (J, M), (M, J)\}$

$A = \{(J, J)\}$

$P(A) = \frac{1}{3}$

Fall **b)**:

$\Omega = \{(J, J), (J, M)\}$

$A = \{(J, J)\}$

$P(A) = \frac{1}{2}$

Die hier berechneten Wahrscheinlichkeiten sind folgendermaßen zu verstehen: Untersucht man sehr viele Familien mit zwei Kindern unter den angegebenen Bedingungen, so wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Kinder Jungen sind, in der Nähe der angegebenen Werte liegen. Dieser Sachverhalt läßt sich gut anhand von Tabelle 11.1 veranschaulichen. Interpretiert man I als Junge und 0 als Mädchen, und faßt man zwei aufeinanderfolgende Würfe jeweils als die beiden Kinder einer zufällig herausgegriffenen Familie zusammen, so erhält man

108 Familien mit zwei Mädchen (00),
82 Familien mit der Reihenfolge Mädchen/Junge (0I),
102 Familien mit der Reihenfolge Junge/Mädchen (I0),
108 Familien mit zwei Jungen (II).

Im Fall **a)** ergibt sich als relative Häufigkeit $h_{292} = \frac{108}{82+102+108} = \frac{108}{292} = 0{,}37$.
Im Fall **b)** ergibt sich als relative Häufigkeit $h_{210} = \frac{108}{102+108} = \frac{108}{210} = 0{,}51$.

Das in Aufgabe 68/**16** für $n = 3$ gestellte Problem der vertauschten Briefe läßt sich nun mit Hilfe der Formel von *Sylvester* (Satz 66.1) allgemein lösen:

Beispiel 7: *Bernoulli-Euler*sches Problem der vertauschten Briefe.

Unbesehen werden n Briefe in n vorbereitete Umschläge gesteckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß kein Brief im richtigen Umschlag steckt?

Lösung: Es gibt insgesamt $n!$ Möglichkeiten, die n Briefe auf die n Umschläge zu verteilen; also gilt $|\Omega| = n!$.
Bezeichnen wir nun die Briefe und die zugehörigen Umschläge mit der gleichen Nummer i $(1 \leqq i \leqq n)$, so bedeute E_i das Ereignis »Der Brief i liegt im Umschlag i«. Dafür gibt es $|E_i| = 1 \cdot [(n-1)!]$ Möglichkeiten. Es gilt also

$$P(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Das uns interessierende Ereignis $E :=$ »Kein Brief liegt in seinem Umschlag« läßt sich durch die E_i folgendermaßen ausdrücken:

$$E = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap \ldots \cap \bar{E}_n = \overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n}$$

Damit erhalten wir

$$P(E) = P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n}) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$$

Zur Berechnung des Subtrahenden benötigen wir die Formel von *Sylvester* (Satz 66.1). Für die darin auftretenden Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad i < j;$$

$$P(E_i \cap E_j \cap E_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \quad i < j < k;$$

....

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = \frac{(n-n)!}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Damit gilt:

$$P(E) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j}^{n} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - + \ldots \right) =$$

$$= 1 - \left(\binom{n}{1} \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \frac{1}{n!} \right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

wie 1708 *Montmort* (1678–1719) in seinem *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* zeigte. – Figur 103.1 gibt die Abhängigkeit dieser Wahrscheinlichkeit $P(E)$ von der Anzahl n der Briefe wieder. Erstaunlicherweise ändert sich $P(E)$ praktisch nicht mehr ab $n = 7$. Das heißt, daß die Wahrscheinlichkeit $1 - P(E)$ dafür,

n	$P(E)$
1	0,0000
2	0,5000
3	0,3333
4	0,3750
5	0,3667
6	0,3681
7	0,3679
8	0,3679
9	0,3679
10	0,3679
. .	
$+\infty$	$\frac{1}{e} = 0{,}367879\ldots$

Tab. 103.1 $P(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keiner von n Briefen im richtigen Umschlag steckt.

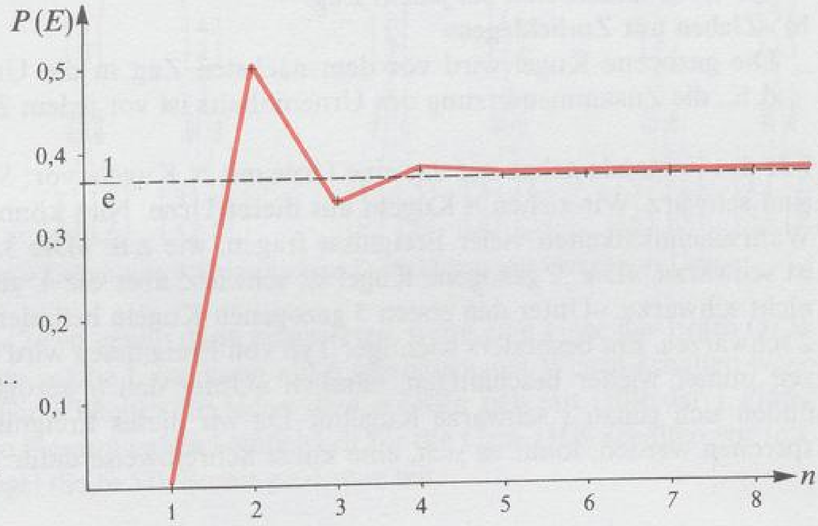


Fig. 103.1 Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit von n beim *Bernoulli-Euler*schen Problem der vertauschten Briefe.

daß mindestens ein Brief richtig ankommt, ab $n = 7$ praktisch unabhängig von der Anzahl der Briefe durch $1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212$ gut approximiert wird, wie 1708 *Montmort* und 1751 *Leonhard Euler* (1707–1783) zeigten. (Siehe auch die Fußnote auf Seite 68.)

8.4. Das Urnenmodell*

8.4.1. Problemstellung

Viele Zufallsexperimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. Dabei ist das Urnenexperiment oft übersichtlicher, weil man sich hier auf das Wesentliche des Zufallsgeschehens beschränken kann. So läßt sich das Laplace-Zufallsexperiment »Werfen eines Laplace-Würfels« durch das Ziehen aus einer Urne mit 6 unterscheidbaren Kugeln simulieren. Aber auch Nicht-Laplace-Experimente lassen sich durch ein Urnenexperiment simulieren. So weiß man z. B., daß die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt weltweit ziemlich genau den Wert 0,514 hat. Das Zufallsexperiment »Geburt eines Kindes« kann also durch das Ziehen aus einer Urne simuliert werden, die 514 Kugeln einer Farbe und 486 andere Kugeln enthält.

Bei einem Urnenexperiment verwendet man eine Urne, die gleichartige, je nach Problemstellung mit verschiedenen Merkmalen (z. B. Farbe, Nummer) versehene Kugeln enthält. Das Experiment besteht nun darin, daß man der Reihe nach je eine Kugel bis zu einer festgelegten Anzahl zieht und deren Merkmale notiert. Dabei gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Verfahrensweisen:

a) »Ziehen ohne Zurücklegen«
Die jeweils gezogene Kugel wird beiseite gelegt, d. h., die Zusammensetzung der Urne ändert sich bei jedem Zug.

b) »Ziehen mit Zurücklegen«
Die gezogene Kugel wird vor dem nächsten Zug in die Urne zurückgelegt; d. h., die Zusammensetzung des Urneninhalts ist vor jedem Zug die gleiche.**

Für das Folgende geben wir uns eine Urne mit N Kugeln vor; S dieser N Kugeln sind schwarz. Wir ziehen n Kugeln aus dieser Urne. Nun könnte man nach den Wahrscheinlichkeiten vieler Ereignisse fragen, wie z. B. »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz«, »Die 3. gezogene Kugel ist schwarz, aber die 4. gezogene Kugel ist nicht schwarz«, »Unter den ersten 5 gezogenen Kugeln befinden sich mindestens 2 schwarze«. Ein besonders wichtiger Typ von Ereignissen wird uns in der Folgezeit immer wieder beschäftigen, nämlich »Unter den n gezogenen Kugeln befinden sich genau s schwarze Kugeln«. Da wir dieses Ereignis sehr häufig ansprechen werden, lohnt es sich, eine kurze Schreibweise dafür einzuführen. Wir

* Zur Einführung der Urne in die Wahrscheinlichkeitsrechnung lese man die Fußnote zu Aufgabe 124/**99**.

** Bei komplizierteren Urnenexperimenten zieht man jeweils statt *einer* Kugel einen Satz von m Kugeln mit oder ohne Zurücklegen.

bezeichnen mit Z die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Das Ereignis »Es werden genau s schwarze Kugeln gezogen« schreibt sich damit kurz »$Z = s$«. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(Z = s)$ müssen wir nun unterscheiden, ob das Ziehen ohne oder mit Zurücklegen erfolgen soll.

8.4.2. Die Wahrscheinlichkeit für genau s schwarze Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel: Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir zunächst ein Baumdiagramm. Den jeweiligen Urneninhalt geben wir durch ein Zahlenpaar wieder; die erste Zahl bedeute die Anzahl der jeweils noch vorhandenen schwarzen Kugeln, die zweite die Anzahl der anderen Kugeln (Figur 105.1).

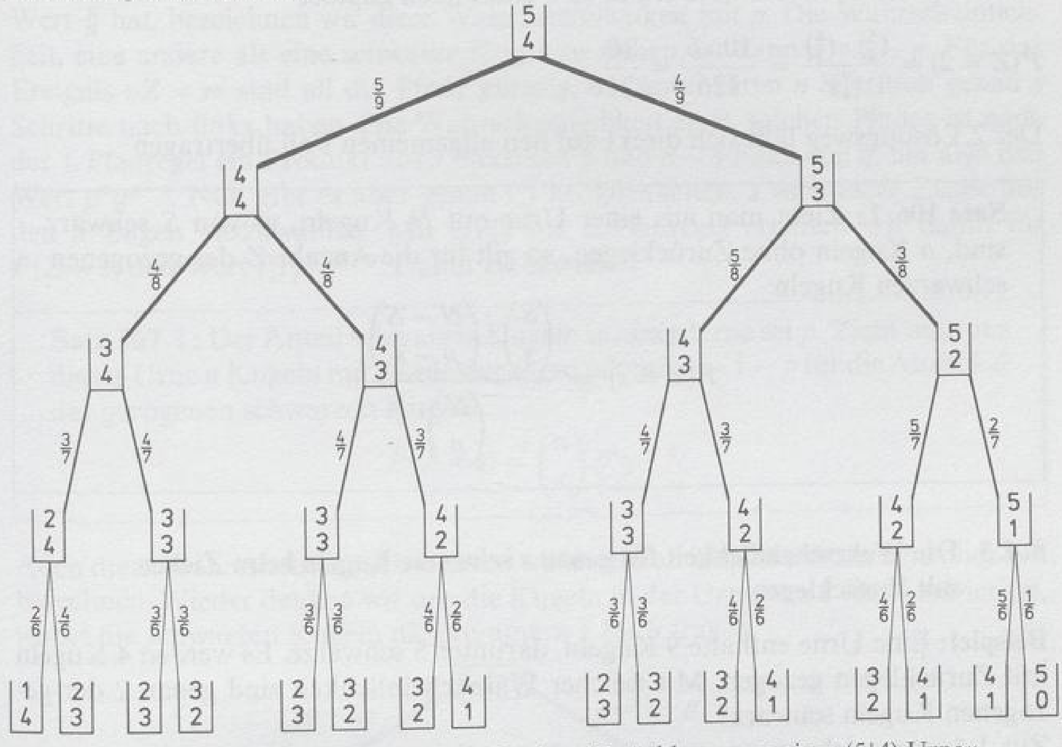


Fig. 105.1 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer (5|4)-Urne«

Das Ereignis »$Z = 2$« ist genau dann eingetreten, wenn eine Urne der Form (3|2) entstanden ist. Eine solche Urne kann auf 6 verschiedenen Wegen erhalten werden. Die Wahrscheinlichkeiten für jeden Weg ergeben sich mit Hilfe der 1. Pfadregel (Seite 55), die Gesamtwahrscheinlichkeit für die Urne (3|2) erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel (Seite 57). Somit gewinnen wir

$$P((3|2)) = P(Z=2) = \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6} + \\ + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{4}{6} = \tfrac{10}{21} = \approx 47{,}6\,\%.$$

