Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

XI. Normalformen

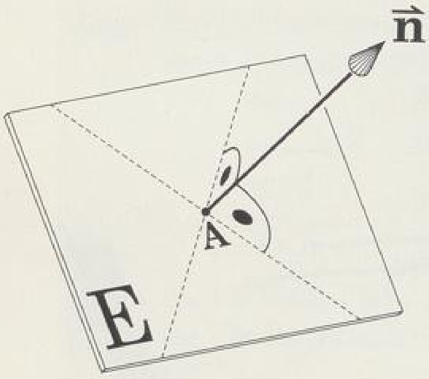
urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

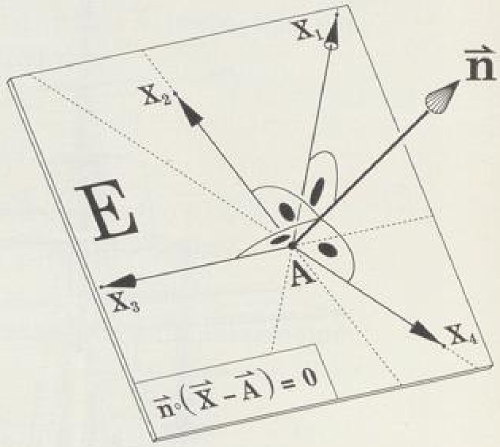
XI. Normalformen

1. Normalform der Ebene

Bisher haben wir die Lage einer Ebene im Raum durch Elemente wie Punkte, Geraden und Vektoren festgelegt – also durch Bestimmungsstücke, die in der Ebene liegen. Es gibt aber auch noch eine andere einfache Möglichkeit: Man gibt einen Punkt A (Aufpunkt) der Ebene an und fixiert die Richtung der Ebene mit einem Normalvektor $\vec{n}$, mit einem Vektor also, der senkrecht auf der Ebene steht. Alle Vektoren $\overrightarrow{AX}$, die einen Ebenenpunkt X mit dem Aufpunkt A verbinden, stehen senkrecht auf $\vec{n}$. Die Ebenenpunkte X werden beschrieben durch:

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$
$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$
$$\vec{n} \circ \vec{X} - \vec{n} \circ \vec{A} = 0$$
$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$$





Die letzte Gleichung kennen wir schon als Koordinatengleichung der Ebene.
Ihre Koeffizienten n_1, n_2, n_3 sind also die Koordinaten eines Normalvektors.

> **Definition**
> Ist A Aufpunkt und $\vec{n}$ Normalvektor einer Ebene E, dann heißt
> $$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$
> **vektorielle Normalform der Ebenengleichung**
> beziehungsweise
> $$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 \quad \text{mit} \quad n_0 = -\vec{n} \circ \vec{A}$$
> **skalare Normalform der Ebenengleichung.**

Die skalare Normalform der Ebenengleichung ist identisch mit der Koordinatengleichung der Ebene.

Beispiel: Gesucht ist eine Gleichung der Ebene E, die durch A(2 | −3 | 4) geht und senkrecht steht auf der Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\3\\-5\end{pmatrix}$.

Als Normalvektor nehmen wir den Richtungsvektor der Gerade und stellen sofort die vektorielle Normalform der Ebenengleichung auf:

E: $\begin{pmatrix}4\\3\\-5\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\right] = 0$. Ausmultiplizieren liefert die

skalare Normalform E: $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 21 = 0$

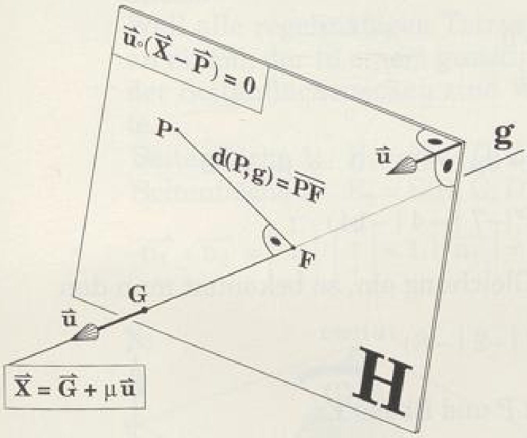
Der Normalvektor zeigt einen neuen Weg, die Parameterform der Ebenengleichung in die Koordinatenform umzurechnen: Man sucht einen Vektor $\overrightarrow{n}$, der auf den beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ der Ebene senkrecht steht. $\overrightarrow{n}$ ist Lösung des 2,3-Gleichungssystems

$$\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{u} = 0$$
$$\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{v} = 0$$

oder ein Vielfaches von $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Dann gehts weiter wie im vorigen Beispiel. Vier Beispiele zeigen die Nützlichkeit der Normalform beim Lösen geometrischer Grundaufgaben.

Abstand d(P,g) von Punkt P und Gerade g

Lösungsidee: Man legt eine Hilfsebene H durch P senkrecht zu g. H schneidet g im Lotfußpunkt F. F heißt auch **senkrechte Projektion** des Punkts P auf (oder in) die Gerade g. Der gesuchte Abstand ist $d(P, g) = \overline{PF}$.



Beispiel: P(0 | −2 | 1) , g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

H: $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7 = 0$

g in H eingesetzt: $2(5 + 2\mu) - 2(2 - 2\mu) + 3(6 + 3\mu) - 7 = 0 \Rightarrow \mu = -1$

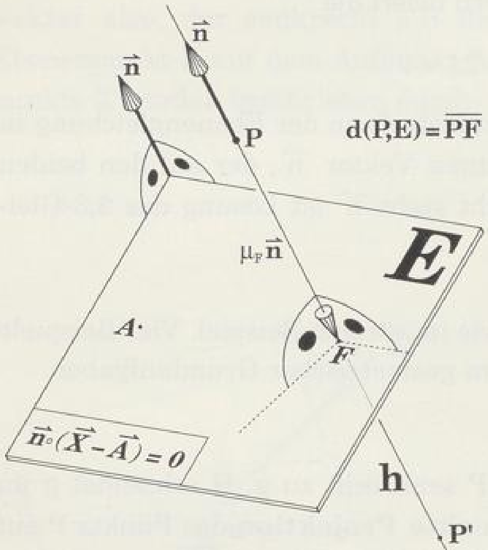
Lotfußpunkt: $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$, F(3 | 4 | 3)

Abstand: $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$, $d(P, g) = |\overrightarrow{PF}| = 7$

Spiegelung eines Punkts P an einer Ebene E

Lösungsidee: Man legt durch P eine Normale der Ebene E. Diese Lotgerade schneidet E im Lotfußpunkt F (Parameter μ_F). F heißt auch **senkrechte Projektion** des Punkts P in (oder auf) die Ebene E.

Für den Spiegelpunkt P' gilt $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P} + 2\mu_F \overrightarrow{n}$



Beispiel: P(1 | 0 | −2) , E: $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 32 = 0$

Lotgerade h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

h in E eingesetzt: $2(1 + 2\mu) + \mu + 3(-2 + 3\mu) + 32 = 0 \Rightarrow \mu_F = -2$

Spiegelpunkt $\overrightarrow{P'} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, P'(−7 | −4 | −14)

Setzt man $\mu_F = -2$ in die Lotgeraden-Gleichung ein, so bekommt man den

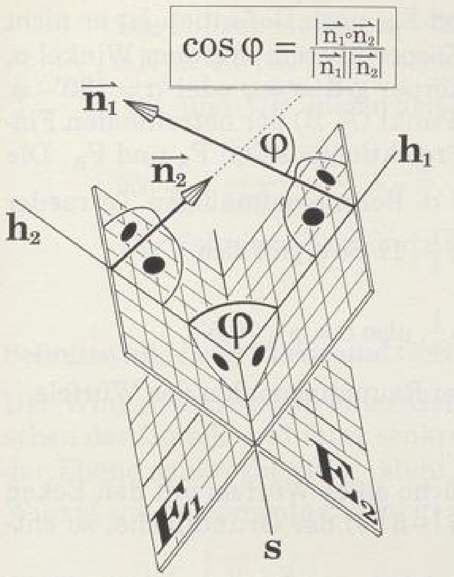
Lotfußpunkt $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, F(−3 | −2 | −8)

