Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

4. Kugel und Kugel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

4. Kugel und Kugel

Hier geht es darum, die Lage zweier Kugeln zu beschreiben. Auch wenn sich alles im Raum abspielt, so sind die Überlegungen dazu so einfach (oder schwer) wie die zur Lagebeschreibung von Kreisen in der Ebene. Dazu eine kurze Erinnerung an weit Zurückliegendes.

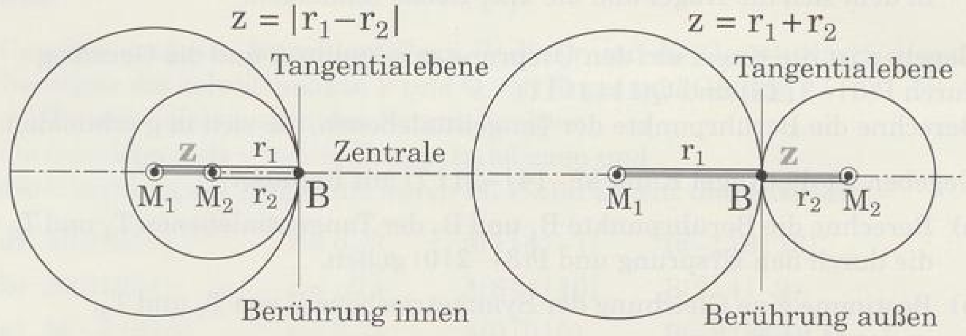
Es gibt wieder die 3 charakteristischen Fälle: Berühren, Schneiden, Meiden. Und für jeden Fall 2 Ausprägungen. Wie bei Kreisen auch müssen von jeder Kugel Mittelpunkt M und Radius r bekannt sein.

Die Gerade durch die Kugelmittelpunkte heißt Zentrale – sie ist auch die Symmetrieachse eines Kugelpaars. Am besten verdeutlicht man sich die Fälle an 2 Kreisen; sie sind der Umriß von Kugeln, die entstehen, wenn diese Kreise um die Zentrale rotieren. Dazu braucht man 3 Stücke:

- die Entfernung der Kugelmittelpunkte $z = \overline{M_1M_2}$
- die Summe der Kugelradien $r_1 + r_2$
- den Unterschied der Kugelradien $|r_1 - r_2|$

1 gemeinsamer Punkt: Berührung

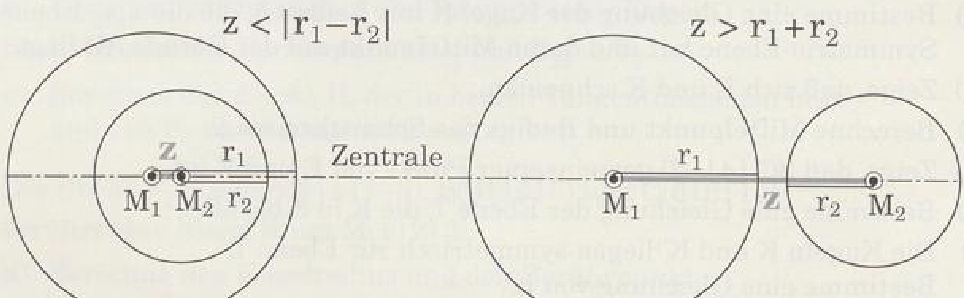
$z = |r_1 - r_2|$ **oder** $z = r_1 + r_2$