In der vorstehenden Überlegung haben wir so gerechnet, als ob die Kugeln nacheinander gezogen würden. In **2.2.3** (Seite 17) hatten wir behauptet, daß die gleichzeitige Entnahme von 4 Kugeln ersetzt werden kann durch das 4malige Ziehen von je einer Kugel ohne Zurücklegen. Dies können wir durch Anwendung unserer kombinatorischen Hilfsmittel zeigen, indem wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen.
Denken wir uns dazu die 9 Kugeln unterscheidbar, etwa numeriert von 1 bis 9, wobei die schwarzen Kugeln die Nummern 1 bis 5 tragen sollen. Als Ergebnisraum Ω wählen wir die Menge aller 4-Mengen von Kugeln, die man aus der Urne ziehen kann. Da keine Kugel bevorzugt ist, sind alle diese Mengen gleichwahrscheinlich. In einer 9-Menge gibt es $\binom{9}{4}$ 4-Teilmengen; also ist $|\Omega| = \binom{9}{4}$. Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Die 2 schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{5}{2}$ Arten aus den 5 schwarzen Kugeln der Urne ziehen. Für die restlichen 2 Kugeln gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, aus den 4 anderen Kugeln gezogen zu werden. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich dann nach *Laplace*

$$P(Z=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{10 \cdot 6}{126} = \frac{10}{21}.$$

Der 2. Lösungsweg läßt sich direkt auf den allgemeinen Fall übertragen.

Satz 106.1: Zieht man aus einer Urne mit N Kugeln, wovon S schwarz sind, n Kugeln ohne Zurücklegen, so gilt für die Anzahl Z der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(Z=s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}.$$

8.4.3. Die Wahrscheinlichkeit für genau s schwarze Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen

Beispiel: Eine Urne enthalte 9 Kugeln, darunter 5 schwarze. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 der gezogenen Kugeln schwarz?
Zur Lösung zeichnen wir wieder ein Baumdiagramm. Es bezeichne $\bullet$ den Zug einer schwarzen Kugel, $\circ$ den Zug einer anderen Kugel (Figur 107.1).
Jeder Pfad, der genau 2mal nach links verläuft, führt zu genau 2 gezogenen schwarzen Kugeln. Jeder dieser Pfade hat auf Grund der 1. Pfadregel dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $(\frac{5}{9})^2 \cdot (\frac{4}{9})^2$. Da es genau 6 solcher Pfade gibt, erhalten wir mit Hilfe der 2. Pfadregel

$$P(Z=2) = 6 \cdot (\tfrac{5}{9})^2 \cdot (\tfrac{4}{9})^2 = \tfrac{2400}{6561} \approx 36{,}6\%.$$

Auch im allgemeinen Fall hilft uns das Baumdiagramm (Figur 107.2) beim Auffinden der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Da beim Ziehen mit Zurücklegen die

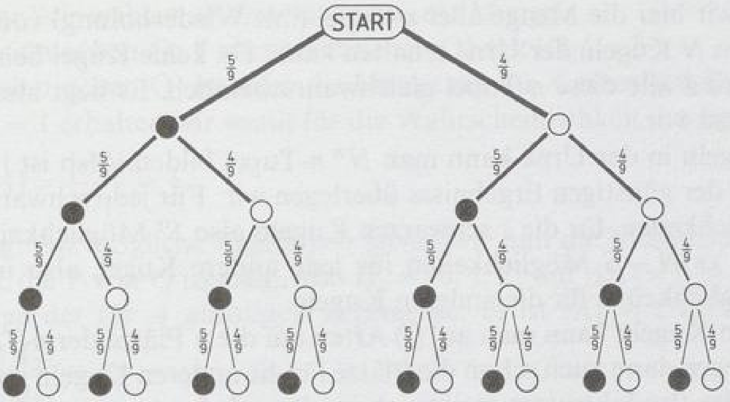


Fig. 107.1 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln mit Zurücklegen aus einer (5|4)-Urne«

Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel bei jedem Zug den Wert $\frac{S}{N}$ hat, bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit p. Die Wahrscheinlichkeit, eine andere als eine schwarze Kugel zu ziehen, ist dann $q := 1 - p$. Für das Ereignis »$Z = s$« sind all die Pfade günstig, die unter ihren n Schritten genau s Schritte nach links haben. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Pfades ist nach der 1. Pfadregel ein Produkt aus s Faktoren p und $n - s$ Faktoren q, hat also den Wert $p^s q^{n-s}$. Nun gibt es aber genau $\binom{n}{s}$ Möglichkeiten, s »schwarze Züge« aus den n Zügen auszuwählen. Mit Hilfe der 2. Pfadregel erhalten wir damit für $P(Z = s)$ den Wert $\binom{n}{s} p^s q^{n-s}$. Damit ist bewiesen

Satz 107.1: Der Anteil schwarzer Kugeln in einer Urne sei p. Zieht man aus dieser Urne n Kugeln mit Zurücklegen, so gilt mit $q := 1 - p$ für die Anzahl Z der gezogenen schwarzen Kugeln

$$P(Z = s) = \binom{n}{s} p^s q^{n-s}.$$

Auch diese Wahrscheinlichkeit können wir direkt als Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen. Wieder denken wir uns die Kugeln in der Urne von 1 bis N numeriert, wobei die schwarzen Kugeln die Nummern 1 bis S tragen.

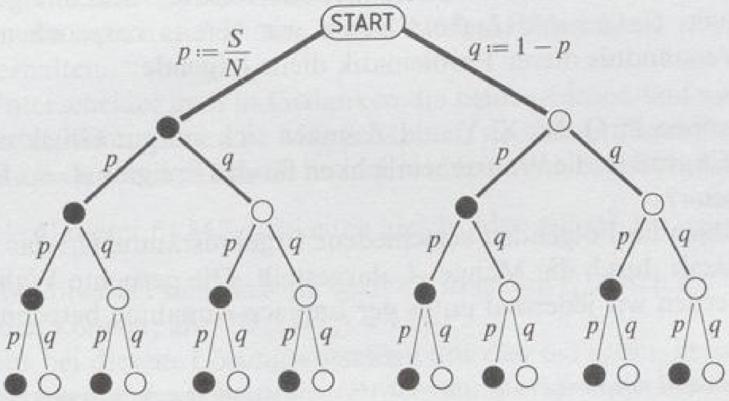


Fig. 107.2 Baum zum »Ziehen von 4 Kugeln mit Zurücklegen aus einer $(S|N - S)$-Urne«

Als Ω wählen wir hier die Menge aller n-Tupel (mit Wiederholung) von Kugeln, die man aus den N Kugeln der Urne erhalten kann. Da keine Kugel beim Ziehen bevorzugt ist, sind alle diese n-Tupel gleichwahrscheinlich. Es liegt also ein Laplace-Experiment vor.
Mit den N Kugeln in der Urne kann man N^n n-Tupel bilden. Also ist $|\Omega| = N^n$.
Für die Anzahl der günstigen Ergebnisse überlegen wir: Für jede schwarze Kugel gibt es S Möglichkeiten, für die s schwarzen Kugeln also S^s Möglichkeiten. Entsprechend gibt es $N - S$ Möglichkeiten für jede andere Kugel, also insgesamt $(N - S)^{n-s}$ Möglichkeiten für die anderen Kugeln.
Die s schwarzen Kugeln kann man auf $\binom{n}{s}$ Arten auf die n Plätze der n-Tupel verteilen. Damit liegen dann auch schon die Plätze für die anderen Kugeln im n-Tupel fest. Mit Hilfe des Produktsatzes ergibt sich somit nach *Laplace*:

$$P(Z = s) = \frac{\binom{n}{s} S^s (N-S)^{n-s}}{N^n} = \binom{n}{s} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^s \cdot \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-s} = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} =$$
$$= \binom{n}{s} p^s q^{n-s}.^*$$

8.5. Laplace-Paradoxa oder »Was ist gleichwahrscheinlich?«

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A nach der Formel $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ setzt bekanntlich voraus, daß die Ergebnisse des Experiments mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Wie wir u.a. in Beispiel 4 von **8.3.** gesehen haben, kann man zu einem realen Experiment verschiedene Ergebnisräume konstruieren, für die man zu leicht unkritisch die Laplace-Annahme macht, weil es oft sehr schwierig ist, die wirkliche Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erkennen. *Laplace* selbst schrieb, daß dies gerade einer der heikelsten Punkte in der Untersuchung des Zufallsgeschehens sei.** Es darf einen also nicht wundernehmen, daß bei einem solchen Vorgehen unterschiedliche Werte für die Wahrscheinlichkeit ein und desselben Ereignisses errechnet werden können. Manche solche Fehlschlüsse sind als *Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung* bekannt geworden. Die Probleme von *Galilei* und *Leibniz* haben wir bereits besprochen***. Zu einem tieferen Verständnis dieser Problematik diene folgende

Aufgabe: 6 Personen P, Q, W, X, Y und Z setzen sich auf gut Glück um einen runden Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A :=$ »P kommt neben Q zu sitzen«?
Lösung: Wir wählen im Folgenden verschiedene Ergebnisräume Ω_i; das Ereignis A wird dann jeweils durch die Menge A_i dargestellt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ werden wir jedesmal unter der Laplace-Annahme berechnen.

* Die Formel wird manchmal nach *Isaac Newton* (1643–1727) benannt, stammt aber mit Sicherheit nicht von ihm.
** Siehe Seite 76.
*** Siehe dazu Seite 76 und die Aufgaben 12/**1**, **2** und 111/**10**, **11**.

1. Lösung: Wir wählen als Ergebnisraum die Menge
$\Omega_1 := \{\text{P sitzt neben Q; P sitzt nicht neben Q}\}$ mit $|\Omega_1| = 2$.
$A_1 = \{\text{P sitzt neben Q}\}$ ist dann die Menge der für A günstigen Ergebnisse.
Mit $|A_1| = 1$ erhalten wir somit für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A den Wert $P(A) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{1}{2}$.

2. Lösung: Als mögliche Ergebnisse lassen wir nun die Minimalanzahl von Personen zu, die P von Q trennen, also $\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$ mit $|\Omega_2| = 3$. $A_2 = \{0\}$ ist dann die Menge der für A günstigen Ergebnisse; es ist $|A_2| = 1$ und damit

$P(A) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{1}{3}$.