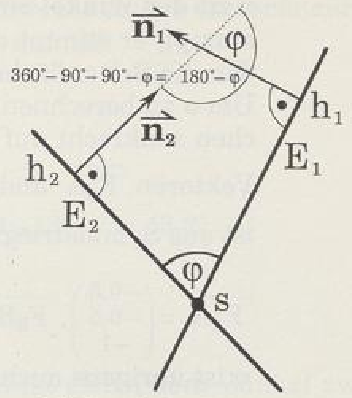
$\overline{PF}$ ist der Abstand d(P, E) von Punkt P und Ebene E:

$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix}$, $d(P, E) = |\overrightarrow{PF}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

Schnittwinkel von Ebenen

Schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2 in der Gerade s, dann versteht man unter dem Schnittwinkel φ den nichtstumpfen Winkel zweier Lotgeraden h_1 und h_2 dieser Schnittgerade s, wobei h_1 in E_1 und h_2 in E_2 liegt. Parallele Ebenen haben den »Schnittwinkel« 0°. Weil die zugehörigen Normalvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ auf h_1 und h_2 senkrecht stehen, bilden auch sie den Schnittwinkel φ oder 180° − φ.





Blick auf die Ebenen in Richtung der Schnittgerade s

Sind $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ Normalvektoren der Ebenen E_1 und E_2

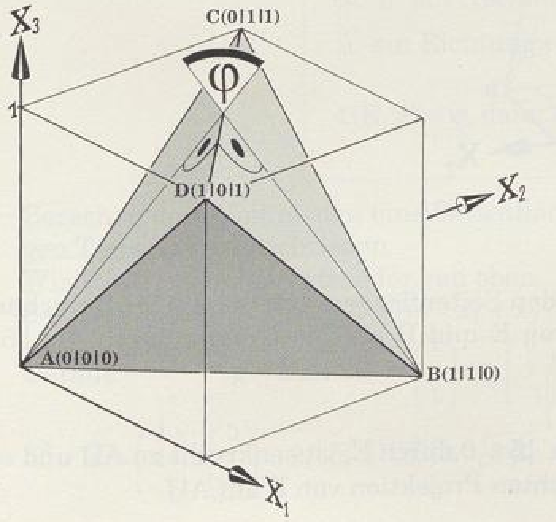
und $\sphericalangle(E_1, E_2) = \varphi$, dann gilt $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n_1}\circ\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$

Beispiel: Berechne den Winkel, den zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders bilden.

Weil alle regelmäßigen Tetraeder ähnlich sind, überlegen wir uns die Lösung an einem, der in einem günstig liegenden Würfel verpackt ist: die Koordinaten der Seitenflächenecken sind Würfelecken, das Tetraeder steht auf einer Kante.

Seitenfläche 1: $E_1 = E(A, D, C)$: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
Seitenfläche 2: $E_2 = E(B, C, D)$: $x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$

$\vec{n_1}\circ\vec{n_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1, |\vec{n_1}| = |\vec{n_2}| = \sqrt{3}$; $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi = 70{,}5°$.



φ ist der Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2, nach Definition ist er nicht stumpf; er stimmt deshalb nicht bei jedem Körper überein mit dem Winkel σ, den die Seitenflächen bilden. Für konvexe Körper gilt: $\sigma = \varphi$ oder $\sigma = 180° - \varphi$. Um σ zu berechnen, projiziert man je einen Punkt (A, B) der betreffenden Flächen senkrecht auf die Schnittgerade. Die Projektionen seien F_A und F_B. Die Vektoren $\overrightarrow{F_AA}$ und $\overrightarrow{F_BB}$ bilden den Winkel σ. Beim regelmäßigen Tetraeder ist aus Symmetriegründen $F_A = F_B = M_{CD}(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \mid 1)$. So ergibt sich

$$\overrightarrow{F_AA} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{F_BB} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \cos\sigma = \frac{0{.}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}, \text{ also } \sigma = \varphi = 70{,}5°.$$

φ ist übrigens auch der Winkel zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels.

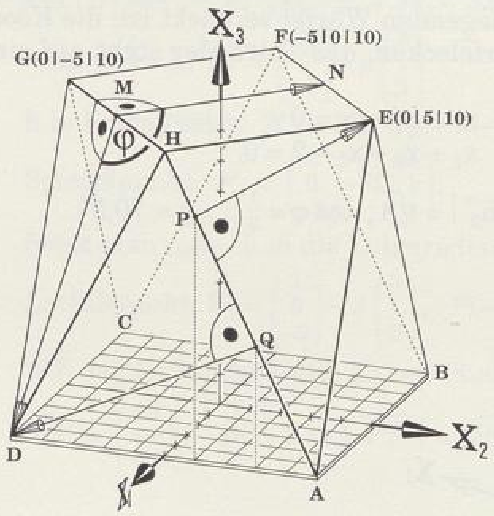
Jetzt noch ein anspruchsvolleres Beispiel:

Verbindet man die Kantenmitten der Deckfläche eines Würfels mit den Ecken $A(5 \mid 5 \mid 0)$, $B(-5 \mid 5 \mid 0)$, $C(-5 \mid -5 \mid 0)$ und $D(5 \mid -5 \mid 0)$ der Grundfläche, so entsteht ein Würfelstumpf ABCDEFGH.

Für den Winkel φ zwischen der Deckfläche EFGH und der Seitenfläche HGD gilt $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{MN} \circ \overrightarrow{MD}}{\overline{MN} \cdot \overline{MD}}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wegen } M(\tfrac{5}{2} \mid -\tfrac{5}{2} \mid 10) \text{ ist } \overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2{,}5 \\ -10 \end{pmatrix},$$

also $\cos\varphi = \dfrac{-25}{5\sqrt{2} \cdot 7{,}5\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{3}$; $\quad \varphi = 109{,}5°$



Für den Winkel ψ zwischen den Seitenflächen AHD und AEH brauchen wir die senkrechten Projektionen von E und D auf die Gerade durch $A(5 \mid 5 \mid 0)$ und $H(5 \mid 0 \mid 10)$: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Hilfsebene $H_E: x_2 - 2x_3 + 15 = 0$ durch E, ist senkrecht zu AH und schneidet AH in $P(5 \mid 1 \mid 8)$, der senkrechten Projektion von E auf AH.

Die Hilfsebene $H_D: x_2 - 2x_3 + 5 = 0$ durch D, ist senkrecht zu AH und schneidet AH in Q(5 | 3 | 4), der senkrechten Projektion von D auf AH.

$\overrightarrow{PE}$ und $\overrightarrow{QD}$ bilden den gesuchten Winkel:

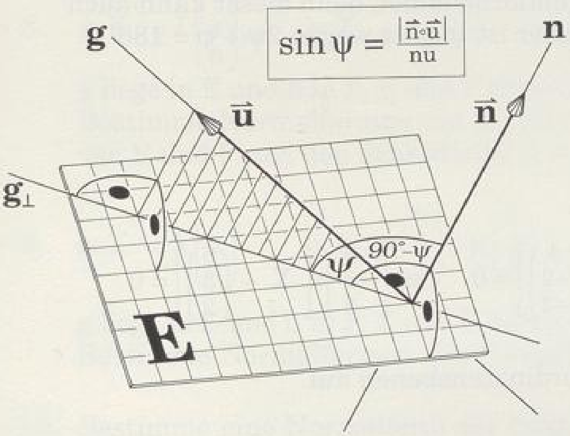
$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{PE} \circ \overrightarrow{QD}}{PE \cdot QD} = -\frac{2}{3}, \quad \psi = 131{,}8^\circ.$$

Der Schnittwinkel der zugehörigen Ebenen ist $180^\circ - 131{,}8^\circ = 48{,}2^\circ$.

