



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# Stochastik

**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

1. Zufallsexperimente

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83580](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83580)

## 1. Zufallsexperimente



»Iacta est alea – Gefallen ist der Würfel«

Ulrich von Huttens (1488–1523) Wahlspruch enthält keine Spur des Zufalls; denn das Ergebnis liegt ja auf dem Tisch. Er geht zurück auf *Sueton* (70–140), der *Caesar* (100/102–44 v. Chr.) anlässlich der Überschreitung des Rubikon (49 v. Chr.) sagen läßt »iacta alea est« (*Caes.* 32). Der Ausgang dieses Unternehmens war völlig offen, das Ergebnis also nicht bekannt, aber es gab auch kein Zurück. Wir dürfen daher *Plutarch* (um 46–um 125) glauben, der in *Pompeius* (60) berichtet, *Caesar* habe damals den sprichwörtlich gewordenen Vers des Komödiendichters *Menander* (342–291) auf griechisch zitiert

» Ἀνεγρίφθω κύβος – Hochgeworfen ist der Würfel«

## 1. Zufallsexperimente

In den Naturwissenschaften werden Erkenntnisse durch Experimente gewonnen und daraus gezogene Schlußfolgerungen durch Experimente überprüft. Dieses Verfahren ist kennzeichnend für das empirische Vorgehen, das auch in anderen Wissenschaften wie etwa der Medizin, der Psychologie, der Soziologie und den Wirtschaftswissenschaften verwendet wird.

Vernünftige Experimente sind dadurch gekennzeichnet, daß man präzise die Bedingungen festlegt, unter denen das Experiment durchgeführt werden soll. Bei einem echten Experiment steht das Ergebnis nicht schon vorher fest. Trotzdem muß man sich vor der Durchführung einen Überblick über die möglichen Ergeb-