3. Lösung: Als mögliche Ergebnisse betrachten wir die Anzahl von Personen, die im Uhrzeigersinn zwischen P und Q sitzen, also $\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit $|\Omega_3| = 5$. Die günstigen Ergebnisse bilden die Menge $A_3 = \{0, 4\}$ mit $|A_3| = 2$. Damit ergibt sich $P(A) = \frac{|A_3|}{|\Omega_3|} = \frac{2}{5}$.

4. Lösung: Wir numerieren die Plätze (siehe Figur 109.1) und nehmen als Ergebnisse des Zufallsexperiments die 2-Mengen der Nummern derjenigen Plätze, auf denen P und Q sitzen können, also

$\Omega_4 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{5, 6\}\}$ mit $|\Omega_4| = \binom{6}{2} = 15$.

A_4 besteht dann aus denjenigen 2-Mengen, die benachbarte Plätze angeben, also

$A_4 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}\}$ mit $|A_4| = 6$.

Somit erhalten wir $P(A) = \frac{|A_4|}{|\Omega_4|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

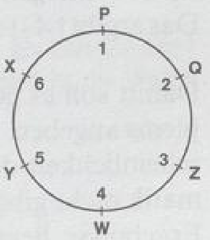


Fig. 109.1
Sechs Personen an einem runden Tisch

5. Lösung: Da es gleichgültig ist, ob P neben Q oder Q neben P sitzt, können wir beide mit dem gleichen Symbol 1 bezeichnen. Die restlichen 4 Personen können wir auch identifizieren; wir wählen für sie das Symbol 0. Ω_5 besteht dann aus allen 6-Tupeln, die man aus 2 Einsen und 4 Nullen bilden kann. $|\Omega_5|$ kann man auf 2 Arten erhalten.

1. Art: Unterscheidet man in Gedanken die beiden Einsen und auch die 4 Nullen voneinander, dann gibt es 6! Möglichkeiten, sie anzuordnen. Da man aber eine Permutation der beiden Einsen bzw. der 4 Nullen nicht unterscheiden kann, sind jeweils $2! \cdot 4!$ dieser 6! Möglichkeiten gleich. Also gilt $|\Omega_5| = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.

2. Art: Man überlegt sich, daß die beiden Einsen auf $\binom{6}{2}$ Arten auf die 6 Plätze verteilt werden können; also $|\Omega_5| = \binom{6}{2} = 15$.

A_5 besteht bei diesem Lösungsvorschlag aus den 6-Tupeln, in denen die beiden Einsen nebeneinanderstehen oder Tupelanfang und -ende bilden. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten, wie man durch Aufzählen der Menge A_5 feststellt;

$A_5 = \{110000, 011000, \ldots, 000011, 10001\}$, also $|A_5| = 6$. Somit erhalten wir wiederum $P(A) = \dfrac{|A_5|}{|\Omega_5|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

6. Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir aber auch annehmen, daß P auf Platz Nr. 1 sitzt. Als Ergebnisse des Experiments nehmen wir die Nummern der Plätze, auf denen Q sitzen kann, also $\Omega_6 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $|\Omega_6| = 5$. Die günstigen Ergebnisse bilden die Menge $A_6 = \{2, 6\}$ mit $|A_6| = 2$. Damit wird $P(A) = \dfrac{|A_6|}{|\Omega_6|} = \frac{2}{5}$.

7. Lösung: Als mögliche Ergebnisse betrachten wir alle Permutationen der 6 Personen, also $|\Omega_7| = 6!$. A_7 besteht aus allen Permutationen, in denen P neben Q steht, und aus denjenigen, bei denen P und Q am Anfang bzw. am Ende stehen, also $A_7 = \{\text{PQXYZW}, \ldots, \text{XQPYZW}, \ldots, \text{QXYZWP}, \ldots\}$. Die Mächtigkeit von A_7 bestimmen wir mit Hilfe des Zählprinzips: Für P gibt es 6 Möglichkeiten, Platz zu nehmen. Q hat dann jeweils 2 Möglichkeiten, nämlich links oder rechts von P Platz zu nehmen. Die restlichen 4 Personen können auf 4! Arten die restlichen 4 Plätze belegen.
Das ergibt $|A_7| = 6 \cdot 2 \cdot 4!$ und damit $P(A) = \dfrac{|A_7|}{|\Omega_7|} = \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{5}$.

Damit soll es genug sein! Sicherlich lassen sich noch andere Lösungen des Problems angeben. Aber es erhebt sich doch die Frage, was ist nun die *richtige* Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A? Da es Mehrheitsentscheidungen in der Mathematik nicht gibt, müssen wir nachdenken. Der Grund für die Verschiedenheit der Ergebnisse liegt offenbar darin, daß wir für die unterschiedlichsten Ergebnisräume immer die Laplace-Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse gemacht haben, wozu wir durch die Formulierung »auf gut Glück« verleitet wurden. Präzisiert man nun den Vorgang, wie die 6 Personen am Tisch Platz nehmen, so erkennt man, daß *jeder* der gefundenen Wahrscheinlichkeitswerte $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{3}$ richtig sein kann! Es kann z.B. sein, daß P und Q durch den Wurf einer Laplace-Münze entscheiden, ob sie nebeneinander oder getrennt sitzen wollen. Jetzt ist für Ω_1 die Laplace-Annahme richtig, für alle anderen vorgestellten Ergebnisräume aber falsch. In diesem Fall ist also $P(A) = \frac{1}{2}$ die richtige Antwort auf das Problem. Es kann aber auch sein, daß P und Q durch Werfen eines Laplace-Würfels die Minimalanzahl der Personen bestimmen, die zwischen ihnen sitzen sollen. Dabei verabreden sie, daß Augenzahl 1 und Augenzahl 4 eine Person bedeuten, Augenzahl 2 und Augenzahl 5 zwei Personen und Augenzahl 3 und Augenzahl 6 keine Person. Jetzt ist für Ω_2 die Laplace-Annahme richtig, für alle anderen vorgestellten Ergebnisräume jedoch falsch. $P(A) = \frac{1}{3}$ ist nun die richtige Antwort auf das Problem. Schließlich können die 6 Personen ihre Platznummern als Lose ziehen. Dann ist die Laplace-Annahme für die Ergebnisräume Ω_3 bis Ω_7 richtig. Für Ω_7 ist dies unmittelbar einsichtig. Die Ergebnisräume Ω_3 bis Ω_6 entstehen aus Ω_7 durch eine Vergröberung dergestalt, daß jeweils gleich viele Elemente aus Ω_7 identifiziert werden (vgl. Aufgabe 125/**105**); dadurch bleibt aber die Laplace-Eigenschaft erhalten. Die richtige Lösung lautet in all diesen Fällen $P(A) = \frac{2}{5}$.

Besonders problematisch ist der Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit, wenn der Ergebnisraum unendlich viele Ergebnisse enthält. Zwei historische Paradoxa, in denen geometrische Probleme mit unendlichen Ergebnisräumen behandelt werden, sind im Anhang II (Seite 388) dargestellt.

Aufgaben

Zu 8.1.

• 1. Zeige mit den *Kolmogorow*-Axiomen, daß $P: A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$, $A \subset \Omega$, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

2. Aus dem Wort »STOCHASTIK« werde auf gut Glück ein Buchstabe ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) das K gewählt wird, **b)** ein T gewählt wird,
c) ein Konsonant gewählt wird, **d)** S oder T gewählt wird?

3. Aus dem Wort »KLASSE« werden auf gut Glück zwei Buchstaben ausgewählt.
a) Auf wie viele Arten ist eine solche Auswahl möglich?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
1) ein A darunter ist, **2)** ein S darunter ist, **3)** zwei Konsonanten gewählt werden?

4. Eine natürliche Zahl n $(10 < n \leqq 20)$ werde willkürlich gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) eine gerade Zahl gezogen wird,
b) eine Primzahl gezogen wird,
c) eine durch 4 teilbare Zahl gezogen wird,
d) eine durch 4 und 7 teilbare Zahl gezogen wird?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Quadrat einer beliebig aus $\{1, 2, \ldots, 100\}$ herausgegriffenen Zahl als Einerziffer **a)** 4, **b)** 5, **c)** 2 hat?

6. Eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen und Zahl wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Es fällt genau einmal Wappen«
$B :=$ »Es fällt mindestens einmal Wappen«
$C :=$ »Es fällt höchstens einmal Wappen«

7. Eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen und Zahl wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Es fällt genau zweimal Zahl«
$B :=$ »Es fällt mindestens zweimal Zahl«
$C :=$ »Es fällt höchstens zweimal Zahl«

8. In einem Spiel wird eine L-Münze dreimal geworfen. Erscheint zweimal nacheinander Zahl, so erhält der Spieler einen Preis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

9. Zwei Laplace-Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Augensumme durch 3 (5 bzw. 6) teilbar ist.

10. *Leibniz* (1646–1716) dachte, es sei mit zwei Würfeln ebenso leicht, eine 11 wie eine 12 zu werfen. Entscheide, ob er recht hatte. (Vgl. Aufgabe 12/**1** und siehe Seite 76.)

•11. Spieler hatten entdeckt, daß beim Wurf mit 3 Würfeln die Augensumme 10 leichter zu erreichen ist als die Augensumme 9. *Galilei* (1564–1642) fand dafür die richtige Erklärung (siehe Seite 76). Zeige durch Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der beiden Augensummen, welch kleiner Unterschied durch die Spieler damals bemerkt worden war. (Vgl. auch Aufgabe 12/**2**.)

12. a) Welche Augensumme ist beim Wurf zweier Würfel am wahrscheinlichsten?

b) Theodor bietet folgende Wetten mit gleichen Einsätzen an:

1) Die Augensumme 6 fällt eher als die Augensumme 7.

2) Die Augensumme 8 fällt eher als die Augensumme 7.

3) Die Augensummen 6 und 8 fallen eher als zum zweiten Mal die Augensumme 7.

Welche Wette würdest du eingehen? Begründe deine Antwort!

13. Aus dem *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* von *Christiaan Huygens* (1629–1695):

a) »*Aufgabe XIV*: Wenn ich und ein anderer abwechselnd 2 Würfel werfen unter der Bedingung, daß ich gewinne, wenn ich die 7 werfe, er aber, wenn er 6 wirft, und ich ihm den ersten Wurf lasse, wie verhalten sich dann die Gewinnchancen?«*

Hinweis: *Jakob Bernoulli* (1655–1705) löste diese und die nächste Aufgabe mit Hilfe einer geometrischen Reihe.

b) »*Problem I*: A und B spielen mit zwei Würfeln unter der Bedingung, daß A gewinnt, wenn er sechs Augen wirft, B jedoch, wenn er sieben Augen wirft; A beginnt das Spiel mit einem Wurf, dann tut B zwei Würfe hintereinander, dann ebenso A zwei Würfe, und so fort, bis schließlich einer gewinnt. Wie verhält sich die Hoffnung von A zu der von B?«

14. Aus einem Bridge-Kartenspiel (52 Karten) wird eine Karte gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

$A :=$ »Die gezogene Karte ist eine Herzkarte«
$B :=$ »Die gezogene Karte ist ein König«
$C :=$ »Die gezogene Karte ist Herz-König«
$D :=$ »Die gezogene Karte ist eine Herzkarte oder ein König«
$E :=$ »Die gezogene Karte ist entweder eine Herzkarte oder ein König«
$F :=$ »Die gezogene Karte ist eine Herzkarte, aber kein König«
$G :=$ »Die gezogene Karte ist ein König, aber keine Herzkarte«
$H :=$ »Die gezogene Karte ist weder eine Herzkarte noch ein König«.