Schnittwinkel von Ebene und Gerade

Der Winkel ψ zwischen einer Gerade g und einer Ebene E ist gleich dem Winkel zwischen der Gerade und ihrer senkrechten Projektion $g_\perp$ in die Ebene. Weil die Normale n der Ebene senkrecht auf $g_\perp$ steht, sind der Winkel zwischen n und g und der gesuchte Winkel ψ komplementär: $\sphericalangle(n, g) = 90^\circ - \psi$

$$\cos(90^\circ - \psi) = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$$



Ist $\vec{n}$ ein Normalvektor der Ebene E und $\vec{u}$ ein Richtungsvektor der Gerade g und $\sphericalangle(E, g) = \psi$, dann gilt $\sin\psi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$

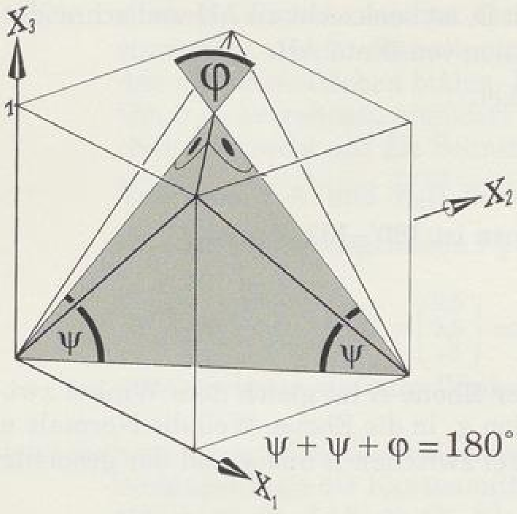
Beispiel: Berechne den Winkel, den eine Seitenfläche und eine Kante eines regelmäßigen Tetraeders einschließen.

Wir verwenden das Tetraeder von oben.

Seitenfläche: $E = E(A, D, C)$: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Gerade: $g = DB: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 2, |\vec{n}||\vec{u}| = \sqrt{3 \cdot 2}$; $\sin\psi = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $\psi = 54{,}7^\circ$.



Auch bei solchen Aufgaben muß man unterscheiden zwischen dem nicht-stumpfen Schnittwinkel von Gerade und Ebene und dem Winkel, den eine Kante eines Polyeders mit einer Seitenfläche bildet, denn dieser kann auch stumpf sein. Im regelmäßigen Tetraeder ist ψ spitz wegen $2\psi + \varphi = 180^\circ$.

Aufgaben

1. Gib eine skalare Normalform an von

a) $\begin{pmatrix}1\\-2\\-7\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right] = 0$ b) $\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}\right] = 0$ c) $\begin{pmatrix}-6\\-3\\-2\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}\right] = 0$

2. Stelle vektorielle Normalformen der Koordinatenebenen auf.

3. Gib eine skalare Normalform der Ebene E an, von der man weiß:

a) E enthält $A(1\,|\,0\,|\,-3)$ und hat die Normalrichtung $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

b) E enthält $A(1\,|\,1\,|\,-2)$, $B(-2\,|\,1\,|\,0)$ und $C(0\,|\,1\,|\,2)$

c) E enthält $A(1\,|\,-1\,|\,-4)$ und die Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}12\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$

d) E enthält $A(1\,|\,-1\,|\,-4)$ und steht senkrecht auf g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}12\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$

e) E enthält g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

f) E enthält g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\-2\\7\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-4\\2\\-6\end{pmatrix}$

4. E: $3x_1 + x_3 - 6 = 0$ enthält $P(1|7|3)$, aber nicht $Q(2|2|1)$.

a) n sei das Lot von E in P. Gib eine Gleichung von n an.

b) m sei das Lot von E durch Q. Gib eine Gleichung von m an.

5. Stelle eine Normalform der Ebene F auf, die auf E: $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ senkrecht steht und g enthält

a) $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

6. Bestimme eine Gleichung der Gerade g, die $A(1|2|3)$ enthält und parallel ist zu E: $2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4 = 0$ und F: $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$.

7. $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. Bestimme eine Normalform der Ebene,

a) die durch den Ursprung geht und parallel ist zu g und h

b) die g enthält und senkrecht steht auf der Ebene von **a)**.

• **8.** $g\colon \overrightarrow{X} = \lambda\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$, $h\colon \overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}-7\\8\\7\end{pmatrix}$

g liege in E und h in F. E und F bilden denselben Winkel wie g und h.
Bestimme Normalformen von E und F, eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F und den Schnittwinkel von E und F.

• **9.** $g\colon \overrightarrow{X} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

g liege in E und h in F. E und F haben denselben Abstand wie g und h.
Bestimme Normalformen von E und F.

10. Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von $A(3|-1|4)$ und $B(7|-5|-2)$.

• **11.** Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von

$g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.

• **12.** Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von
E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ und F: $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$,
die durch den Ursprung geht.

13. $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-25\\6\\11\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix}$, $P(1|1|1)$

Bestimme den Abstand von Punkt P und Gerade g.

14. Welche Punkte der Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ haben

a) vom Ursprung die Entfernung $2\sqrt{11}$?
b) von der x_1x_2-Ebene den Abstand 3 ?
c) von der x_1-Achse den Abstand 2,5 ?
d) von der Gerade h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Abstand $2\sqrt{3}$?

: 15. In welchen Punkten schneidet die Gerade s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

den Zylinder um die Achse a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Radius 6 ?

16. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, P(14 | 6 | 3)

a) g ist Tangente einer Kugel um P.
Berechne Berührpunkt A und Kugelradius r_a.

b) Auf g liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P. Berechne B und den Kugelradius r_b und die Schnittpunkte S von Kugel und Gerade.

c) Berechne Radius r_c und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und g berührt.

$\boxed{17.}$ Spiegle den Punkt P an der Ebene E:

a) P(14 | 2 | 1), E: $3x_1 - x_2 = 0$

b) P(11 | 11 | 3), E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

• 18. E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 30 = 0$, P(0 | 2 | 1)

a) E ist Tangentialebene einer Kugel k_a um P.
Berechne Berührpunkt A und Kugelradius r_a.

b) In E liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P.
Berechne B und den Kugelradius r_b.

c) Berechne Radius r_c und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und E berührt.

d) E ist Symmetrieebene der Kugeln k_a (von **a)**) und k'.
Berechne den Mittelpunkt M' von k'.

e) Wo liegen die Mittelpunkte aller Kugeln, die k_a und k' berühren ?

f) Die Kugeln k_a und k' lassen sich durch eine Halbdrehung ineinander überführen. Beschreibe in Worten die möglichen Drehachsen.

g) E und die Kugel um P mit Radius 13 schneiden sich.
Berechne Mittelpunkt M und Radius ρ des Schnittkreises.

• **19.** E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 81 = 0$, k ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 41

a) Berechne Mittelpunkt A und Radius ρ des Kreises, in dem sich E und k schneiden.

b) Verkleinert man den Schnittkreisradius von **a)** um 16, so ergibt sich ein Kreis, in dem sich E und Kugeln mit Radius 30 schneiden. Berechne die Mittelpunkte M dieser Kugeln.

c) Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen von k, die zu E parallel sind.

• **20.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$, $P(9\,|\,-8\,|\,11)$

a) Berechne Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, die durch P geht und ihren Mittelpunkt auf g hat.

b) P sei die Ecke eines Quadrats, von dem eine Diagonale in g liege. Berechne die restlichen Quadratecken und eine Gleichung ihrer Ebene.

c) Wo (Punktmenge, Gleichung!) liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die das Quadrat in **b)** berühren ?