Berührung innen — Berührung außen

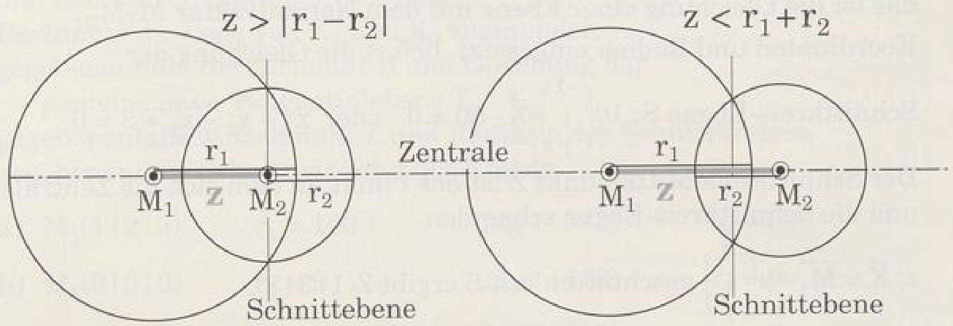
kein gemeinsamer Punkt

$z < |r_1 - r_2|$ **oder** $z > r_1 + r_2$

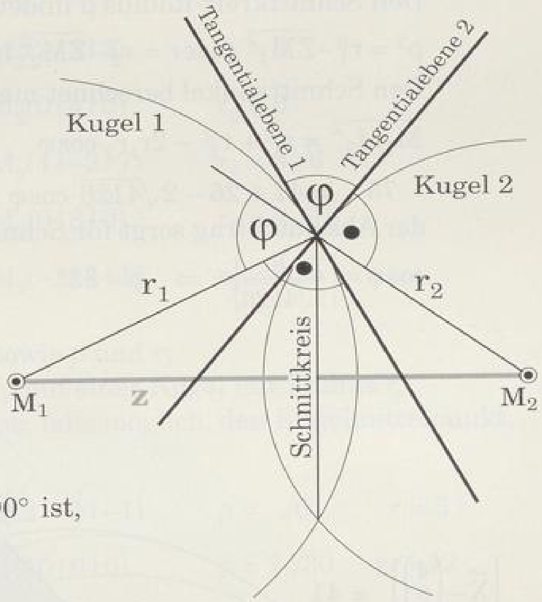


1 gemeinsamer Schnittkreis

$z > |r_1 - r_2|$ **und** $z < r_1 + r_2$



Als Schnittwinkel zweier Kugeln bezeichnet man den Winkel, den die beiden Tangentialebenen in einem Punkt des Schnittkreises bilden. Man berechnet ihn, indem man den Kosinussatz anwendet im Dreieck mit den Seiten r_1, r_2 und z. In diesem Dreieck ist der Außenwinkel φ gleich dem Schnittwinkel der Tangentialebenen, weil entsprechende Winkelschenkel aufeinander senkrecht stehen.



Kosinussatz: $z^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(180° - \varphi)$

wegen $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ gilt

$$\cos\varphi = \frac{z^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Damit der Schnittwinkel nicht größer als 90° ist,

setzt man Betragstriche: $\cos\varphi = \left|\frac{z^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}\right|$

Beispiel: Man untersuche die Lage der Kugeln um $M_1(4|0|0)$ mit Radius $\sqrt{41}$ und um $M_2(-1|5|5)$ mit Radius $\sqrt{26}$.

Verbindungsvektor $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix}-5\\5\\5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overline{M_1M_2} = z = 5\sqrt{3} = 8{,}66\ldots$

Summe der Radien $r_1 + r_2 = \sqrt{41} + \sqrt{26} = 11{,}50\ldots$

Unterschied der Radien $r_1 - r_2 = \sqrt{41} - \sqrt{26} = 1{,}30\ldots$

wegen $1{,}3 < 8{,}66 < 11{,}5$ schneiden sich die Kugeln in einem Kreis.

Ein Punkt des Schnittkreises liegt auf beiden Kugeln, seine Koordinaten erfüllen also beide Kugelgleichungen

K_1: $(\vec{X} - \overrightarrow{M_1})^2 = r_1^2$, multipliziert $\vec{X}^2 - 2\vec{X}\circ\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_1}^2 = r_1^2$

K_2: $(\vec{X} - \overrightarrow{M_2})^2 = r_2^2$, multipliziert $\vec{X}^2 - 2\vec{X}\circ\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{M_2}^2 = r_2^2$

man subtrahiert die multiplizierten Gleichungen voneinander

$2\vec{X}\circ(\overrightarrow{M_2}-\overrightarrow{M_1})+\overrightarrow{M_1}^2-\overrightarrow{M_2}^2 = r_1^2-r_2^2$ und bekommt

$2\overrightarrow{M_1M_2}\circ\vec{X}+(\overrightarrow{M_1}^2-\overrightarrow{M_2}^2-r_1^2+r_2^2) = 0$,

das ist die Gleichung einer Ebene mit dem Normalvektor $\overrightarrow{M_1M_2}$, Koordinaten und Radien eingesetzt, liefert die Gleichung der

Schnittkreis-Ebene S: $10\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\vec{X}-50 = 0$ oder $x_1 - x_2 - x_3 + 5 = 0$.

Der Schnittkreis-Mittelpunkt Z ist der Punkt, in dem sich die Zentrale z und die Schnittkreis-Ebene schneiden

z: $\vec{X} = \overrightarrow{M_1}+\mu\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ geschnitten mit S ergibt Z(1 | 3 | 3).