15. Zwei (drei) Jungen und drei Mädchen sind eingeladen. Sie treffen nacheinander ein. Jede Reihenfolge des Eintreffens ist gleichwahrscheinlich. Wie wahrscheinlich treffen

a) abwechselnd ein Junge und ein Mädchen ein,

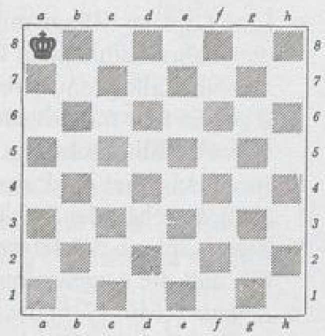
b) die drei Mädchen direkt nacheinander ein?

16. In einem Benzolring seien zwei der sechs Kohlenstoffatome radioaktiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden nebeneinanderliegen?

17. Die Oberfläche eines Würfels wird rot eingefärbt. Dann werde der Würfel durch 6 ebene Schnitte in 27 kongruente Teilwürfel zerlegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein willkürlich herausgegriffener Teilwürfel

a) keine gefärbte Fläche hat,

b) genau 2 rote Flächen hat?



18. Auf dem leeren Schachbrett steht der schwarze König auf a8 (c3). Die weiße Dame werde auf gut Glück auf eines der restlichen 63 Felder gestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bietet sie Schach?

* *Huygens* schickt diese Aufgabe am 18.4.1656 an *Gilles Personne de Roberval* (1602–1675), um seine Lösung bestätigt zu bekommen. Als er nichts hörte, wendet er sich an *Mylon*. Mittlerweile hatte *Pierre de Carcavy* (um 1600–1684) diese Aufgabe an *Pierre de Fermat* (1601–1665) gesandt, der im Juni 1656 zugleich mit der Lösung *Carcavy* zwei weitere Probleme zuschickt. *Huygens* erhält sie von diesem im Brief vom 22.6.1656. Am 6.7.1656 schickt er die Lösung an *Carcavy*. Als Problem I und III nimmt er sie in seinen *Traktat* auf.

19. Zwei fehlerhafte Transistoren sind mit zwei guten zusammengepackt worden. Man prüft die Transistoren der Reihe nach, bis man weiß, welche die zwei fehlerhaften sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist man nach Prüfung des zweiten Transistors, mit welcher Wahrscheinlichkeit erst nach Prüfung des dritten Transistors fertig?

Zu 8.2

20. Von A nach B führen 7 Wege. Von B nach C führen 4 Wege.
    a) Wie viele Wege führen von A nach C über B?
    b) Von C nach D führen 9 Wege. Wie viele Wege führen von A nach D über B und C?
21. Wie viele drei-(vier)stellige Zahlen gibt es mit verschiedenen Ziffern, wenn
    a) die Null nicht auftritt, **b)** auch die Null verwendet wird?
22. Wie viele verschiedene 5stellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 0, 1, 2, 3, 4 bilden, wenn
    a) in jeder Zahl alle Ziffern verschieden sein sollen,
    b) die Bedingung **a)** nicht erfüllt sein muß?
23. Gib alle Anagramme an, die durch Permutation der Buchstaben entstehen:
    a) ABC **b)** ROMA*
24. Gib alle möglichen Anagramme der folgenden Wörter an:
    a) AAS **b)** OTTO **c)** POPOP
25. Bilde alle Paare ohne (mit) Wiederholung aus **a)** ABC, **b)** ROMA.
26. *John Wallis* (1616–1703) bearbeitet in *A discourse of combinations, alternations, and aliquot parts*, einem Anhang seines *Treatise of Algebra***, zwei Aufgaben des *Gerhardus Johannes Vossius* (1557–1649) aus dessen *de Scientiis Mathematicis* von 1650:
    a) Ein Wirt verspricht 7 Gästen, sie so viele Tage freizuhalten, wie sie in veränderter Ordnung Platz nehmen können. *Vossius* behauptet, der Wirt sei seiner Verpflichtung nach 14 Jahren ledig. Wie lautet die von *Wallis* korrekt angegebene Lösung?***
    b) Die 24 Buchstaben des Alphabets [U = V, I = J] sollen permutiert werden. Wenn jemand pro Minute 5 solcher Permutationen hinschreiben könnte und mit dem Permutieren mit der Erschaffung der Welt begonnen hätte, so wäre das Unterfangen jetzt noch nicht beendet. *Wallis* fügt hinzu, daß das sogar noch gilt, wenn man jede Minute, die seit der Erschaffung der Welt verflossen ist, zu 10 Millionen Jahren rechnen würde.
        α) *Wallis* rechnet das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen und nimmt für das Alter der Welt die damals üblichen 6000 Jahre. Beurteile die beiden Lösungen!
        β) Zu welchem Ergebnis kommt man in beiden Fällen, wenn man für das Alter des Universums, wie heute üblich, 21 Milliarden Jahre annimmt?
27. Berechne:
    a) $\binom{14}{2}$ **b)** $\binom{23}{4}$ **c)** $\binom{19}{16}$ **d)** $\binom{47}{6}$ **e)** $\binom{50}{35}$ **f)** $\binom{100}{10}$.
28. In einer Klasse wird ein Mathematik-Hausheft und ein Mathematik-Schulheft geführt. Heftumschläge gibt es in 7 verschiedenen Farben. Leider hat der Lehrer vergessen zu sagen, welche Farben für die Umschläge verwendet werden sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
    a) Haus- und Schulheft immer verschiedenfarbig eingebunden sein sollen,
    b) diese Einschränkung nicht gilt?

* *John Wallis* (1616–1703) behauptet 1685 in seinem Anhang zum *Treatise of Algebra*, 7 dieser Anagramme ergeben sinnvolle lateinische Wörter. Welche sind es?

** Siehe Fußnote * auf Seite 91.

*** Vermutlich geht die Aufgabe auf *Luca Pacioli* (um 1445–1517) zurück, der in seiner *Summa* (fol. 43v) folgende Aufgabe vorrechnet: Jemand lädt 10 Personen ein und will ihnen so viele verschiedene Gerichte vorsetzen, wie diese Personen in verschiedener Anordnung nebeneinandersitzen können. Wie viele Gerichte sind es? *Pacioli* zeigt dann noch die Lösung für 11 Personen und sagt, daß man das Verfahren fortsetzen könne.

29. Ein vorbildlicher Leistungskursschüler führt in Mathematik 6 Hefte, und zwar je ein Schul- und Hausheft für Stochastik, Analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung. Er hat für die Heftumschläge 7 Farben zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
a) alle Hefte verschiedenfarbig eingebunden sein sollen,
b) keine Einschränkung gilt,
c) Schul- und Hausheft des gleichen Fachbereichs die gleiche Farbe tragen sollen, die Fachbereiche aber durch Farben unterschieden werden?

30. Auf wie viele Arten kann man 2 Buchstaben aus »COMPUTER« auswählen, wenn
a) keine Einschränkung besteht,
b) beide Buchstaben Konsonanten sein müssen,
c) beide Buchstaben Vokale sein müssen,
d) ein Buchstabe ein Vokal und der andere ein Konsonant sein muß?

31. Löse Aufgabe **30** für »MISSISSIPPI«, wenn man die Buchstaben I bzw. S bzw. P
a) nicht unterscheidet, **b)** unterscheidet.

32. Ein König beschließt in seinem Reich eine Gebietsreform. Dabei soll jede neu zu bildende Provinz eine Fahne erhalten. Zur Verfügung stehen die heraldischen Farben Rot, Blau, Schwarz, Grün, Gold, Silber und Purpur.
a) In wie viele Provinzen kann das Land höchstens eingeteilt werden, wenn die Fahne eine Trikolore sein soll und
1) keine weitere Bedingung gestellt wird,
2) der oberste Streifen der Trikolore golden sein muß,
3) einer der 3 Streifen der Trikolore golden sein muß?
b) Wie viele neue Provinzen können gebildet werden, wenn die Fahne zwar aus 3 Streifen bestehen, der untere und der obere Streifen aber gleichfarbig sein sollen?

33. 6 Jungen und 4 Mädchen sollen in 2 Mannschaften zu 5 Spielern aufgeteilt werden. Auf wie viele Arten geht das, wenn in jeder Mannschaft mindestens ein Mädchen mitspielen soll?

34. Eine Reisegruppe von 12 Personen verteilt sich auf 2 Abteile eines Eisenbahnwagens. In jedem Abteil gibt es 3 Sitzplätze in Fahrtrichtung und 3 entgegen der Fahrtrichtung. Von den 12 Personen wollen auf alle Fälle 5 in Fahrtrichtung und 4 gegen die Fahrtrichtung sitzen. Wie viele Plazierungsmöglichkeiten gibt es, wenn man die Sitze unterscheidet?

35. Bei einem Lochstreifen besteht eine Codegruppe aus 5 (8) Stellen, die gelocht werden können. Wie viele Zeichen lassen sich so codieren?

36. Bei einem Binärcode arbeitet man mit 2 Zeichen. Es sollen die 26 Buchstaben des Alphabets, die 10 Ziffern und 27 Sonderzeichen (z.B. », +, [, ?, ...) codiert werden (IBM-Lochkartencode). Wie groß muß k mindestens gewählt werden, damit alle Zeichen des oben angegebenen Zeichenvorrats durch gleich lange Binärwörter (k-Tupel aus einer 2-Menge) codiert werden können?

37. Auf Anregung *Leonhard Eulers* (1707–1783) veröffentlichte 1756 der Komponist *Johann Philipp Kirnberger* (1721–1783) eine Anleitung, wie man mit 2 Würfeln Menuette komponieren könne, wenn man für jeden der 16 Takte 11 musikalische Figuren zur Verfügung stellt. *Joseph Haydn* (1732–1809) und *Wolfgang Amadeus Mozart* (1756 bis 1791) ahmten dies nach. Wie viele Menuette lassen sich komponieren?

38. a) In München-Stadt waren 1981 folgende Kombinationen als Autokennzeichen zulässig*: Nach dem Ortskennzeichen M folgen 2 Buchstaben und dann eine der ganzen Zahlen aus $[100; 4999]$. Bei der Buchstabenkombination sind verboten B, F, G, I, O, Q. Nicht verwendet werden HJ, KP, KZ, NS, SA, SS, WC. CD und CC dürfen nur Haltern aus dem diplomatischen bzw. konsularischen Dienst zugeteilt werden.

* Die Ausgabe von Nummernschildern begann weltweit 1899 in München mit einer schwarzen Eins auf gelbem Grund (Farben der Stadt München) $10{,}3 \times 7{,}3$ cm.

α) Wie viele Kennzeichen können damit an normale Staatsbürger ausgegeben werden?

β) Wie viele Kennzeichen sind möglich, wenn der Zahlenvorrat $[100; 9999]$ ausgeschöpft wird?

b) Für den Landkreis München galt: Nach dem M steht entweder 1 Buchstabe und eine 3- oder 4stellige Zahl oder 2 Buchstaben und eine ganze Zahl aus $[1; 99]$. Nicht zulässig sind die in **a)** aufgeführten Ausnahmen. Löse **α)** für den Landkreis.

c) Warum sind die obigen Kombinationen nicht gestattet?