• **21.** Spiegle die Ebene E: $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7 = 0$

a) am Ursprung **b)** an der x_3-Achse **c)** an der x_1x_2-Ebene

• **22.** Spiegle die Ebene E: $3x_1 + 2x_3 - 1 = 0$

a) am Punkt $P(1\,|\,2\,|\,3)$ **b)** an der Gerade g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) an der Ebene F: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$\boxed{\textbf{23.}}$ Berechne die Schnittwinkel φ von E und F:

a) E: $x_1 + 10x_2 + 9x_3 - 4 = 0$, F: $11x_1 + 19x_2 + 8x_3 - 4 = 0$
b) E: $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4 = 0$, F: $8x_1 + x_2 + 5x_3 - 4 = 0$
c) E: $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$, F: $-x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 9 = 0$
d) E: $x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 1 = 0$, F: $3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 1 = 0$

$\boxed{\textbf{24.}}$ Berechne die Schnittwinkel φ von E und g:

a) E: $5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6 = 0$, g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}3\\12\\3\end{pmatrix}$

b) E: $x_1 + x_2 - 3x_3 + 13 = 0$, g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}13\\-7\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}$

c) E: $-x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 0$, g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}$

d) E: $x_1 + x_2 + 4x_3 + 111 = 0$, g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\7\\-1\end{pmatrix}$

25. Berechne die Schnittwinkel von E: $12x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 0$ und den

a) Koordinatenachsen a) Koordinatenebenen

$\boxed{\textbf{26.}}$ H: $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$, $A(-1 \mid 2 \mid 2)$, $B(3 \mid -3 \mid 1)$

a) Bestimme eine Normalform der Ebene E, die auf H senkrecht steht und durch A und B geht.

b) Bestimme eine Normalform der Ebene G, die AB in A senkrecht schneidet.

c) Bestimme den Schnittwinkel φ von G und H.

d) Bestimme eine Gleichung der Gerade g, die durch B geht und parallel zu G und H ist.

e) Bestimme den Schnittwinkel ψ von g und F: $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$.

27. $A(3 \mid 1 \mid 3)$, $B(6 \mid 4 \mid 5)$, $C(7{,}5 \mid 1 \mid 6)$ und die Spitze $S(4 \mid 1 \mid 8)$ bilden ein Tetraeder.

a) Berechne das Volumen.

b) Berechne den Fußpunkt F der Höhe durch S und die Länge dieser Höhe.

c) Berechne den Winkel α zwischen der Grundfläche und der Kante [AS].

d) Berechne den Winkel β zwischen der Grundfläche und der Fläche [ACS].

28. $A(2 \mid -3 \mid 2)$, $B(-1 \mid 3 \mid 6)$, $C(5 \mid -5 \mid 0)$

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) A', B' und C' sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in die x_1x_2-Ebene. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A'B'C'.

c) Berechne den Winkel φ zwischen E_{ABC} und der x_1x_2-Ebene.

29. E: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$, $A(1 \mid 2 \mid 4)$, $B(-2 \mid 2 \mid -9)$, $C(-2 \mid 7 \mid 9)$

A', B' und C' sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in E.

a) Bestimme die Bildpunkte A', B' und C'.

b) Bestimme die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und A'B'C'.

c) Bestimme den Winkel φ zwischen F und E_{ABC} und bestätige die Beziehung $F_{A'B'C'} = F_{ABC} \cdot \cos\varphi$.

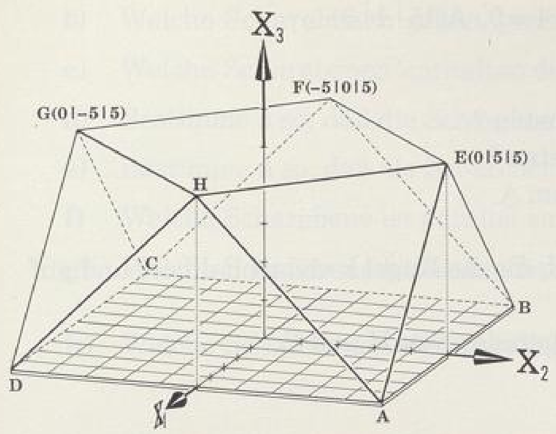
• **30.** Die sechs Punkte auf den Koordinatenachsen, die vom Ursprung die Entfernung k haben, bilden ein regelmäßiges Oktaeder.
Berechne alle Winkel zwischen den Kanten, zwischen den Flächen und zwischen den Kanten und Flächen.

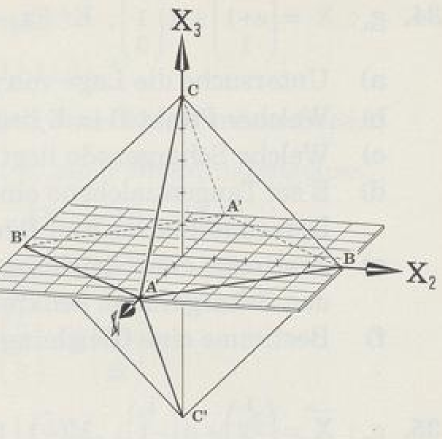
• **31.** Bei dem Quaderstumpf ABCDEFGH sind Grundfläche ABCD und Deckfläche EFGH quadratisch. Berechne den Winkel zwischen

a) den Seitenflächen HGF und HGD

b) den Flächen AHD und AFE

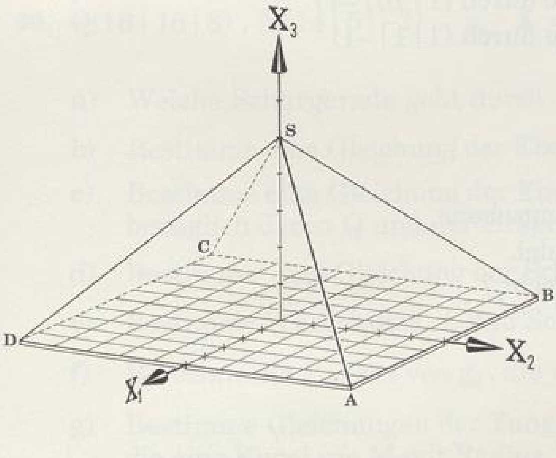
c) der Kante HD und der Deckfläche.

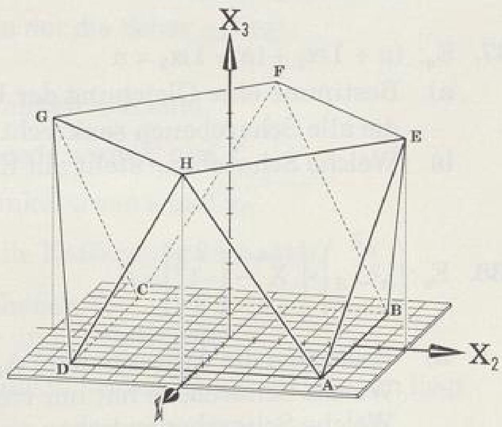




• **32.** ABCDS ist eine vierseitige gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Berechne den Winkel zwischen
a) Grund- und Seitenfläche
b) zwei Seitenflächen mit gemeinsamer Kante
c) zwei Seitenflächen ohne gemeinsame Kante.

⁝ **33.** Der Körper ABCDEFGH entsteht so: man verdreht zwei kongruente Quadrate 45° gegeneinander und verschiebt eines so weit nach oben, bis die Seitenkanten so lang sind wie die Quadratseiten.
a) Bestätige die Koordinaten von $H(5\sqrt{2}\,|\,0\,|\,5\sqrt{2\sqrt{2}})$.
b) Berechne den Winkel zwischen Grundfläche und einer Seitenfläche mit gemeinsamer Kante.
c) Berechne den Winkel zwischen zwei Dreieckflächen mit gemeinsamer Kante.





• **34.** $g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, E: $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4 = 0$, A(15 | 1 | 3)

a) Untersuche die Lage von g_a und E.

b) Welcher Punkt B in E liegt A am nächsten ?

c) Welche Schargerade liegt A am nächsten ?

d) E sei Tangentialebene einer Kugel k um A.
Berechne Radius und Berührpunkt.

e) Bestimme eine Gleichung der Ebene H, die die Kugel k von **d)** halbiert und auf den Schargeraden senkrecht steht.

f) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von H und E.

35. $g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, M(−1 | 0 | −1)

a) Beschreibe in Worten die Geradenschar und bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Schargeraden liegen.

b) Welche Schargerade geht durch M ?

•c) Welche Schargeraden berühren eine Kugel um M mit Radius 2 ?
Welche Schargeraden sind Sekanten der Kugel ?

d) Welche Schargeraden halbieren die Winkel der beiden Kugeltangenten g_0 und g_4 ?

•e) Welche Schargerade hat vom Ursprung den kleinsten,
welche den größten Abstand ?