Den Schnittkreis-Radius ρ findet man mit Pythagoras

$\rho^2 = r_1^2-\overline{ZM_1}^2$ (oder $= r_2^2-\overline{ZM_2}^2$), $\rho^2 = 41 - 27 = 14$, $\rho = \sqrt{14}$

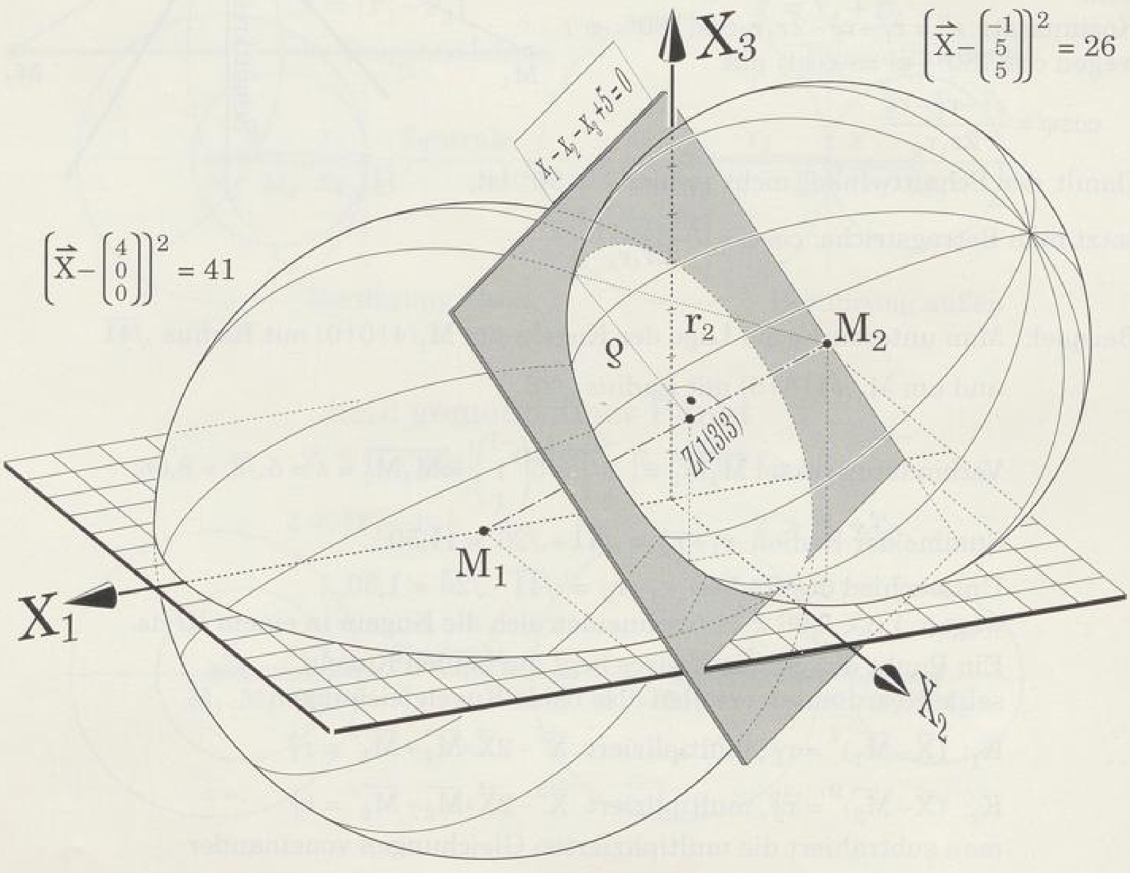
Den Schnittwinkel berechnet man mit dem Kosinussatz

$$\overline{M_1M_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cdot\cos\varphi$$

$$75 = 41 + 26 - 2\sqrt{41\cdot 26}\,\cos\varphi$$

der Absolutbetrag sorgt für Schnittwinkel nicht größer als 90°

$$\cos\varphi = \left|\frac{-8}{2\sqrt{41\cdot 26}}\right| \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 83°.$$



Aufgaben

1. Gegeben sind 2 Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 und den Mittelpunkten M_1 und M_2.
Bestimme die Lage von K_1 und K_2 zueinander,
gegebenenfalls Berührpunkt B und Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene T,
gegebenenfalls Mittelpunkt Z und Radius ρ des Schnittkreises,
gegebenenfalls Schnittwinkel σ der Kugeln.