39. Beweise das **Symmetriegesetz:**

$$\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.}$$

40. Beweise die **Additionsformel:**

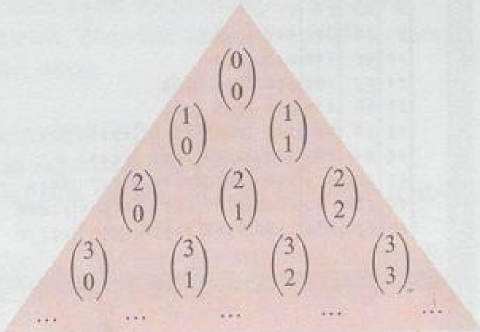
$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.}$$

41. Zeige: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Hinweis: Überlege, wie oft der Summand $a^k b^{n-k}$ bei der Multiplikation entsteht.

42. Beweise:

a)* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ **c)** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

43. Die Binomialkoeffizienten lassen sich auf einfache Weise in einem Dreieck anordnen. Es heißt ***Pascal-Stifel*sches Dreieck** oder auch **Arithmetisches Dreieck****. Unter Verwendung der Formel aus Aufgabe **40** lassen sich die Binomialkoeffizienten der $(n+1)$-ten Zeile aus denen der n-ten Zeile berechnen. Berechne das *Pascal-Stifel*sche Dreieck bis zur 7. Zeile.



44. Von n Elementen seien jeweils n_i ununterscheidbar, d.h., $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$.

a) Zeige: Die Anzahl aller unterscheidbaren Permutationen ist $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

b) Wende die 1635 von *Marin Mersenne* (1588–1648) gefundene Formel auf Aufgabe 113/**24** an und berechne die entsprechenden Anzahlen.

* *Michael Stifel* (1487?–1567) zitiert diese Formel 1544 in *Arithmetica integra* (folium 101r) als *Eine gewisse Regel des Hieronymus Cardanus. Geronimo Cardano* (1501–1576) bringt sie als 170. Satz seines *Opus novum de proportionibus* erst 1570, bemerkt aber: »*Ich habe sie schon anderwärts gelehrt;* [...] *kann aber die Stelle nicht finden.*«

** Die oben angegebene Anordnung stimmt weder mit der von *Michael Stifel* in seiner *Arithmetica integra* (1544) noch mit der *Pascals* in dessen *Traité du triangle arithmétique* (1654) überein. Die früheste erhaltene Darstellung dieser Anordnung findet sich in *Yang Huis Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher* aus dem Jahre 1261, die aber auf *Qia Xsian* [sprich: Tschia Hsien] (um 1100) zurückgeht. Dieselbe Anordnung der Binomialkoeffizienten ist im *Kostbaren Spiegel der vier Elemente* des *Zhu Shi-Jie* [sprich: Tschuh-dschieh] aus dem Jahre 1303 enthalten. Die erste gedruckte Darstellung in Europa schmückt das Titelblatt des *Neuen Rechenbuchs* von 1527 des *Peter Apian* (1495–1552). *Niccolò Tartaglia* (1499–1557) bringt ebenfalls diese Darstellung in seinem *General Trattato di numeri et misure* (1556). – Bekannt war das Arithmetische Dreieck bereits den Arabern des 11. Jh.s und den Indern des 2. vorchristlichen Jh.s – Vgl. Bild 116.1 und die Abbildung auf Seite 228.

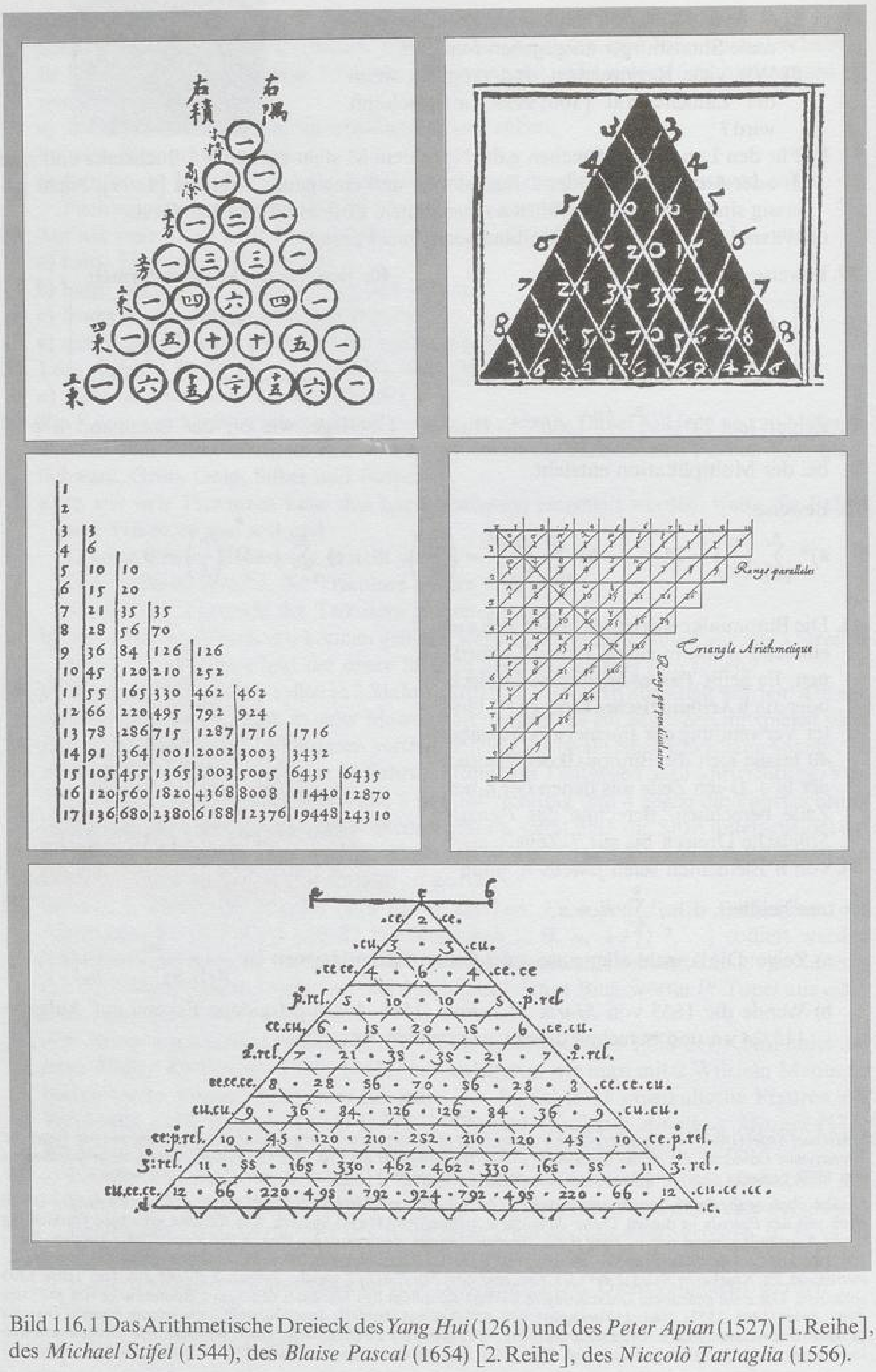


Bild 116.1 Das Arithmetische Dreieck des *Yang Hui* (1261) und des *Peter Apian* (1527) [1. Reihe], des *Michael Stifel* (1544), des *Blaise Pascal* (1654) [2. Reihe], des *Niccolò Tartaglia* (1556).

45. Wie viele Wörterbücher (der Art: Sprache A $\rightarrow$ Sprache B) benötigt ein Übersetzungsinstitut für die direkte Übersetzung aus jeder von 6 Sprachen in jede dieser 6 Sprachen? Wie viele zusätzliche Wörterbücher müssen angeschafft werden, wenn 3 weitere Sprachen dazukommen?

46. Ein Ausschuß von 10 Parlamentariern soll aus 2 Parteien zusammengesetzt werden. Die FSU hat 8 Fachleute, die CSP hat 6 Fachleute anzubieten. Auf Grund der Mehrheitsverhältnisse kann die FSU 7 und die CSP 3 Sitze im Ausschuß beanspruchen. Wie viele verschiedene Zusammensetzungen des Ausschusses sind möglich, wenn
a) keine weitere Bedingung gemacht wird,
b) ein bestimmtes Mitglied der CSP auf alle Fälle im Ausschuß sitzen soll,
c) 2 bestimmte Kandidaten der CSP von der FSU grundsätzlich abgelehnt werden?

47. Aus einer Gruppe von 4 Frauen und 4 Männern wollen 4 Personen Tennis spielen.
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
1) keinerlei Einschränkungen bestehen, **2)** keine Frau mitspielen soll,
3) genau eine Frau mitspielen soll, **4)** genau 2 Frauen mitspielen sollen,
5) genau 3 Frauen mitspielen sollen, **6)** alle 4 Frauen mitspielen sollen?
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Ergebnis von **1)** und den Ergebnissen von **2)–6)**?

•**48.** Ein Bridgespiel besteht aus 52 Karten, von denen vier Asse sind. Man entnimmt 13 Karten. In wieviel Fällen enthalten diese 13 Karten
a) kein As, **b)** genau ein As, **c)** mindestens ein As,
d) höchstens ein As, **e)** genau 2 Asse, **f)** alle 4 Asse?

•**49.** An einem runden Tisch nehmen 6 bzw. 7 Personen Platz. Anordnungen, bei denen jeder die gleichen Nachbarn hat, betrachten wir als gleich. Wie viele verschiedene Plazierungen der Personen gibt es in jedem der beiden Fälle, wenn
a) keine weitere Bedingung gestellt wird,
b) 2 bestimmte Personen auf alle Fälle nebeneinandersitzen wollen,
c) 3 bestimmte Personen auf alle Fälle beliebig nebeneinandersitzen wollen,
d) eine bestimmte Person auf alle Fälle jedesmal zwei bestimmte Personen als Nachbarn haben will?

•**50. a)** 5 gleiche Äpfel sollen auf 3 Kinder verteilt werden. Auf wie viele Arten ist das möglich?
b) k Kugeln sollen auf n Urnen verteilt werden. Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn man die Kugeln nicht unterscheidet?

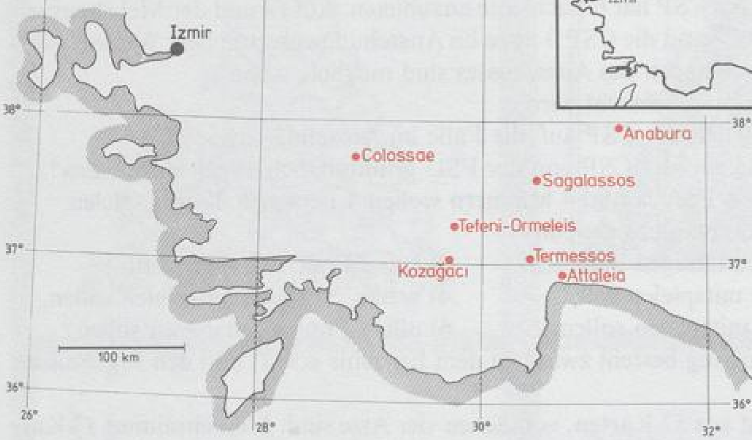
51. *Pausanias* (110–180) berichtet in seiner *Beschreibung Griechenlands* (VII, 25, 10) von einem Astragalorakel*:

»Geht man von Bura [in Achaia] zum Meer hinab, so ist da [...] ein nicht großer Herakles in einer Höhle. [...] Man kann dort mit einer Tafel und Astragali Orakelsprüche erhalten. Wer den Gott befragen will, betet vor der Statue und nimmt dann 4 von den reichlich vor dem Herakles liegenden Astragali und läßt sie auf einen Tisch fallen. Zu jeder Konfiguration dieser 4 Astragali ist auf einer Tafel ein passender Wortlaut als Erklärung angegeben.«

a) Wie viele Orakelsprüche mußten von den Priestern erstellt werden, wenn zu jedem Ergebnis eine andere Prophezeiung gehörte?
b) Aus dem 2. Jh. n. Chr. sind Orakel für 5 Astragali erhalten, die bis auf das in Bulgarien gefundene alle aus der heutigen südlichen Türkei stammen (siehe Figur 118.1). Als Beispiel seien die Sprüche 50 und 52 der dort üblichen Orakelliste wiedergegeben:

* Der Unsinn dieser Astragalorakel – vergleichbar mit den Horoskopen unserer Regenbogenpresse – erlebte im 2. Jh. n. Chr. in den alten Orakelheiligtümern, die teilweise aus dem 6. Jh. v. Chr. stammten, eine Renaissance und verbreitete sich über das südliche Kleinasien. Von den alten hölzernen Weissagetafeln, die pinax oder grammateia hießen, blieb nichts erhalten. Glücklicherweise wurden die neueren in Stein gehauen.