• **36.** Bestimme von E_a: $x_1 + ax_2 + (a + 1)x_3 - 6 = 0$ die Büschelebenen,

a) die mit der x_1-Achse 45° einschließen

b) die mit der x_1x_2-Ebene 60° einschließen

c) die mit der x_2x_3-Ebene 30° einschließen

d) die 30° mit der Ursprungsgerade durch (−6 | 7 | 1) einschließen

e) die senkrecht sind zur Gerade durch (2 | 4 | 2) und (4 | 0 | 0)

f) die parallel sind zur Ursprungsgerade durch (1 | 10 | −7)

g) die parallel sind zur Ursprungsgerade durch (1 | 1 | −1)

h) die senkrecht auf E_0 stehen

i) die mit E_1 45° bilden.

• **37.** E_a: $(a + 1)x_1 + (a - 1)x_2 = a$

a) Bestimme eine Gleichung der Ursprungsebene,
die alle Scharebenen senkrecht schneidet.

b) Welche Scharebene steht auf E_t senkrecht ?

⁝ **38.** $E_a: \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 - a \\ a - 4 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$

a) Bestimme die Achsenpunkte A_1, A_2 und A_3 von E_a.
Welche Scharebene hat nur einen Achsenpunkt, wie liegt sie ?
Welche Scharebenen haben nur zwei Achsenpunkte, wie liegen sie ?

b) Welche Scharebenen gehen durch den Ursprung ?

c) Welche Scharebenen enthalten den Punkt $P(1\,|\,1\,|\,6)$?

d) Bestimme a so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenebene.

e) Bestimme a so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenachse.

f) Welche Scharebene ist parallel zu F: $x_1 + 3x_2 - 18x_3 + 10 = 0$?

g) Welche Scharebene ist senkrecht zu G: $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$?

h) Welche Scharebenen sind parallel zu g : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$?

i) Welche Scharebenen sind senkrecht zu S: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

j) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von E_2 und E_4.

• **39.** E: $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 42$, $\quad g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2-2a \\ a \end{pmatrix}$

a) In welchem Punkt schneiden sich die Ebene E und die Schar g_a ?

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene F, in der die Schar g_a liegt.

c) Bestimme den Schnittwinkel φ und eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F.

d) Bestimme Gleichungen der senkrechten Projektionen von g_{-2} und g_2 in E.

e) Welche Schargerade ist identisch mit ihrem Spiegelbild bezüglich E ?

:f) E ist Symmetrieebene der Schargeraden g_a und $g_{a'}$.
Drücke a' mit a aus.

• **40.** $Q(16\,|\,16\,|\,8)$, $M(14\,|\,5\,|\,-2)$ $\quad g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Welche Schargerade geht durch Q ?

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Schar g_a liegt.

c) Bestimme eine Gleichung der Ebene F,
bezüglich deren Q und der Ursprung symmetrisch sind.

d) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F.

e) Bestimme Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ von s und g_0.

f) Berechne die Punkte von g_0, die von M die Entfernung 15 haben.

g) Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen T,
die eine Kugel um M mit Radius 15 in Q und O berühren.

h) Bestimme eine Gleichung der Gerade t, die in beiden Tangentialebenen liegt.

i) Berechne den Abstand d von t und g_0.

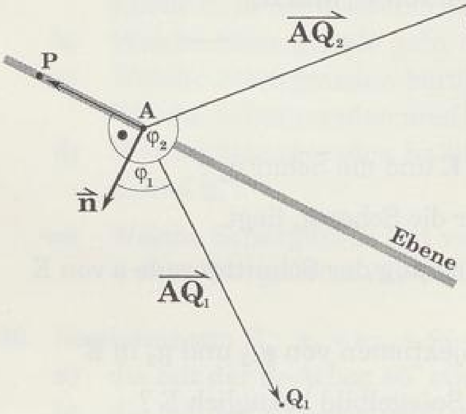
2. Hesse-Form der Ebenengleichung

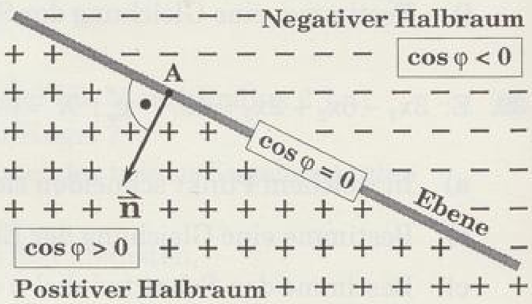
Ist P ein Punkt der Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$, dann erfüllen seine Koordinaten die Gleichung und es gilt $E(P) = 2p_1 - 2p_2 + p_3 + 6 = 0$.
Liegt ein Punkt Q nicht in der Ebene E, dann ergibt sich für E(Q) eine positive oder negative Zahl.

Beispiel: $P(2\,|\,2\,|\,-6)$, $\quad E(P) = 4 - 4 - 6 + 6 = 0$
$Q_1(3\,|\,-2\,|\,2)$, $\quad E(Q_1) = 6 + 4 + 2 + 6 = 18$
$Q_2(-8\,|\,6\,|\,-5)$, $\quad E(Q_2) = -16 - 12 - 5 - 6 = -27$

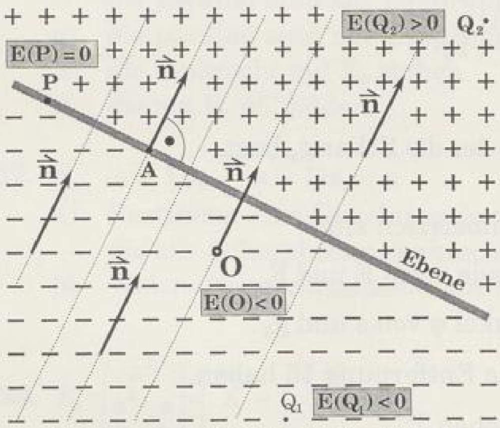
Um die Bedeutung des Vorzeichens zu verstehen, betrachten wir die vektorielle Normalform der Ebenengleichung:

$$E:\quad \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$
$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$
$$E(X) = n \cdot \overline{AX} \cdot \cos\varphi, \text{ wobei } \varphi = \sphericalangle(\vec{n}, \overrightarrow{AX}) \text{ ist.}$$





cos φ legt das Vorzeichen von E(X) fest. Die Ebene E teilt den Raum in zwei Halbräume: Liegt Q in dem Halbraum, in den der Normalvektor zeigt, dann ist φ spitz, cos φ also positiv. Diesen Halbraum nennen wir positiven Halbraum.



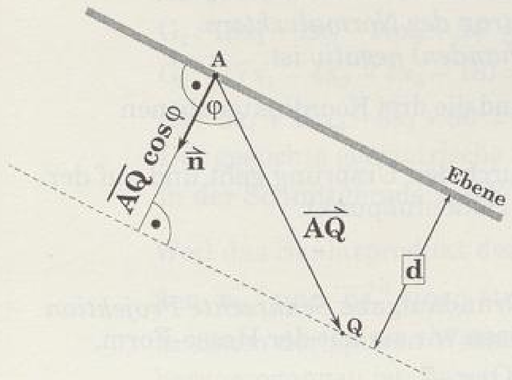
Ebene ist richtig orientiert

Unterscheidet man zwischen positivem und negativem Halbraum, dann nennt man die Ebene **orientiert**.

Enthält die Ebene E den Ursprung nicht, dann orientiert man sie gewöhnlich so, daß der Ursprung im negativen Halbraum liegt, das heißt $E(O) < 0$. In der Ebenengleichung E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ ist $E(O) = n_0$. Ist also n_0 negativ, so ist die Ebene schon *richtig* orientiert. Ist n_0 positiv, so orientiert man die Ebene um, indem man ihre Gleichung mit -1 multipliziert.

Bei einer richtig orientierten Ebene weist der Normalvektor von der Ebene aus in den Halbraum, in dem der Ursprung nicht liegt – oder anders ausgedrückt – zeigt der Normalvektor vom Ursprung zur Ebene. Geht die Ebene durch den Ursprung, so sind beide Orientierungen richtig, das heißt gleichberechtigt.