	5	10	15	20	25	30
5	4 5 2 6 1 5 5 3 1 2 3 5 2 6 2 2 1 3 2 5 3 1 5 3 1	6 5 5 5 5 4 6 1 1 4 4 6 1 3 2 3 5 5 5 3 1 6 1 1 3	1 1 6 6 1 1 6 5 4 6 5 2 3 3 1 1 2 2 3 6 3 1 2 5 6	3 6 2 3 5 2 6 6 5 3 6 5 6 3 2 5 2 5 1 5 4 1 1 6 1	2 2 5 1 5 6 5 2 5 6 4 3 6 2 2 6 4 3 4 3 2 5 3 1 1	2 2 1 3 3 2 2 5 5 3 6 5 5 2 4 5 4 4 5 2 4 4 3 5 4
10	6 6 5 3 5 2 5 2 4 1 6 2 2 5 6 4 3 1 6 2 1 1 1 5 3	2 4 5 1 2 3 2 4 4 1 3 1 3 1 1 2 5 2 4 6 2 1 2 6 2	5 2 4 2 4 5 5 6 1 6 4 4 3 2 3 2 2 3 5 6 3 2 3 6 6	3 6 5 3 5 5 3 6 2 3 5 2 6 3 2 5 1 6 3 5 6 5 2 2 6	5 2 1 4 6 6 5 5 4 5 2 3 2 2 3 3 6 3 2 2 1 6 4 2 5	4 3 6 2 6 4 6 3 1 1 2 6 3 4 4 5 2 5 2 2 1 5 1 5 2
15	6 1 2 6 3 2 6 5 6 3 3 6 2 4 2 4 5 6 3 3 3 4 1 3 6	3 3 6 6 6 5 3 3 1 6 3 4 2 5 6 5 1 3 4 4 1 3 6 4 5	4 1 2 4 6 3 6 1 3 6 2 1 3 1 4 2 2 6 4 6 4 2 2 5 2	1 2 3 3 1 3 4 4 6 5 2 3 6 6 3 1 5 2 1 3 4 1 6 2 1	2 2 4 5 6 6 3 3 3 3 2 2 1 5 5 4 4 5 1 6 3 5 5 3 6	6 3 5 3 1 3 2 3 3 5 4 4 5 2 5 4 1 5 1 3 4 2 6 2 4
20	4 4 1 6 2 5 3 5 5 5 3 4 2 1 2 4 5 4 4 2 1 3 1 2 1	5 4 5 5 5 2 3 2 3 6 5 4 6 6 5 1 6 2 1 4 1 5 2 2 2	1 3 6 1 5 1 1 2 5 4 2 1 3 4 3 1 3 6 1 4 2 2 6 5 2	5 1 6 4 4 6 5 1 4 2 1 1 5 3 3 1 6 2 2 3 1 3 4 5 5	5 3 2 2 6 1 5 5 4 2 6 4 3 4 1 6 4 3 2 2 6 2 2 4 2	2 5 5 1 3 5 6 3 1 3 6 2 2 2 2 6 1 3 1 3 3 3 3 2 3
25	5 1 6 3 3 2 2 2 4 1 2 2 2 5 6 4 5 1 6 2 6 6 4 4 4	6 5 2 1 6 4 6 6 5 3 5 6 6 6 1 6 5 5 5 5 5 3 6 6 2	1 1 1 6 2 4 5 1 2 6 2 4 3 6 1 1 6 5 2 1 2 4 6 4 6	5 4 5 1 5 6 2 4 1 5 2 4 6 3 2 3 4 6 6 5 6 3 5 2 1	1 1 1 2 4 1 1 3 1 3 6 5 6 1 3 2 6 2 1 5 5 5 4 1 2	6 1 2 1 5 4 1 6 2 4 2 4 6 5 2 2 1 5 2 6 2 5 6 3 1
30	3 1 1 3 2 1 1 3 3 5 5 2 1 1 5 6 1 1 2 6 1 2 2 4 1	1 5 6 5 2 4 3 5 5 4 2 1 5 2 5 6 2 5 5 4 4 5 1 5 2	6 2 6 2 3 3 2 6 1 5 1 6 1 3 6 6 4 2 6 2 6 4 4 1 6	1 1 1 2 2 3 2 6 1 3 5 1 5 2 2 6 5 3 5 3 1 3 2 6 6	4 1 6 5 3 4 3 2 3 3 2 6 2 3 2 1 6 6 5 5 2 2 5 6 5	6 3 2 1 1 4 3 5 2 2 4 1 5 1 3 2 5 1 5 4 2 1 3 4 4
35	4 4 5 6 4 5 2 2 6 4 3 6 3 3 3 3 2 4 2 4 4 6 4 6 3	5 6 3 4 4 4 1 3 1 6 2 2 6 4 5 2 3 3 2 3 2 6 3 3 6	3 6 3 2 2 3 2 3 6 2 4 3 3 1 5 2 3 5 1 3 6 4 5 3 6	3 1 1 2 3 5 5 4 3 1 1 6 1 2 1 4 3 2 4 6 1 2 1 6 5	3 1 3 2 3 1 1 5 6 4 3 6 2 1 3 3 3 5 2 4 2 5 2 5 6	6 1 6 3 3 5 4 3 5 3 4 4 6 5 6 6 5 1 2 2 5 1 5 2 6
40	3 4 5 2 2 5 4 2 6 4 2 5 6 1 4 3 1 1 2 5 4 5 5 6 4	2 2 1 4 4 3 4 3 6 1 4 4 6 4 6 1 3 6 3 2 3 5 4 5 6	6 4 2 1 3 2 2 5 4 1 2 6 3 3 3 6 2 5 5 2 2 4 1 2 2	4 6 2 5 5 3 3 2 3 5 1 5 6 3 2 3 5 4 3 1 6 6 3 2 5	6 5 5 3 5 1 2 6 5 3 1 2 1 3 2 6 5 6 4 6 2 5 3 4 4	5 2 6 4 5 2 2 2 5 5 2 2 2 2 5 6 1 3 3 5 4 2 1 2 2

Tab. 10.1 1200 Würfelwürfe. Die 1. Zeile enthält die ersten 30 Würfe, usw.

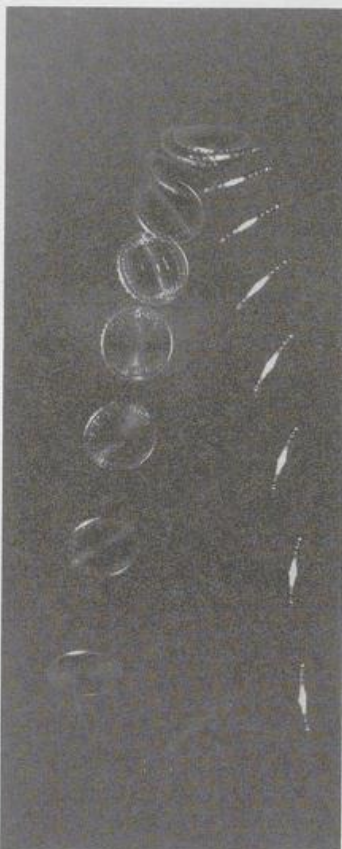
nisse verschafft haben. Nur so kann ein Experiment gezielt eingesetzt werden. Man kann sich in einer derartigen Situation auf den Standpunkt stellen, daß das auftretende Ergebnis vom »Zufall« ausgewählt wird. Dabei wollen wir die Frage nicht diskutieren, ob es wirklichen Zufall gibt (was das auch immer sein soll), oder ob der Zufall nur deshalb als Lückenbüßer eintreten muß, weil wir die Situation nicht völlig durchschauen. In diesem Sinne nennen wir Experimente auch **Zufallsexperimente**.

