Anschauliche analytische Geometrie

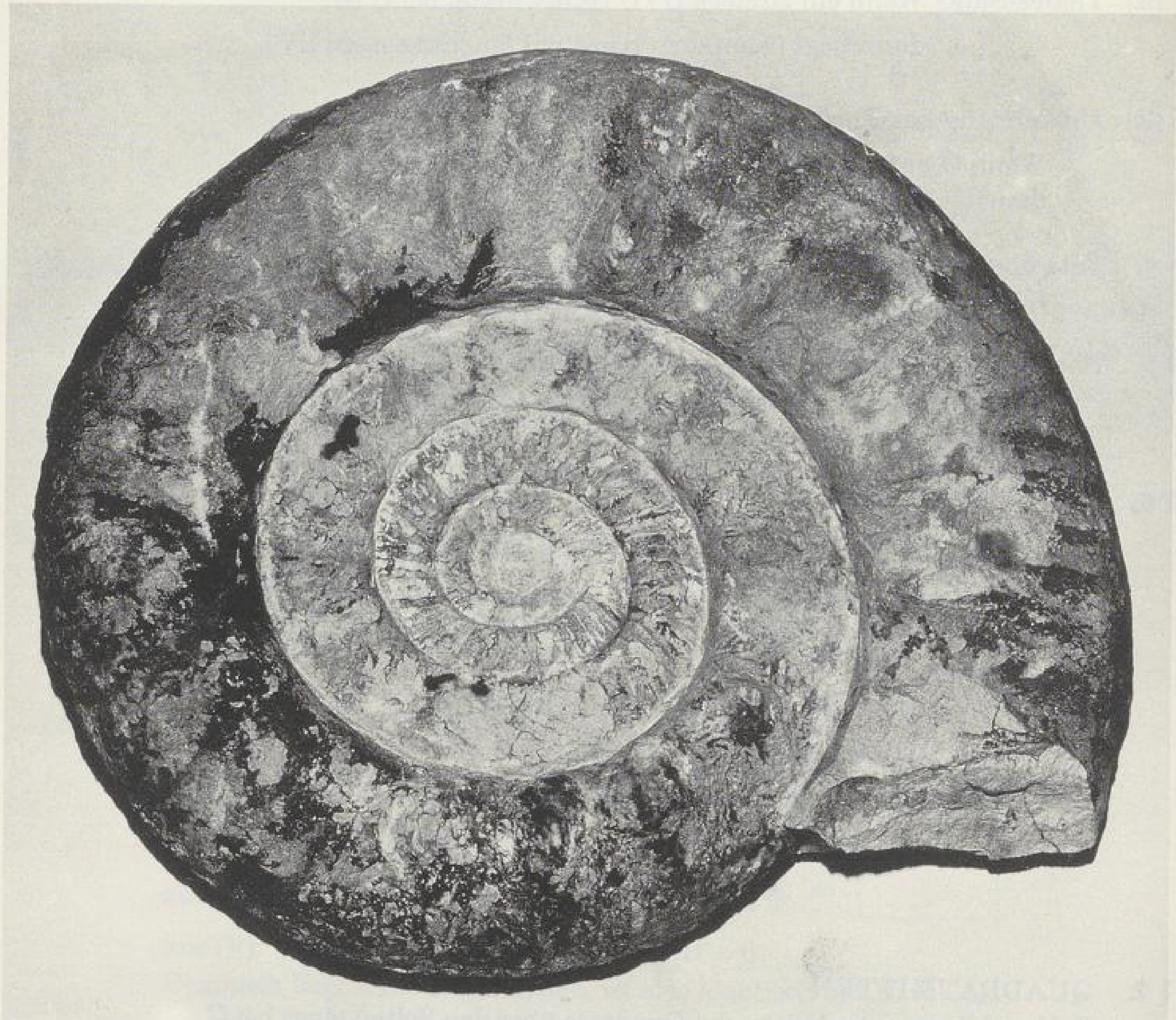
Barth, Elisabeth

München, 2000

X. Vektorprodukt

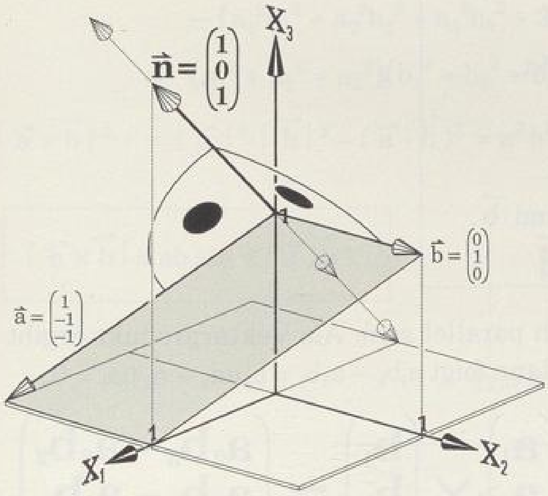
urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

*X. Vektorprodukt



1. Normalvektor und Parallelogrammfläche

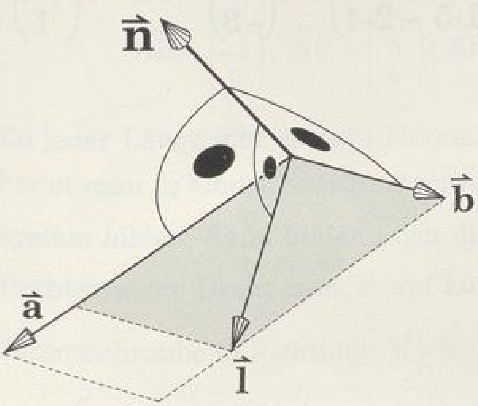
Zwei nichtparallele Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf. $\vec{n}$ sei ein Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, also auch auf der Ebene senkrecht steht, in der das Parallelogramm liegt. Dieser Normalvektor $\vec{n}$ liegt bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig fest. Solche Normalvektoren sind in der Geometrie und in vielen Anwendungen der Physik, der Elektrotechnik und des Maschinenbaus sehr gefragt. Man hat deshalb eine Formel entwickelt, die zu gegebenem $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ schnell einen Normalvektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ liefert. Um sie herzuleiten, könnte man das 2,3-System $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$, $\vec{n} \circ \vec{b} = 0$ lösen.



Schneller gehts mit einem kleinen Trick: $\vec{n}$ steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht, also auch auf jeder Linearkombination $\vec{l}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $\vec{l}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind komplanar, also gilt

$\det(\vec{l}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$, also $\begin{vmatrix} l_1 & a_1 & b_1 \\ l_2 & a_2 & b_2 \\ l_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$, entwickelt nach der ersten Spalte

$$l_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + l_2(-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + l_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$