Die Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$ ist noch nicht richtig orientiert. Durch Multiplikation mit -1 orientieren wir sie um: E: $-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$. Jetzt gilt $E(O) = -6 < 0$, $E(Q_1) = -18$ und $E(Q_2) = 27$. Q_1 und Q_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene, Q_1 und der Ursprung liegen auf derselben Seite.



Wir kennen jetzt die Bedeutung des Vorzeichens von $E(Q)$ – was aber bedeutet der Betrag $|E(Q)|$?

$|E(Q)| = |\vec{n} \circ \overrightarrow{AQ}| = n \cdot \overline{AQ} \cdot |\cos\varphi|$. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$\overline{AQ} \cdot |\cos\varphi| = d$, das ist der Abstand von Punkt und Ebene. $|E(Q)| = n \cdot d$ ist also das Produkt des Abstands Punkt-Ebene und der Länge des Normalvektors.

Der Mathematiker Ludwig Otto HESSE (Königsberg 1811 bis 1874 München) hat vorgeschlagen, als Normalvektor in der richtig orientierten Ebenengleichung einen Einheitsvektor $\vec{n}^{\,0}$ zu verwenden. Setzt man in seine Ebenengleichung einen Punkt ein, so ergibt sich sofort der Abstand von Punkt und Ebene (bis aufs Vorzeichen). HESSE zu Ehren nennt man diese Form der Ebenengleichung **Hesse-Form** E_H; den zugehörigen Vektor $\vec{n}^{\,0}$ nennen wir kurz **Hesse-Vektor**.

Beispiel: E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = 3$

Umorientierung E: $-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$

Normierung $E_H: -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2 = 0$, $\vec{n}^{\,0} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Punkte einsetzen $E_H(O) = -2$, E und O haben den Abstand 2

$E_H(Q_1) = -6$, E und Q_1 haben den Abstand 6

$E_H(Q_2) = 9$, E und Q_2 haben den Abstand 9

Zusammenfassung

Von E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ ist

$$E_H: \frac{-\operatorname{sgn}(n_0)}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$$

mit $n_0 \neq 0$ und $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

die **Hesse-Form** der Ebene E.

Ist $n_0 = 0$, dann sind $\pm\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$ die beiden Hesse-Formen der Ebene E.

Abstand Punkt-Ebene: $d(Q,E) = |E_H(Q)|$

Erzeugung der Hesse-Form aus der allgemeinen Normalform in der Praxis:
Dividiere die Ebenengleichung durch den Betrag des Normalvektors.
Richte die Vorzeichen so ein, daß n_0 (falls vorhanden) negativ ist.

1. Beispiel: Die Ebene E: $2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 49 = 0$ und die drei Koordinatenebenen begrenzen ein Tetraeder.
Gesucht ist die Länge der Höhe, die durch den Ursprung geht und auf der Gegenfläche senkrecht steht, und der Höhenfußpunkt.

In dieser Aufgabe versteckt sich die Grundaufgabe *Senkrechte Projektion eines Punkts in eine Ebene.* Diesmal lösen wir sie mit der Hesse-Form.

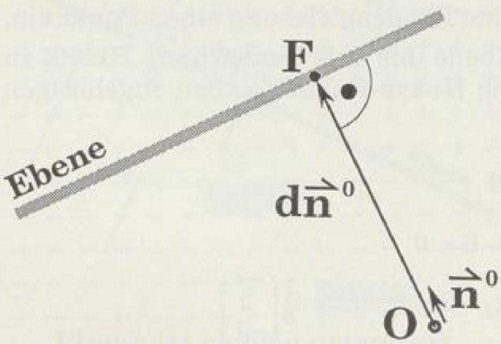
E_H: $-\frac{1}{7}(2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 49) = 0$, $E_H(O) = -7$,

Ebene und Ursprung haben den Abstand d = 7, und das ist die gesuchte Länge der Höhe.

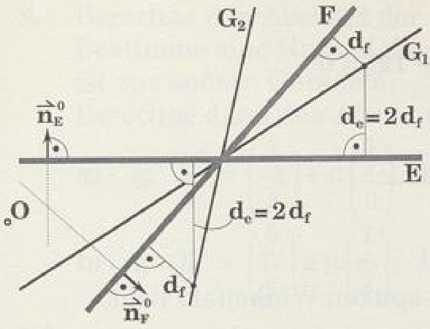
Um O in E zu projizieren, tragen wir den Hesse-Vektor $\overrightarrow{n}^0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\-6\\-3\end{pmatrix}$

7mal von O aus ab und treffen auf den gesuchten Fußpunkt F:

$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{O} + 7\overrightarrow{n}^0 = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-3\end{pmatrix}$, F(−2|−6|−3)



2. Beispiel: Gesucht ist der geometrische Ort G der Punkte, die von der Ebene E: $7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18 = 0$ den doppelten Abstand haben wie von der Ebene F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 12 = 0$.



$E_H: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = 0,\ F_H: \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) = 0$

Für die gesuchten Punkte X gilt: $|E_H(X)| = 2 \cdot |F_H(X)|$,

das heißt: $G_1: E_H(X) = 2 \cdot F_H(X)$ oder $G_2: E_H(X) = -2 \cdot F_H(X)$

$G_1: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = \frac{2}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) \,||\, \cdot 9$

$G_1: 19x_1 + 2x_2 - 16x_3 + 54 = 0$

$G_2: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = -\frac{2}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) \,||\, \cdot 9$

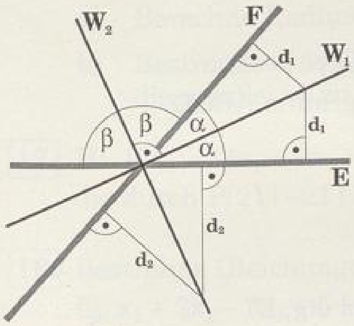
$G_2: 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 90 = 0$

Der gesuchte geometrische Ort besteht aus zwei Ebenen G_1 und G_2, die sich in der Schnittgerade von E und F treffen.

Weil das Skalarprodukt der Hessevektoren $\overrightarrow{n_E}^{\,0}$ und $\overrightarrow{n_F}^{\,0}$ negativ ist, schließen $\overrightarrow{n_E}^{\,0}$ und $\overrightarrow{n_F}^{\,0}$ einen stumpfen Winkel ein, das heißt, der Ursprung liegt in einem der spitzen Winkelfelder von E und F. Weil G_1 aus $E_H(X) = 2 \cdot F_H(X)$ hervorgegangen ist, liegen die Punkte von G_1 in den Winkelfeldern, in denen sich die beiden positiven beziehungsweise negativen Halbräume überlappen. G_1 und O liegen also im selben Winkelfeld.

Winkelhalbierende Ebenen

Wichtiger Sonderfall der Aufgabe aus dem letzten Beispiel:
Gesucht ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Ebenen E und F denselben Abstand haben.
Er besteht aus den beiden winkelhalbierenden Ebenen W_1 und W_2.
Für die gesuchten Punkte X gilt: $|E_H(X)| = |F_H(X)|$, das heißt,
$W_1: E_H(X) = F_H(X)$ oder $W_2: E_H(X) = -F_H(X)$, anders geschrieben
$W_1: E_H(X) - F_H(X) = 0$ oder $W_2: E_H(X) + F_H(X) = 0$.



Für die Ebenen E und F des letzten Beispiels mit

$E_H: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = 0, \quad F_H: \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) = 0$

ergibt sich $W_1: 13x_1 - x_2 - 10x_3 + 18 = 0$

$W_2: x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 54 = 0$

Wie sichs gehört, stehen W_1 und W_2 aufeinander senkrecht:

$$\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Um zu entscheiden, welche winkelhalbierende Ebene im spitzen Winkelfeld liegt, berechnen wir den Winkel α zwischen E und W_1:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_E}|\,|\overrightarrow{n_1}|} = \frac{135}{9\sqrt{270}} = \frac{5}{\sqrt{30}}, \qquad \alpha = 24{,}1^\circ$$

und den Winkel β zwischen F und W_2: $\beta = 90^\circ - \alpha = 65{,}9^\circ$.

Also halbiert W_1 das spitze und W_2 das stumpfe Winkelfeld von E und F.