Fig. 118.1 Fundstätten von Astragalorakeln in Kleinasien. Anscheinend gab es im 2. Jh. n. Chr. in jeder Stadt des südlichen Kleinasiens ein Astragalorakel. An 16 Plätzen konnte man es bis jetzt nachweisen.



44466 24 Kronos, der Kinderfresser
Drei Vierer, zwei Sechser. Das ist der Rat der Gottheit:
Bleib zu Haus und geh nicht irgendwohin,
Damit nicht die reißende Bestie und die rächende Furie über Dich kommen;
Denn ich sehe, daß das Vorhaben weder gefahrlos noch sicher ist.

66661 25 Der lichtspendende Mondgott
Vier Sechser, und der fünfte Wurf eine Eins. Das bedeutet:
Wie Wölfe über Lämmer herfallen und mächtige Löwen
Gehörnte Ochsen bezwingen, so wirst Du alles überwinden.
Mit Hilfe des Hermes, des Zeussohnes, werden Deine Wünsche erfüllt.

Wie viele Prophezeiungen enthielt diese Orakelliste?

c) Astragalorakel gab es nicht nur in Heiligtümern sondern auch auf öffentlichen Plätzen. Hier mußte jeder seine eigenen Astragali verwenden. In Termessos (Pisidien) schmückte eine Orakelliste für 7 Astragali die Mauer des Stadttores. Wie viele Prophezeiungen enthielt sie?

d) Die unter **b)** angeführten Sprüche könnten uns auf die falsche Idee bringen, daß es auf die Reihenfolge der Wurfergebnisse angekommen sei. Wie viele Prophezeiungen hätte man dann im Fall von 4, 5 bzw. 7 Astragali erstellen müssen?

•**e)** Neben der Astragalomanteia ist auch die Kybomanteia mittels 6seitiger Würfel bezeugt. Wie viele Orakelsprüche hat man bei 4, 5 bzw. 7 Würfeln benötigt? Wie viele wären es bei Berücksichtigung der Reihenfolge?*

52. Für Christen war das Würfelspiel eine Erfindung des Teufels. Bischof *Wibold* von Cambrai (971–972) stellte es jedoch in den Dienst der Kirche: Jeder Kombination, die man mit 3 Würfeln erzielen kann, ordnet er eine christliche Tugend zu. Der Sieger soll den Verlierer bis zum 6. Tag ermahnen, die nicht erwürfelten Tugenden durch gutes Verhalten zu erwerben. Wie viele Tugenden gab es für Bischof *Wibold*?

* *Niccolò Tartaglia* (1499–1557) gibt 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* (II, fol. 17^r) ein Verfahren an, wie man, ausgehend von einem Würfel, alle möglichen Kombinationen für beliebig viele Würfel finden kann. Er behauptet, dies in der Nacht vom Faschingsdienstag auf den Aschermittwoch des Jahres 1523 gefunden zu haben. Die Ergebnisse bei 4, 5 und 6 Würfeln erarbeitete 1559 auch *Jean Buteo* (1492–1572) in seiner *Logistica* (ed. 1560).

Zu 8.3.

53. **a)** Zwei Karten eines Bridgespiels werden gleichzeitig gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Beide Karten sind Herzkarten«
$B :=$ »Beide Karten sind Damen«
$C :=$ »Herzdame, Herzkönig«

b) Ein Spieler erhält 13 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie alle von derselben Farbe sind?

c) Aus dem *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (1657) von *Christiaan Huygens**:

»*Problem III*: A wettet mit B, daß er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von derselben Farbe sind, vier Karten verschiedener Farbe herausziehen wird.«

Wie müssen sich die Einsätze verhalten, damit die Wette fair ist?

54. Eine Laplace-Münze wird 10mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim k-ten Wurf zum ersten Mal Wappen erscheint,
a) für $k = 1, 2, \ldots, 10$, **b)** allgemein.

55. Ein Prüfer gibt eine Liste von 8 Fragen heraus. Bei der Prüfung wird er dem jeweiligen Kandidaten 2 davon vorlegen. Dieser muß eine davon bearbeiten.

a) Meier bereitet sich auf eine der 8 Fragen vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er seine Frage gestellt bekommt?

b) Huber bereitet sich auf 6 der 8 Fragen vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens eine vorbereitete Frage vorgelegt bekommt?

c) Wie viele Fragen muß Schmid wenigstens vorbereiten, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer als 50% ist, auf mindestens eine vorbereitete Frage stößt?

56. In einer Reisegesellschaft von 5 Personen sind 2 Schmuggler, darunter Herr Meier. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zollbeamter, der auf gut Glück 3 Personen kontrolliert,
a) mindestens einen Schmuggler, **b)** Herrn Meier, **c)** beide Schmuggler ertappt?

57. In einer Familie sind 2 Söhne und 3 Töchter. Jeden Tag wird ausgelost, wer abspülen muß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

a) es den ältesten Sohn an zwei aufeinanderfolgenden Tagen trifft,

b) es irgendein Kind an zwei aufeinanderfolgenden Tagen trifft,

c) an zwei aufeinanderfolgenden Tagen Söhne abspülen müssen?

58. Drei L-Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
$A :=$ »Keine Sechs« $B :=$ »Genau 1 Sechs«
$C :=$ »Genau zweimal sechs« $D :=$ »Alle drei Würfel zeigen sechs«

59. Aus sechs Ehepaaren werden zwei Personen ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um
a) zwei Damen, **b)** zwei Herren,
c) eine Dame und einen Herrn, **d)** ein Ehepaar?

60. Drei Mädchen und drei Jungen setzen sich auf gut Glück nebeneinander auf eine Bank. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

a) die drei Mädchen nebeneinandersitzen,

b) links außen ein Mädchen sitzt,

c) eine bunte Reihe entsteht.

* *Pierre de Fermat* (1601–1665) stellte *Christiaan Huygens* (1629–1695) diese Aufgabe über seinen Mittelsmann *Pierre de Carcavy* (um 1600–1684) im Brief vom Juni 1656. *Huygens* schickte die Lösung an *Carcavy* am 6.7.1656. Siehe hierzu auch die Fußnote auf Seite 112.

61. Neben der alten Genueser Zahlenlotterie »5 aus 90« gibt es aber auch noch andere Zahlenlotterien:

Land	Lottotyp	Land	Lottotyp
Bundesrepublik	6 aus 49, 6 aus 45	Kanada	6 aus 49, 6 aus 36,
	7 aus 38 (s. S. 39)		4 aus 10
DDR (s. S. 39)	6 aus 49, 5 aus 90,	Österreich	6 aus 45
	5 aus 45, 5 aus 35	Polen	6 aus 49, 5 aus 35
Finnland	6 aus 60	Rumänien	6 aus 45, 5 aus 45
Italien	5 aus 90	Schweiz, Belgien	6 aus 40
Jugoslawien	5 aus 36	Tschechoslowakei	6 aus 49, 5 aus 35
Niederlande	6 aus 41	UdSSR, Frankreich	6 aus 49
		Ungarn	5 aus 90

a) Berechne für jeden Lottotyp die Wahrscheinlichkeit für einen Haupttreffer. In welchem Verhältnis stehen diese Wahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit für einen Haupttreffer bei »6 aus 49«?

b) Berechne für jeden Lottotyp die Wahrscheinlichkeit für »Genau 4 Richtige«. In welchem Verhältnis stehen diese Wahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis bei »6 aus 49«?

c) Löse Aufgabe **b)** für das Ereignis »Genau 2 Richtige weniger als die maximal möglichen Richtigen«.

62. Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnklasse II »5 Richtige mit Zusatzzahl« und die Gewinnklasse III »5 Richtige« beim Lotto »6 aus 49«.

63. Beim Poker* erhält jeder Spieler eine »Hand« von 5 Karten aus den 52 französischen Karten des Bridgespiels. Fünf gleichfarbige Karten in ununterbrochener Reihenfolge bilden eine »Farbfolge« (= straight flush). Dabei darf das *As* nur am Anfang einer Farbfolge als *Eins* oder nur am Ende nach dem *König* stehen. Vier gleichwertige Karten bilden einen »Viererpasch« (= four of a kind).

a) Wie viele Viererpasche und wie viele Farbfolgen gibt es?

b) Warum gilt trotz des Ergebnisses in **a)** beim Poker eine Farbfolge mehr als ein Viererpasch? Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein Spieler eine Farbfolge bzw. einen Viererpasch als »Hand« erhält, und begründe damit die Regel.

64. **a)** Berechne in der Situation von Beispiel 4 (Seite 100) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der erste schwarze König an k-ter Stelle erscheint.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der zweite schwarze König an i-ter Stelle erscheint?

65. Das Problem von *de Méré*. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

a) bei 4 Würfen mindestens eine 6 auftritt,

b) bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs auftritt.

Gib dazu jeweils einen geeigneten Ergebnisraum an.

66. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Skatspiel (32 Karten) 2 Buben im Skat (= 2 weggelegte Karten) liegen**.

* Poker ist ein internationales Kartenglücksspiel amerikanischer Herkunft, das in der Öffentlichkeit verboten ist. 4–8 Personen können am Spiel teilnehmen. Die nicht verteilten Karten werden verdeckt als Talon aufgelegt.

** Das Skatspiel entstand ab 1815 in der Kartendruckerstadt Altenburg (Thüringen) aus dem Tarockspiel, das seit dem letzten Viertel des 14. Jahrhunderts belegt ist. Sein Name hängt mit dem italienischen Wort scarto = Ausschuß, Weggelegtes zusammen. Das Skatspiel besteht aus 32 Blatt. Jeder der 3 Spieler erhält 10 Karten, die restlichen 2 Karten werden weggelegt und bilden den Skat. Das Skatspiel kann mit französischen oder deutschen Karten gespielt werden. Dabei entsprechen den französischen Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo die deutschen Farben Eichel, Blatt (auch Grün), Herz (auch Rot) und Schelle. (In der Schweiz ist das Blatt durch eine Rose und das Herz durch ein Wappen ersetzt.) Höchste Trümpfe sind die Buben (im deutschen Spiel die Unter) in der angegebenen absteigenden Farbenreihenfolge. Die Dame wird im deutschen Spiel durch den Ober ersetzt.