Diese Zeile deuten wir als Skalarprodukt orthogonaler Vektoren

$\vec{1} \circ \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = 0$ und nehmen den zweiten Vektor als Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Wie wir gleich sehen werden, hat $\vec{n}$ Eigenschaften, die an ein Produkt erinnern, in dem $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Faktoren sind. Deshalb die

> **Definition**
>
> Zu zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißt das Produkt
>
> $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$
>
> **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
> (sprich a kreuz b)

Nach dieser Definition dürfen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auch parallel sein. Als Vektorprodukt ergibt sich dann der Nullvektor. Ist nämlich $b_i = \mu a_i$, dann folgt $a_ib_k - a_kb_i = a_i\,\mu a_k - a_k\,\mu a_i = 0$.

Die Koordinaten von $\vec{a} \times \vec{b}$ sehen etwas kompliziert aus, lassen sich aber über eine Eselsbrücke leicht berechnen. Man schreibt die ersten beiden Zeilen des Produkts noch einmal unter das Produkt.

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \mathbf{a_2b_3 - a_3b_2} \\ \mathbf{a_3b_1 - a_1b_3} \\ \mathbf{a_1b_2 - a_2b_1} \end{pmatrix} \\ a_1 & & b_1 & & + \\ a_2 & & b_2 & & - \end{array}$$

Die i-te Koordinate ergibt sich, wenn man bei den (Vektor-) Faktoren die i-te Zeile streicht und die Determinante aus den beiden folgenden Zeilen berechnet.

$$\begin{array}{ccccccccc} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \mathbf{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5} \\ \mathbf{3 \cdot 4 - 1 \cdot 6} \\ \mathbf{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} & = & \mathbf{-3} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ 1 & & 4 & & & & & & \\ 2 & & 5 & & & & & & \end{array}$$