Aufgaben

1. Gib die Hesse-Form an

a) $7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54 = 0$ b) $6x_1 + 8x_3 = -50$

c) $15x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0$ d) $3x_3 = 3$

e) $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$ f) $x_1 = 0$

2. Gib die Hesse-Form der Ebene E an, die durch A(1 | 1 | 5) , B(9 | 1 | 1) und C(11 | 4 | –1) geht.

3. Welchen Abstand haben der Ursprung, A(12 | 2 | –2) , B(1 | 0 | –2) und C(–9 | 1 | 2) von der Ebene E: $x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 9$?

4. Welchen Abstand haben der Ursprung, A(1 | –2 | 2) und B(1 | 1 | –1) von der Ebene E:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

5. E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = 0$

F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$

G: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$

H: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 12 = 0$

Zeichne den Ursprung, die Ebenen E bis H (als Strecken) mit den richtigen Abständen, die Normal- und Hesse-Vektoren von E bis H mit den richtigen Längen, Maßstab: 1≙ 0,5cm.

6. A(1 | 0 | –2) , B(–1 | 4 | –2) , C(0 | 6 | 0) , D(? | ? | ?) , S(3 | 3 | –3)

Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche das Parallelogramm ABCD.

a) Berechne die Länge der Höhe h.

b) Berechne das Volumen der Pyramide.

7. E: $11x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 75 = 0$, g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Zeige, daß E und g parallel sind, und berechne den Abstand d(g, E).

8. Berechne den Abstand der windschiefen Geraden so:
Bestimme eine Normalgleichung der Ebene E, die die Gerade g enthält und parallel ist zur andern Gerade h.
Berechne dann den Abstand, den irgendein Punkt von h und die Ebene E haben.

a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\5\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\17\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\9\\16\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix}$

9. Stelle Gleichungen der Ebenen auf,
die von E: $6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 55 = 0$ den Abstand 33 haben.

10. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte,
die von der Ebene E: $7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 7$ den Abstand 1 haben.

11. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die in der Ebene E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12$ liegen und von der Ebene F: $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ den Abstand 3 haben.

12. E: $15x_1 + 12x_2 - 16x_3 = 15$, F: $-9x_1 + 12x_2 - 20x_3 = 35$
Welche Punkte der x_3-Achse haben von E und F denselben Abstand ?

• **13.** E: $6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 11$, g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}39\\61\\-23\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}13\\20\\-8\end{pmatrix}$

Eine Kugel K mit Radius 22 bewegt sich so, daß ihr Mittelpunkt auf g wandert.

a) In welchen Punkten berührt die Kugel die Ebene ?
Wo ist dann jeweils der Kugelmittelpunkt ?

b) Wo ist der Mittelpunkt des größten Schnittkreises von K und E ?

14. $g_\perp$ sei die senkrechte Projektion von g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-6\\2\\-8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}7\\2\\10\end{pmatrix}$
in die Ebene E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4 = 0$.
Bestimme den Schnittpunkt von g und $g_\perp$ und eine Gleichung von $g_\perp$.

15. Die Punkte P(13 | −6 | 6) und P' seien symmetrisch bezüglich
der Ebene E: $7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7 = 0$. Berechne P'.

16. T: $3x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0$ sei Tangentialebene einer Kugel K um M(7 | −1 | −12).

a) Berechne Radius und Berührpunkt von K.

b) Bestimme eine Gleichung der anderen Tangentialebene T' von K,
die parallel ist zu T.

17. H: $10x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 1$ halbiere die kleinste aller Kugeln,
die durch P(21 | −21 | 5) gehen. Berechne ihren Radius und Mittelpunkt.

18. Bestimme Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen von
E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5 = 0$ und F: $5x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 4 = 0$.

19. E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0$, F: $6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21 = 0$

a) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die von E und F denselben Abstand haben.

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstand von E halb so groß ist wie der von F.

20. E: $4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18 = 0$, F: $4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36 = 0$

a) Gib eine Gleichung der Ebene S an, die von E und F denselben Abstand hat.

b) Gib Gleichungen der Ebenen G und H an, deren Abstand von F doppelt so groß ist wie der von E.

c) Zeichne den Ursprung und die Ebenen E, F, S, G und H (als Strecken) mit den richtigen Abständen im Maßstab: $1 \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$.

• **21.** E: $3x_1 - 4x_3 = 0$, F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt in der von E und F gebildeten Rinne hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der x_3-Richtung).
Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

: **22.** E: $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$, F: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$, G: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4 = 0$
Eine Kugel vom Radius 3 liegt in dem von E, F und G gebildeten Pyramiden-Trichter (der Trichter enthält die positive x_3-Achse). Wo liegt ihr Mittelpunkt M ?

: **23.** E: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt auf der Ebene E hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der x_3-Richtung). Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der der Kugelmittelpunkt läuft, wenn er in $S(0 \mid 0 \mid m)$ startet.

3. Normalformen von Geraden

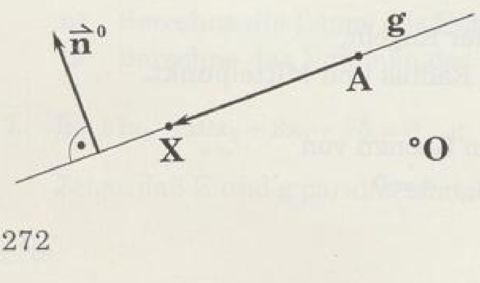
Für Geraden und Ebenen im Raum gibt es Parametergleichungen – eine Normalform aber ist nur bei Ebenen möglich, weil Geraden keine eindeutigen Normalrichtungen haben. Deshalb gibt es auch keine Hesse-Form von Geraden im Raum. In der Geometrie der Ebene ist das anders. Hier kann man der Gerade eine Normalrichtung genau so zuordnen wie einer Ebene im Raum. Mit zweidimensionalen Vektoren geschrieben sieht das so aus:

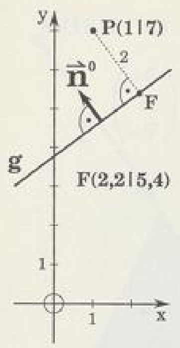
$$g\colon\quad \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$

$$n_x x + n_y y + n_0 = 0$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor und $A(a_x \mid a_y)$ ein Punkt der Gerade g.





Wie im Raum findet man die Hesse-Form durch Normieren und Orientieren:

$$g_H\text{: } \frac{-\operatorname{sgn}(n_0)}{n}(n_x x + n_y y + n_0) = 0$$

Wieder gilt für den Abstand Punkt-Gerade: $|g_H(X)| = d(P, g)$

Beispiel: Welchen Abstand haben $P(1|7)$ und $g\text{: } 3x - 4y + 15 = 0$?

$g_H\text{: } -\frac{1}{5}(3x - 4y + 15) = 0, \qquad g_H(P) = -\frac{1}{5}(-10) = 2$

P und g haben den Abstand 2, g liegt zwischen P und O.

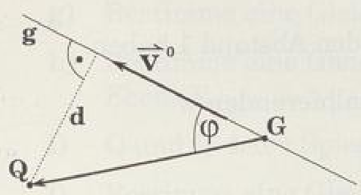
Subtrahiert man von $\vec{P}$ das 2fache des Hesse-Vektors, dann trifft man auf die senkrechte Projektion F von P auf g:

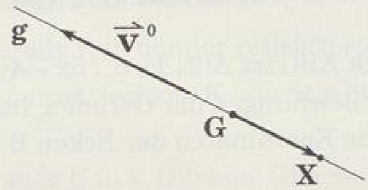
$$\vec{F} = \vec{P} - 2\left[-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}11/5\\27/5\end{pmatrix}, \quad F(2{,}2\,|\,5{,}4)$$

**** Plücker-Form**

Der Mathematiker Julius PLÜCKER (Elberfeld 1801 bis 1868 Bonn) hat eine Form der Gleichung einer Gerade g im Raum angegeben, bei der man ähnlich wie bei der Hesse-Form der Ebene durch Einsetzen eines Punkts Q gleich den Abstand d(Q, g) bekommt. Ist $\vec{v}^{\,0}$ ein Einheitsvektor in Geradenrichtung, so erfüllen die Punkte X der Gerade die (parameterlose!) Gleichung:

$g_P\text{: } \vec{v}^{\,0} \times \overrightarrow{GX} = \vec{o}$ Plücker-Form der Geradengleichung





Für den Abstand d(Q, g) Punkt-Gerade gilt dann: $\sin\varphi = \frac{d(Q, g)}{\overline{GQ}}$,

also $d(Q, g) = \overline{GQ}\sin\varphi = |\vec{v}^{\,0}| \cdot |\overrightarrow{GQ}| \cdot \sin\varphi = |\vec{v}^{\,0} \times \overrightarrow{GQ}| =: |g_P(Q)|$

Beispiel: Welchen Abstand haben Q(0 | −2 | 1) und g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$?

$$\overrightarrow{v}^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}, \quad g_P: \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x_1-5\\x_2-2\\x_3-6\end{pmatrix} = \overrightarrow{o}$$

$$d(Q, G) = \left|\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\-4\\-5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{17}}\left|\begin{pmatrix}22\\-5\\-18\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{17}}\sqrt{833} = \sqrt{49} = 7$$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Gib die Hesse-Form der Geraden a bis f an

a) a: $-3x + 4y + 15 = 0$ **b)** b: $x + y = 1$ **c)** c: $-2y = 0$

d) d: $x + 0{,}75y = 0{,}25$ **e)** e: $y = mx + t$ **f)** f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$, A(0,5 | −3,5)

a) Berechne den Abstand von A und g.

b) Berechne die Gleichung der Lotgerade von g durch A.

c) Berechne den Lotfußpunkt F von **b)** und die Länge des Lots $\overline{AF}$.

$\boxed{3.}$ **a)** Berechne den Abstand von Ursprung und Gerade g: $3x + 4y = 12$.

b) Berechne den Abstand von b: $3x + 4y = 24$, c: $3x + 4y + 24 = 0$ und d: $6x + 8y = 24$.

4. Bestimme eine Gleichung der Gerade h durch H(3 | −4) parallel zur Gerade g: $3x = 5(y + 1)$.

5. Bestimme eine Gleichung der Gerade, die durch G(−12 | 5) geht und vom Ursprung den Abstand 13 hat.

6. Bestimme Gleichungen der Geraden p und q, die von der Gerade g: $3x + 4y + 12 = 0$ den Abstand 0,5 haben.

7. Gib die Punkte auf h: $y = x + 2$ an, die von g: $-3x + 4y = 3$ den Abstand 1 haben.

• **8.** Gib die Punkte an, die von g: $x + 7y = 0$ und der Winkelhalbierenden w des 1. Quadranten jeweils den Abstand $\sqrt{50}$ haben.

9. In einem Dreieck ABC ist A(2 | 1), h_c: $5x - 4y = 7$ und h_b: $3x + 4y = 11$.

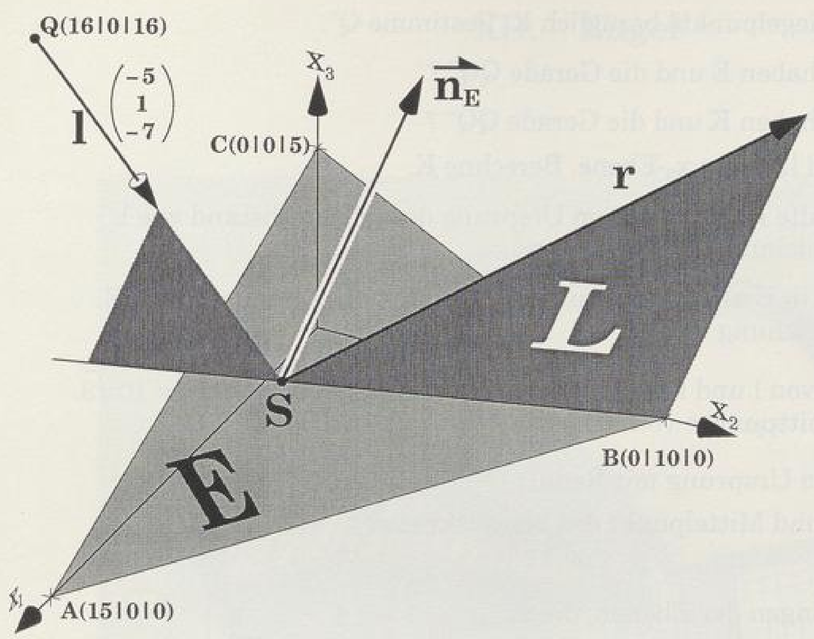
a) Bestimme Gleichungen der Geraden, in denen die Seiten liegen.

b) Berechne die Koordinaten der Ecken B und C.

10. g: $x + y = 2$, h: $7x + y + 7 = 0$

a) Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von g und h.

a) Bestimme Gleichungen der Geraden, deren Punkte jeweils von h einen dreimal so großen Abstand haben wie von g.



11. Im ersten Oktanten liegt eine ebene, dreieckige, spiegelnde Glasscheibe ABC. Von Q aus trifft ein Laserstrahl l auf die Glasscherbe (siehe Bild).

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Spiegelfläche liegt.

b) Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E.

c) Berechne den Winkel φ zwischen Laserstrahl l und E.
Berechne den Einfallswinkel α.

d) In welchem Punkt S trifft der Strahl aufs Glas ?

e) Bestimme eine Gleichung des Einfallslots e.

f) L sei die Ebene, in der der ein- und ausfallende Strahl liegen.
Bestimme eine Gleichung von L.

g) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und L.

h) Bestimme eine Gleichung der senkrechten Projektion $l_\perp$ von Strahl l in die Ebene E.

i) Q und Q' seien Spiegelpunkte bezüglich E. Bestimme Q'.

j) Bestimme eine Gleichung der Gerade r, in der der reflektierte Strahl liegt.

k) Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene K von Strahl l und reflektiertem Strahl r.

l) Die Symmetrieebene von **k)** schneide E in s. Gib eine Gleichung von s an.

m) Welchen Winkel schließen $l_\perp$ und s ein ?

n) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade n von L und K.

o) Welchen Winkel schließen n und $l_\perp$, n und s ein ?

p) Q und Q'' seien Spiegelpunkte bezüglich K. Bestimme Q''.

q) Welchen Abstand haben E und die Gerade QQ'' ?

r) Welchen Abstand haben K und die Gerade QQ'' ?

s) U liege in E, K und in der x_1x_2-Ebene. Berechne K.

t) Die Ebene H enthalte l und habe vom Ursprung denselben Abstand wie l. Bestimme eine Gleichung von H.

u) Die Gerade g liege in E und habe vom Ursprung denselben Abstand wie E. Bestimme eine Gleichung von g.

v) Der Schnittpunkt von l und r sei Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $10\sqrt{3}$. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Geradenkreuzung.

w) Eine Kugel um den Ursprung mit Radius $\frac{50}{7}$ schneide E. Berechne Radius und Mittelpunkt des Schnittkreises.

12. a) Bestimme Gleichungen der Ebenen, die zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel sind und vom Punkt $Q(0 \mid 0 \mid 7)$ den Abstand 3 haben.

b) g_c sind Ursprungsgeraden durch $(1 \mid -1 \mid c)$. Welche Gerade schneidet die Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 16 = 0$ nicht ? Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen der Richtung von g_c und den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$?

c) Die Ebene F enthalte die x_3-Achse und die Geradenschar g_c von **b)**. Bestimme eine Gleichung von F.

d) E und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide P.
- α) Berechne das Volumen von P.
- β) Berechne die Oberfläche von P.
- γ) Zeige, daß F Symmetrieebene von P ist.
- δ) Prüfe, ob $S(3 \mid -3 \mid 3)$ und $T(3 \mid -3 \mid 5)$ in der Pyramide liegen.
- ε) Es gibt eine Kugel in P, die alle vier Seitenflächen berührt. Berechne Radius und Mittelpunkt dieser Kugel.

e) Welche Schargeraden von g_c berühren eine Kugel um $M(2 \mid -2 \mid 2)$ mit Radius 2 ? Berechne die Berührpunkte.