•67. Ein Skatspieler hat nach Aufnahme des Skats 8 von 11 Trümpfen in der Hand. Der dritthöchste Trumpf jedoch fehlt ihm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einer der beiden Gegenspieler alle 3 restlichen Trümpfe in der Hand hat und daher die Möglichkeit hat, einen Trumpfstich zu machen?

•68. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei 10 (20; n) Würfen mit einem L-Würfel mindestens eine 1 und mindestens eine 6 auftritt.

69. Wie wahrscheinlich ist es, daß die Geburtstage von 12 Personen in 12 verschiedenen Monaten liegen? (Man nehme gleiche Wahrscheinlichkeit für jeden Monat an!)

70. 5 Mädchen und 5 Jungen setzen sich auf gut Glück um einen runden Tisch. Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine bunte Reihe.

•71. Herr Huber parkt täglich vor seinem Haus im Parkverbot. Er hat deswegen schon 9 Strafmandate erhalten. Er stellt fest, daß keines davon an einem Montag, Dienstag, Mittwoch oder Samstag ausgefertigt wurde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine solche Feststellung getroffen werden kann, wenn man annimmt, daß die Wahrscheinlichkeit für die Ausfertigung eines Strafmandats für jeden Tag der Woche gleich groß ist?

72. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim
   a) Toto (unter der Voraussetzung von Beispiel 3, Seite 99)
   b) Lotto (6 aus 49)
   keinen einzigen Treffer zu haben?

•73. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter n Personen mindestens eine ist, die mit mir am gleichen Tag Geburtstag hat?
Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten?

74. Ein Laplace-Floh springt auf der Zahlengeraden in Einheitssprüngen mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links und rechts. Er beginnt bei 0. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er nach 6 Sprüngen bei **a)** 6 **b)** -2 **c)** 0 **d)** 5?

75. In einer Schublade befinden sich 4 schwarze, 6 braune und 2 graue Socken. 2 (4) Socken werden im Dunkeln herausgenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man 2 gleichfarbige Socken?

76. **a)** Frau Meier hat 10 verschiedene Handschuhpaare in einer Schublade. Sie will ausgehen und nimmt 2 (4) Handschuhe auf gut Glück heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie
   1) kein passendes Paar herausgreift,
   2) mindestens ein passendes Paar herausgreift?
   b) Löse **a)** allgemein für den Fall, daß Frau Meier aus n verschiedenen Handschuhpaaren $2m$ Handschuhe herausgreift.

77. Ist es günstig, darauf zu wetten, daß beim n-maligen Werfen eines Laplace-Würfels lauter verschiedene Augenzahlen erscheinen? ($n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$)

78. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei 10maligem Wurf mit einem Laplace-Würfel jede Augenzahl mindestens einmal auftritt.

79. 10 Sportler treten zu einer Veranstaltung an. Die Startnummern 1 bis 10 werden durch Los vergeben.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens einer der Sportler den Platz in der Siegerliste erreicht, den seine Startnummer angibt?
   b) Wie viele Sportler müssen antreten, damit es günstig ist, darauf zu wetten, daß mindestens einer den Rang erreicht, den seine Startnummer angibt?

80. **a)** Berechne beim *Bernoulli-Euler*schen Problem der vertauschten Briefe die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau k Briefe im richtigen Umschlag stecken.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den 10 Sportlern der Aufgabe **79**
1) genau die Hälfte, **2)** mehr als die Hälfte
den Platz in der Siegerliste erreichen, den ihre Startnummer angibt?

•81. 1980 hatten sich 8 Mannschaften für das Viertelfinale des UEFA-Pokals* qualifiziert; 5 davon waren deutsche. Bei der Auslosung ergab sich der für die deutschen Mannschaften günstigste Fall, daß nur eine einzige Paarung zustande kam, bei der ein deutscher Verein gegen einen deutschen Verein spielen mußte.

a) Welche Wahrscheinlichkeit hat dieses Ereignis?

•b) Verallgemeinerung des Problems: 2^n Mannschaften stehen im 2^{n-1}tel-Finale; darunter befinden sich k $(0 < k \leqq 2^n)$ deutsche Mannschaften. Der für Deutschland günstigste Fall ist derjenige, bei dem möglichst selten deutsche Mannschaften gegeneinander antreten müssen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür.

82. n verschiedene Teilchen werden willkürlich auf z Zellen verteilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Anordnung, bei der in der i-ten Zelle n_i Teilchen sind $(i = 1, \ldots, z)$? (*Maxwell-Boltzmann*-Statistik)

b) Berechne diese Wahrscheinlichkeit bei 5 Zellen und 4 Teilchen für alle wesentlich verschiedenen Anordnungen. Wie viele Anordnungen gibt es zu jedem Typ?

c) Löse **b)** für 4 Zellen und 5 Teilchen.

d) Stelle für $n = 2$ und $z = 3$ die Verhältnisse auch graphisch dar.

83. n ununterscheidbare Teilchen werden willkürlich auf z Zellen verteilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anordnung, wenn jede unterscheidbare Anordnung gleiche Wahrscheinlichkeit hat? (*Bose-Einstein*-Statistik, 1924)

b) Löse **82. b)** in diesem Fall. **c)** Löse **82. c)** in diesem Fall. **d)** Löse **82. d)**

84. n ununterscheidbare Teilchen sollen auf z Zellen verteilt werden $(n \leqq z)$, wobei sich in einer Zelle höchstens ein Teilchen befinden darf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anordnung, wenn jede unterscheidbare Anordnung gleiche Wahrscheinlichkeit hat? (*Fermi-Dirac*-Statistik, 1926)

b) Löse **82. b)**, **82. c)** und **82. d)** für diesen Fall.

Zu 8.4.

85. Eine Urne enthält 11 weiße und 15 schwarze Kugeln. Wie wahrscheinlich ist es, daß sich unter 10 willkürlich herausgegriffenen Kugeln genau 5 weiße befinden?

86. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmter Spieler beim Skatspiel
a) genau 3 Buben,
b) 3 bestimmte Buben und den vierten nicht,
c) mindestens 3 Buben erhält?

87. Ein Prüfer testet 100 Geräte, unter denen sich 10 defekte befinden. Er wählt willkürlich 10 aus und akzeptiert die Lieferung nur dann, wenn die Probe kein defektes Gerät enthält. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Lieferung angenommen?

88. Eine Firma stellt fest, daß bei einer bestimmten Lieferung von Dosen eines Fertiggerichts versehentlich Giftstoffe in die Dosen gelangten. Sie sperrt sofort den Verkauf dieser Dosen. Ein Kaufmann hat von n Dosen, unter denen sich k aus der betreffenden Lieferung befinden, m Dosen $(m \leqq n - k)$ verkauft.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß keine der vergifteten Dosen verkauft wurde
1) allgemein, **2)** für $n = 20$; $m = 10$; $k = 6$.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Fall **a)2)**
1) mindestens 1 vergiftete Dose, **2)** genau 1 vergiftete Dose,
3) weniger als 4 vergiftete Dosen, **4)** alle 6 vergifteten Dosen verkauft wurden?

* Union Européenne de Football Association, 1954 gegründete internationale Vereinigung der Fußballverbände.

89. $2n$ ($4n$) Spieler werden bei einem Turnier in 2 (4) Gruppen zu je n Spielern eingeteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden stärksten Spieler in derselben Gruppe spielen müssen? Berechne diese Wahrscheinlichkeit für $n = 4$ und $n = 8$.

90. In einer Urne befinden sich 11 weiße und 15 schwarze Kugeln. Man darf 11mal je 1 Kugel mit bzw. ohne Zurücklegen ziehen. Welches Ziehungsverfahren ist günstiger, falls man einen Preis erhält, wenn sich unter den gezogenen Kugeln
a) genau 5 weiße Kugeln, **b)** genau 6 schwarze Kugeln, **c)** keine weiße Kugel,
d) mindestens 3 weiße Kugeln, **e)** höchstens 3 weiße Kugeln befinden?

91. Eine Familie hat 5 Kinder. Die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen sei 0,5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) es 2 Mädchen und 3 Jungen sind, **b)** es 5 Mädchen sind,
c) das mittlere Kind ein Junge ist?
d) Welche Werte erhält man, wenn man für eine Knabengeburt die realistische Wahrscheinlichkeit 0,514 verwendet?

92. Beim Würfelspiel »Einsame Filzlaus« gewinnt derjenige, der zuerst eine 1 (= »einsame Filzlaus«) würfelt. Wer nach 10 Würfen noch keine 1 hat, muß eine Strafe zahlen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel Strafe zahlen zu müssen?
b) Wie wahrscheinlich ist es, bei den ersten 3 Würfen mindestens eine 1 zu werfen?
c) Ab welcher Wurfzahl ist es günstig, darauf zu wetten, daß mindestens einmal eine 1 erscheint?

93. Eine Firma stellt Bolzen mit 20% Ausschuß her. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 20 (200) herausgegriffenen Bolzen sich
a) kein Ausschußstück befindet, **b)** genau 4 (40) Ausschußstücke befinden?

94. Zu Olims Zeiten* wurde einem Gefangenen die Chance gegeben freizukommen. Er hatte zwei Möglichkeiten:
a) Er greift aus einer Urne, die 4 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, eine Kugel heraus. Ist sie weiß, so kommt er frei.
b) Vor ihm stehen 2 Urnen. Die erste enthält gleich viel schwarze und weiße Kugeln. Die zweite ist die Urne aus **a)**. Er zieht aus beiden Urnen je eine Kugel und kommt frei, wenn die Farben gleich sind.
Welcher Fall ist für ihn günstiger?

95. Die Polizei führt in einer Spielhölle eine Razzia durch. Sie testet die verwendeten Würfel nach folgendem Schema: Jeder Würfel wird 12mal geworfen; er wird für gut befunden, wenn 1-, 2- oder 3mal die 6 erscheint. Die Polizei stellt fest, daß 24% der Würfel nach diesem Verfahren als schlecht anzusehen sind. Kann der Vorwurf des Betrugs aufrechterhalten werden?

96. Bei einem bestimmten Verfahren, Transistoren herzustellen, ergibt sich erfahrungsgemäß ein Ausschußanteil von 50%. Ein neues Verfahren soll angeblich besser sein. Eine erste Probe zeigt, daß von 10 nach dem neuen Verfahren hergestellten Transistoren 3 defekt waren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß 3 oder weniger defekt sind, wenn das erste Verfahren angewendet wird? Das zweite Verfahren wird für besser gehalten, wenn diese Wahrscheinlichkeit unter 10% liegt. Kann man das zweite Verfahren demnach schon als besser bezeichnen?

97. Eine Urne enthält 5 grüne und 4 rote Kugeln. Man zieht 4 Kugeln
a) ohne Zurücklegen, **b)** mit Zurücklegen
und erhält dabei die Farbfolge: ggrg. Wie wahrscheinlich ist diese Farbfolge in jedem der beiden Fälle?

* Scherzhafte Redeweise für »vor undenklichen Zeiten«, entstanden aus *olim* (lat.) = *einst*.