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

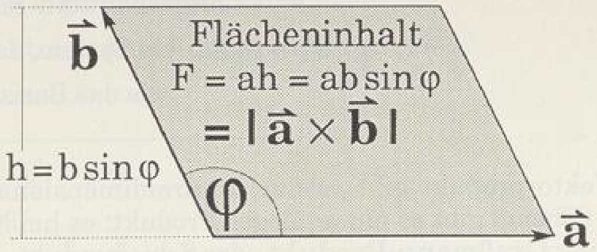
Geometrische Eigenschaften

Jedes Vielfache des Normalvektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ist auch ein Normalvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Die Länge $|\vec{a} \times \vec{b}|$ hat eine bemerkenswerte geometrische Bedeutung; das erkennt man nur mit trickreicher Algebra:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\
&\quad - 2(a_2b_3a_3b_2 + a_3b_1a_1b_3 + a_1b_2a_2b_1) \\
&\quad + \mathit{a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2)} \quad \textit{(Trick!)} \\
&= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\quad - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_2b_3a_3b_2 + 2a_3b_1a_1b_3 + 2a_1b_2a_2b_1) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2
\end{aligned}
$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \circ \vec{b})^2 = a^2b^2 - (ab\cos\varphi)^2 = a^2b^2(1 - (\cos\varphi)^2) = a^2b^2(\sin\varphi)^2$$

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})}$$



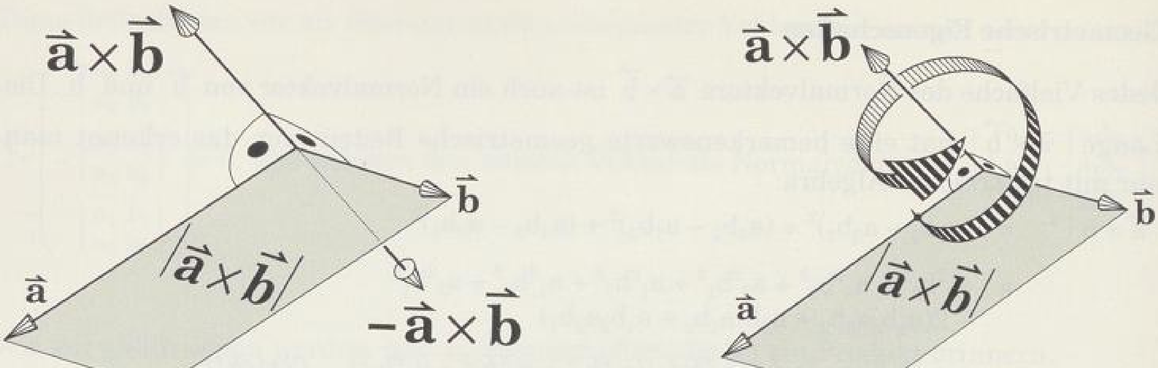
Die Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Das ist eine anschauliche Erklärung dafür, daß das Kreuzprodukt paralleler Vektoren den Nullvektor ergibt; das zugehörige, zu einer Strecke entartete Parallelogramm hat den Flächeninhalt 0.

Auch der Flächeninhalt eines Dreiecks läßt sich jetzt einfach übers Kreuzprodukt der Vektoren berechnen, die es aufspannen: $\boxed{F_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$

Beispiel: $A(1|0|1)$, $B(2|-3|1)$, $C(0|0|5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-4\\-3\end{pmatrix};\quad F_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-12\\-4\\-3\end{pmatrix}\right| = \frac{13}{2}$$

Zu jeder Länge gibt es zwei Normalvektoren von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $k\,\vec{a} \times \vec{b}$ und $-k\,\vec{a} \times \vec{b}$. Arbeitet man in einem Koordinatensystem, dessen Basisvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ ein Rechtssystem bilden, dann bilden auch die nichtparallelen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem: Dreht man $\vec{a}$ auf kürzestem Weg in die Richtung $\vec{b}$, so bohrt sich eine Rechtsschraube in Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$. Insbesondere gilt: $\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{e_3}$.