Besonders deutlich tritt der Zufallscharakter eines Experiments bei den sogenannten Glücksspielen hervor. Bekannte Beispiele dafür sind:

1. Der Würfelwurf. Üblicherweise läßt man als Ergebnisse nur die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu und verzichtet darauf, Situationen wie »Der Würfel steht auf einer Kante« oder »Der Würfel steht auf einer Ecke« als Ergebnisse zu berücksichtigen. Führt man das Experiment mehrfach nacheinander durch, so sieht man das Wirken des Zufalls besonders eindrucksvoll. In Tabelle 10.1 sind die Ergebnisse von 1200 Würfelwürfen zeilenweise aufgezeichnet.

2. Der Münzenwurf. Hier betrachtet man meist nur zwei Ergebnisse, nämlich Adler und Zahl bzw. Kopf und Wappen je nach der Gestaltung der Münze. Neutral kann man die Ergebnisse z. B. auch durch 0 und 1 kennzeichnen.

In Tabelle 11.1 sind die Ergebnisse von 800 Münzenwürfen aufgezeichnet.

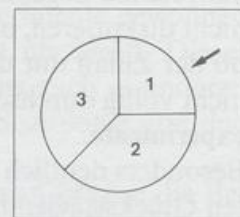


1 0 0 0 1	1 0 0 1 0	0 1 0 0 0	0 1 0 1 1	0 1 1 1 0
0 1 0 0 0	1 0 0 1 0	1 1 0 0 1	1 0 0 1 1	1 0 1 0 0
1 0 0 1 1	0 1 1 1 1	1 0 1 0 0	0 1 0 0 0	1 1 1 0 1
0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 1 0 0	1 0 1 1 1	1 1 1 0 0
0 0 1 1 0	0 0 0 1 0	0 1 0 1 1	0 0 0 1 0	1 0 1 0 0
1 1 1 0 0	1 0 0 0 1	1 0 0 1 1	1 1 1 1 0	1 1 0 0 0
1 0 1 0 0	1 0 1 1 1	1 1 0 1 0	0 0 0 1 1	1 1 1 1 1
1 1 0 1 1	0 1 1 1 1	0 1 1 1 0	0 0 1 0 1	0 0 1 0 0
0 1 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 1 1 0	0 1 1 1 1	1 1 0 1 0
1 1 0 0 0	0 1 1 1 0	0 0 1 1 0	1 0 1 1 0	0 0 0 0 0
0 1 0 1 1	0 1 0 1 1	0 1 1 1 0	0 0 1 0 0	1 0 0 1 1
0 1 0 1 0	0 0 1 1 1	0 0 1 0 1	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0
1 1 1 1 1	1 1 0 0 1	1 0 1 1 1	0 0 1 1 1	1 0 1 0 0
0 1 1 0 1	0 1 0 1 1	0 0 0 0 1	1 1 1 0 1	0 1 1 1 1
0 1 1 0 0	0 1 1 1 1	0 1 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 1 0 1
0 1 0 1 1	1 1 1 1 1	0 0 1 1 0	0 1 1 0 0	1 1 1 0 1
0 0 1 0 0	0 1 0 0 0	1 0 1 1 0	1 0 0 0 1	1 0 1 0 0
1 1 1 1 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 1 1	1 0 0 1 1
1 0 1 1 0	0 1 1 1 0	0 0 1 1 1	0 1 1 0 0	1 1 0 0 1
1 0 1 1 0	1 0 0 0 0	0 0 0 1 1	0 0 0 0 0	1 0 1 1 0
1 1 1 1 1	1 1 1 0 0	0 1 0 0 0	0 1 1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 1 0 0	1 1 0 1 1	1 0 1 1 0	1 1 1 1 0	0 1 1 1 1
1 1 0 1 1	1 0 0 1 0	1 0 1 1 0	0 1 0 1 1	0 0 0 1 1
1 0 1 0 0	0 1 0 0 1	1 0 1 0 0	1 1 0 1 1	0 1 0 1 1
1 1 1 1 1	0 0 0 0 0	0 0 1 0 1	1 1 1 1 0	0 1 0 0 1
0 0 1 0 1	0 1 1 1 1	1 1 1 1 1	0 0 1 1 1	1 1 0 1 0
1 0 0 0 0	0 0 1 1 0	0 0 1 0 1	1 1 1 0 0	0 0 1 1 0
0 0 0 1 0	0 1 1 1 0	0 0 1 1 0	0 1 1 0 0	0 0 0 1 1
0 0 1 1 1	0 0 0 1 0	1 1 0 0 1	1 1 0 0 1	1 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 1 0 1 1	0 1 0 1 0	0 1 1 0 0
1 0 0 1 1	0 1 1 1 1	0 1 0 0 1	0 1 0 0 0	1 0 0 1 0
1 0 1 1 0	0 1 1 1 0	0 1 0 1 1	1 0 1 1 1	1 0 0 0 1