98. Eine Urne enthält 8 blaue und 2 gelbe Kugeln. Man löse die folgenden Aufgaben sowohl für Ziehen ohne Zurücklegen wie auch für Ziehen mit Zurücklegen.

a) A, B und C ziehen in dieser Reihenfolge je eine Kugel aus der Urne. Wer eine gelbe Kugel zieht, erhält einen Preis. Wie groß sind die Chancen von A, B und C, einen Preis zu erhalten?

b) Wie groß sind die Gewinnchancen von A, B und C, wenn das Spiel nach dem 1. Ziehen einer gelben Kugel, spätestens nach dem Zug von C zu Ende ist?

c) Wie groß sind die Gewinnchancen für A, B und C, wenn in dieser Reihenfolge so lange gezogen wird, bis ein Spieler die erste gelbe Kugel zieht?

99. *Christiaan Huygens* (1629–1695) stellte am Ende seines *Tractatus de ratiociniis in ludo aleae* (1657) seinen Lesern 5 Probleme, deren zweites lautet:

»Drei Spieler A, B und C nehmen 12 Steine, von denen 4 weiß und 8 schwarz sind, und spielen unter der Bedingung, daß derjenige Sieger sei, der als erster mit verbundenen Augen einen weißen Stein ergreift; dabei solle zuerst A, dann B und schließlich C ziehen, dann wieder A und so fort. Gefragt wird, in welchem Verhältnis ihre Chancen zueinander stehen.«

Jan Hudde (1628–1704) schickte *Huygens* im Frühjahr 1665 seine Lösung. Daraufhin machte sich *Huygens* selbst an die Lösung der Aufgabe und kommt zu einem anderen Ergebnis. Überzeugt, richtig gerechnet zu haben, schickte er seine Werte am 4.4.1665 an *Hudde*. Gleich am nächsten Tag fand *Hudde* den Grund für die Diskrepanz: Die Aufgabe war nicht vollständig formuliert!

a) *Huygens* hatte bei seiner (im Manuskript erhaltenen) Lösung so gerechnet, als würde mit Zurücklegen gezogen. Welche Werte erhielt *Huygens*?

b) *Hudde* hatte die Aufgabe so verstanden, als würde ohne Zurücklegen gezogen. Zu welchen Werten gelangte er?

c) *Jakob Bernoulli* (1655–1705) fügt sowohl in seinem Tagebuch, den *Meditationes*, wie auch in seiner *Ars Conjectandi* diesen beiden Interpretationen eine dritte hinzu: Jeder der 3 Spieler nimmt sich zu Beginn 12 Steine und zieht dann jeweils von den seinigen in der angegebenen Reihenfolge, ohne die gezogenen Steine wieder in die Urne zurückzulegen.* Zu welchen Werten gelangte *Bernoulli*?

100. Für das Funktionieren eines Gerätes A ist die Funktionsfähigkeit des Bauteils B unbedingt nötig. Aus diesem Grund ist B n-fach vorhanden. Die Wahrscheinlichkeit für das Ausfallen von B innerhalb eines Tages sei p.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gerät A innerhalb eines Tages funktionsunfähig wird

1) für $n = 2$; $p = 0{,}5$, **2)** für $n = 3$; $p = \frac{1}{3}$, **3)** allgemein?

b) Wie groß muß n sein, wenn für $p = 0{,}5$ die Wahrscheinlichkeit für die Funktionsfähigkeit von A innerhalb eines Tages 95% betragen soll?

101. Eine Obstgroßhandlung erhält Äpfel in Steigen zu je 100 Stück. Ein Kontrolleur überprüft die Steigen durch Entnahme einer Stichprobe von 20 Äpfeln pro Steige. Eine bestimmte Steige enthalte genau 5 schlechte Äpfel.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich bei dieser Steige genau ein schlechter Apfel in der Stichprobe befindet?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ergäbe sich, wenn die Stichprobe mit Zurücklegen entnommen würde?

* Bei dieser Beschreibung der 3 möglichen Interpretationen des *Huygens*schen Problems taucht unseres Wissens zum ersten Mal in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Begriff **Urne** auf. In den *Meditationes* (geschrieben vor dem 26.8.1685) steht noch, daß die Steine in ihr Gefäß zurückzulegen seien – *electos calculos in loculum suum reponendos esse* –, in der *Ars Conjectandi* heißt es dann, daß sie wieder in die Urne zurückzulegen seien – *calculos electos* [...] *in urnam recondendos esse*.

c) Eine Steige, bei der in der Stichprobe mindestens 2 schlechte Äpfel gefunden werden, wird zurückgewiesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Steige mit genau 5 schlechten Äpfeln zurückgewiesen wird? Untersuche Fall **a)** und **b)**.

102. Unter den N Kugeln einer Urne seien S schwarze.

a) Es werde eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen, ihre Farbe notiert, aber nicht bekanntgegeben. Berechne nun die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 2. Zug eine schwarze Kugel zu ziehen.

b) Es werden der Reihe nach n ($n \leqq N$) Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim k-ten Zug ($k \leqq n$) eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn man über die Ergebnisse der anderen Züge nichts weiß?

103. Unter den N Kugeln einer Urne seien S schwarze.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine schwarze Kugel zu ziehen?

b) Es werde eine schwarze Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Berechne nun die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 2. Zug wieder eine schwarze Kugel zu ziehen. Wie groß ist der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten?

c) Berechne den Unterschied Δp der in **a)** und **b)** gefundenen Werte zunächst allgemein, dann für $\frac{S}{N} = 1\%; 5\%; 50\%; 95\%$ und $N = 100; 500; 1000$.

104. Um die Existenz medialer Begabungen zu beweisen, wird folgendes Experiment angestellt: Eine Laplace-Münze wird 10mal geworfen und die Ergebnisfolge nicht bekanntgegeben. 500 Versuchspersonen raten die geworfenen Ergebnisse unabhängig voneinander. Es wird vereinbart, daß mediale Begabung anzuerkennen sei, wenn wenigstens 9 Treffer erzielt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eine Versuchsperson als »medial« erkannt wird, obwohl keine der Versuchspersonen eine mediale Begabung hat?

Zu 8.5.

•105. Gib die Menge der Ergebnisse aus Ω_7 an (siehe Lösung 7 der Aufgabe auf Seite 110), die bei der in der Schlußbetrachtung dieser Aufgabe angesprochenen Vergröberung mit dem Element $\omega_i \in \Omega_i$ identifiziert werden.
$\omega_3 = 4$; $\omega_4 = \{1, 2\}$; $\omega_5 = 110000$; $\omega_6 = 4$.

106. Eine Laplace-Münze werde zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens einmal Wappen erscheint?
Lösung von *d'Alembert* (1717–1783)* im Artikel *Croix ou Pile* der *Encyclopédie* (Bd. 4, 1754): Der erste Wurf bringt sicher Wappen oder Zahl. Nur im Fall Zahl ist ein zweiter Wurf überhaupt nötig. Er bringt entweder Wappen oder Zahl. Von den drei Fällen sind zwei günstig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{2}{3}$. – Nimm kritisch dazu Stellung!

107. Drei Laplace-Münzen werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen alle drei Münzen die gleiche Seite?
Nimm kritisch Stellung zu folgender Lösung der Aufgabe: Zwei der drei Münzen zeigen sicher die gleiche Seite. Es kommt also nur darauf an, ob die dritte Münze auch diese Seite zeigt oder nicht. Es gibt also einen günstigen Fall von zwei möglichen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit 50%.

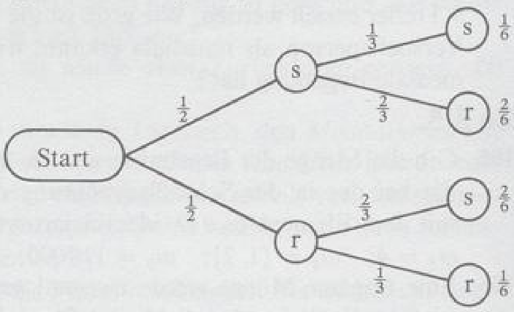

Bild 125.1 Ergebnisse beim 2fachen Münzenwurf

* Siehe Seite 394.

108. In einem Kasten liegen drei Karten, die folgendermaßen beschriftet sind:
- Die erste Karte trägt auf beiden Seiten eine Null.
- Die zweite Karte trägt auf beiden Seiten eine Eins.
- Die dritte Karte trägt auf einer Seite eine Null und auf der anderen eine Eins.

Eine Karte wird auf gut Glück gezogen und so auf den Tisch gelegt, daß man nicht sieht, was auf der Unterseite steht. Die Oberseite zeigt eine Eins. Theodor behauptet, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auch auf der Rückseite eine Eins stehe, sei 50%; denn es gebe für die Rückseite zwei Möglichkeiten, von denen eine günstig sei. Was meinst du dazu?

109. In einer Urne liegen zwei rote und zwei schwarze Kugeln. Zwei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p haben die beiden gezogenen Kugeln gleiche Farbe? Diskutiere die folgenden 7 Lösungsvorschläge:
Lösung 1: Es gibt zwei Fälle: Die Kugeln haben entweder gleiche oder verschiedene Farbe. Ein Fall ist günstig, d.h. $p = \frac{1}{2}$.
Lösung 2: Es gibt drei Fälle: Beide Kugeln sind rot; beide Kugeln sind schwarz, oder die beiden Kugeln haben verschiedene Farbe. Zwei Fälle sind günstig, also ist $p = \frac{2}{3}$.
Lösung 3: Es gibt vier Fälle: rot-rot, rot-schwarz, schwarz-rot und schwarz-schwarz. Zwei Fälle sind günstig, also ist $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Lösung 4: Man denke sich die Kugeln durchnumeriert: 1r, 2r, 3s, 4s. Es gibt sechs Fälle: 1r2r, 1r3s, 1r4s, 2r3s, 2r4s, 3s4s. Zwei Fälle sind günstig, also ist $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Lösung 5: Die eine gezogene Kugel hat irgendeine Farbe. Für die andere Kugel gibt es zwei Möglichkeiten, von denen eine günstig ist. Also ist $p = \frac{1}{2}$.
Lösung 6: Die eine gezogene Kugel hat irgendeine Farbe. Dann ist die andere Kugel eine von den drei restlichen. Davon ist eine günstig, also ist $p = \frac{1}{3}$.
Lösung 7: Man stellt die Entnahme der beiden Kugeln als zweistufiges Experiment durch einen Baum dar und wendet die Pfadregeln an:
Man erhält $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.



110. In einer Urne liegt eine Kugel, die entweder weiß oder schwarz ist. Man legt eine weiße Kugel dazu, mischt und zieht eine Kugel. Sie ist weiß. Würdest du darauf wetten, daß die Kugel, die noch in der Urne liegt, auch weiß ist? Begründe deine Antwort!

111. *Problème du bâton brisé:* Ein Stab der Länge $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geqq 3$ soll auf gut Glück in drei Teile der Längen a_1, a_2, a_3 ($a_i \in \mathbb{N}$) zerbrochen werden.
Verfahren A: Die beiden Teilpunkte T_1 und T_2 werden willkürlich aus den $a - 1$ Möglichkeiten ausgewählt.
Verfahren B: Teilpunkt T_1 werde willkürlich aus den $a - 1$ Möglichkeiten ausgewählt. Dann wählt man wieder willkürlich eines der beiden Teilstücke und teilt es noch mal auf gut Glück, falls es noch teilbar ist. Andernfalls erhält man nur zwei Stücke und sicher kein Dreieck.

a) Wie groß ist in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich aus den drei Teilen ein (nicht entartetes) Dreieck bilden läßt, wenn $a = 5$ ist?

b) Was ergibt sich für $a = 3; 4; 6; 7$?