a)	$M_1(1\mid 2\mid 3)$	$r_1 = 100$	$M_2(1\mid 2\mid 3)$	$r_2 = 99$
b)	$M_1(0\mid 0\mid 0)$	$r_1 = 9$	$M_2(1\mid 4\mid 8)$	$r_2 = 9$
c)	$M_1(1\mid 1\mid 1)$	$r_1 = 7$	$M_2(7\mid 8\mid 9)$	$r_2 = 5$
d)	$M_1(0\mid 6\mid 6)$	$r_1 = 9$	$M_2(2\mid 2\mid 2)$	$r_2 = 3$
e)	$M_1(1\mid 0\mid 1)$	$r_1 = 3\sqrt{2}$	$M_2(0\mid 4\mid 0)$	$r_2 = 6$
f)	$M_1(0\mid 2\mid -1)$	$r_1 = \sqrt{6}$	$M_2(4\mid -2\mid 7)$	$r_2 = 3\sqrt{6}$
g)	$M_1(0\mid -4\mid 0)$	$r_1 = 2\sqrt{5}$	$M_2(0\mid 8\mid 0)$	$r_2 = 2\sqrt{15}$
h)	$M_1(1\mid 1\mid 0)$	$r_1 = 2\sqrt{5}$	$M_2(-1\mid 1\mid 1)$	$r_2 = \sqrt{15}$

2. Gegeben sind die Punkte Z, P und Q, sowie ρ und r:
Z ist Zentrum des Kreises mit Radius ρ auf einer Kugel mit Radius r,
P und Q liegen auf dem Kreis. Berechne, falls möglich, den Kugelmittelpunkt, der dem Ursprung am nächsten liegt.

a)	$Z(0\mid 0\mid 0)$	$P(1\mid 1\mid -2)$	$Q(2\mid -1\mid -1)$	$\rho = \sqrt{6}$	$r = 3$
b)	$Z(0\mid 4\mid 2)$	$P(2\mid 8\mid -8)$	$Q(10\mid 0\mid 0)$	$\rho = 2\sqrt{30}$	$r = 12$
c)	$Z(8\mid -4\mid -1)$	$P(0\mid 0\mid 0)$	$Q(12\mid -12\mid 0)$	$\rho = 9$	$r = 3\sqrt{11}$
d)	$Z(0\mid 0\mid 2)$	$P(1\mid 2\mid 0)$	$Q(2\mid 1\mid 0)$	$\rho = 3$	$r = 9\sqrt{2}$

•3. Gegeben ist die Kugel K um $M(2\mid 3\mid -1)$ mit Radius 6 und die Gerade g durch $(3\mid -3\mid -5)$ und $(6\mid -1\mid -3)$.

a) Untersuche g und K auf gemeinsame Punkte. Wie liegen g und K?

b) Die Kugeln K^* und K sind zueinander symmetrisch bezüglich der Ebene E: $2x_1 - 2x_2 - x_3 + 10 = 0$. Bestimme eine Gleichung von K^*.

c) Zeige, daß sich K und K^* schneiden, und berechne Mittelpunkt Z und Radius ρ ihres Schnittkreises.

d) Bestimme $d_3 > 0$ so, daß der Punkt $D(0\mid -1\mid d_3)$ auf der Kugel K liegt. Stelle eine Gleichung der Ebene T auf, die K in D berührt.

e) Zeige, daß T auch die Kugel K^* berührt, und berechne den Berührpunkt D^*.

•4. Gegeben ist die Kugel K_1 um $M_1(2|-1|-4)$ mit Radius 2 und die Kugel K_2 um $M_2(8|-1|4)$ mit Radius 4.

a) Untersuche die gegenseitige Lage von K_1 und K_2.

b) Zeige, daß die Ebene T: $3x_1 + 4x_3 = 0$ Tangentialebene der Kugel K_1 ist, und berechne den Berührpunkt B.

c) T ist Symmetrie-Ebene von K_3 und K_1. Bestimme eine Gleichung von K_3. Welche besondere Lage hat K_3 bezüglich K_1 und K_2?

d) Bestimme eine Gleichung der Kugel K_4 mit kleinstmöglichem Radius, die innen von K_1 und K_2 berührt wird.

••5. Gegeben ist eine Schar von Kugeln K_a um $M_a(3a|4a|12a)$, die durch den Ursprung gehen. a soll positiv sein.

a) Zeige: Die Kugelmittelpunkte liegen auf einer Gerade. Warum haben die Scharkugeln eine gemeinsame Tangentialebene? Gib eine Gleichung dieser Tangentialebene an.

b) K_a und die x_1x_2-Ebene schneiden sich in einem Kreis. Bestimme den Schnittkreis-Radius ρ in Abhängigkeit von a.

c) Berechne a so, daß sich K_a und die Kugel K um $M(1|1|3)$ mit Radius 3 innen berühren. Gib eine Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene an.