Bild 11.1 Zufallsexperiment: Werfen einer Münze  
Tab. 11.1 800 Münzenwürfe, zeilenweise notiert

3. Das Ziehen aus einer Urne. Eine Urne enthalte rote und schwarze Kugeln, von denen eine gezogen wird. Als Ergebnisse kommen dann in Frage »rot« und »schwarz«. Urnen sind besonders beim Losziehen beliebt.

4. Das Drehen eines Glücksrads. Auf einem Glücksrad sind Sektoren etwa durch Zahlen gekennzeichnet. Ergebnisse sind dann diese Zahlen, in unserem Beispiel der Figur 12.1 die Zahlen 1, 2 und 3.



Das Roulett verwendet eine Art Glücksrad mit den Zahlen 0, 1, 2, ..., 36, für die je gleich große Sektoren vorgesehen sind.

Der Einfluß des Zufalls ist aber nicht nur bei Glücksspielen, sondern auch bei »ernsthafte« Experimenten spürbar: Fig. 12.1 Glücksrad

1. Bestimmung der Fallbeschleunigung. Die möglichen Ergebnisse sind (benannte) Dezimalzahlen, deren Stellenzahl von der Meßgenauigkeit abhängt.

2. Bestimmung der Anzahl der Atome eines radioaktiven Präparats, die in einer Sekunde zerfallen. Die möglichen Ergebnisse sind die ganzen Zahlen von 0 bis zur Anzahl  $N$  der Atome des Präparats.

3. Umfrage zum Bekanntheitsgrad eines Politikers. Fragt man 1000 Personen, so sind die möglichen Ergebnisse für den in Prozenten angegebenen Bekanntheitsgrad 0%, 0,1%, 0,2%, ..., 99,9%, 100%.

4. Qualitätskontrolle der Industrie. Die möglichen Ergebnisse einer Einzelprüfung sind z. B. »brauchbar« oder »unbrauchbar«. Man kann aber auch die gesamte Prüfung von z. B. 1000 Stück als Experiment auffassen; mögliche Ergebnisse für den Anteil der unbrauchbaren Stücke sind  $0, \frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}, \dots, 1$ .

## Aufgaben

1. *Leibniz* (1646–1716)\* dachte, daß sich beim Werfen mit 2 Würfeln genausooft die Augensumme 11 wie die Augensumme 12 ergibt. Führe folgendes Experiment durch: Wirf 2 Würfel 100mal und notiere eine 0, wenn die Augensumme 2 bis 10 ist, eine 1, wenn sie 11 ist, und eine 2, wenn sie 12 ist.
2. *Galilei* (1564–1642)\* wurde das Problem vorgelegt\*\*, wieso beim Werfen mit 3 Würfeln die Augensumme 10 leichter zu erreichen sei als die Augensumme 9. Führe dazu folgendes Experiment durch: Wirf mit 3 Würfeln 100mal und notiere eine 0, wenn die Augensumme nicht 10 oder 9 ist, eine 1 bei Augensumme 10 und eine 2 bei Augensumme 9.
3. Bis ins 17. Jh. glaubten Glücksspieler, es sei ebenso leicht, bei 4maligem Werfen eines Würfels mindestens einmal eine Sechs zu erhalten wie bei 24maligem Werfen von 2 Würfeln einen Sechser-Pasch (d. h. eine Doppelsechs). Untersuche das Problem anhand von Tabelle 10.1 folgendermaßen:
  - a) Teile die ersten 100 angegebenen Augenzahlen in Vierergruppen ein. Notiere eine 0, wenn die Vierergruppe keine Sechs enthält, andernfalls eine 1.
  - b) Fasse zwei untereinanderstehende Zahlen der Zeilen 1 und 2, 3 und 4 usw. als Ergebnis eines Doppelwurfs auf. Teile diese Doppelwürfe in 24er-Gruppen ein; es ergeben sich 25 Gruppen. Notiere eine 0, wenn eine solche Gruppe keinen Sechser-Pasch enthält, andernfalls eine 1.

Beachte, daß die Ergebnisse nur für den Würfel gelten, mit dem Tabelle 10.1 erstellt wurde!

\* Siehe Seite 394 ff.

\*\* Vermutlich von *Cosimo II. de' Medici* (1590–1621), dem Großherzog von Toskana (1609–1621)