Zusammenfassung

> Für nichtparallele Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist:
> $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$,
> $|\vec{a} \times \vec{b}|$ der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms,
> $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ein System, das so orientiert ist wie das Basissystem $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Das Vektorprodukt gibt es nur im dreidimensionalen Raum. Im zweidimensionalen Raum (Ebene) gibt es ein analoges Produkt; es heißt nach einem der Väter der Vektorrechnung **Graßmann-Produkt** oder Schiefprodukt. Man definiert:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \det(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Auch für $\vec{a} \wedge \vec{b}$ (sprich a schief b) gilt

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Flächeninhalt des Parallelogramms, das von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannt ist.}$$

Begründung: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Produkteigenschaften von $\vec{a} \times \vec{b}$

Die Bezeichnung Produkt beruht vor allem auf der Gültigkeit des **Distributivgesetzes**. Wie eine mühsame Koordinatenrechnung zeigt, gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Von den andern Produkteigenschaften bleibt kaum was übrig.
Beim Vertauschen der Faktoren ändert sich das Vorzeichen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a} \qquad \textbf{Anti-Kommutativgesetz}$$

Das **Assoziativgesetz** gilt überhaupt nicht, wie man schon an einem Zahlenbeispiel sieht:

$$\left[\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-12\\-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-4\\-8\end{pmatrix}$$

Zahlenfaktoren lassen sich allerdings beliebig ausklammern:

$$(\mu\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\mu\vec{b})=\mu(\vec{a}\times\vec{b})$$

Ein neutrales Element kann es nicht geben, weil der Produktvektor senkrecht auf den beiden Faktoren steht und deswegen nicht mit einem der beiden identisch sein kann. Weil es kein neutrales Element gibt, ist auch die Division nicht sinnvoll.

Das letzte Beispiel hat gezeigt, daß das Assoziativgesetz nicht gilt. GRAßMANN hat eine Beziehung gefunden, die das Produkt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ mit dem Skalarprodukt und der S-Multiplikation ausdrückt. Diese Beziehung heißt auch **Graßmann-Identität**

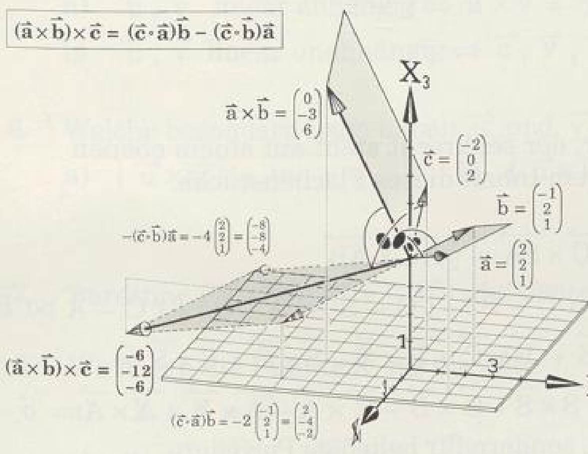
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\circ\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\circ\vec{b})\,\vec{c}\qquad(*)$$

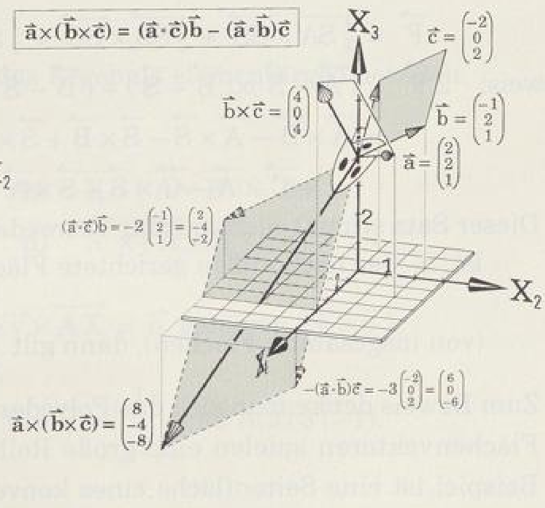
Nach Umstellung und Umbenennung ergibt sich der Reihe nach

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{a}\circ\vec{b})\,\vec{c}-(\vec{a}\circ\vec{c})\,\vec{b}\qquad\text{(Anti-Kommutativgesetz)}$$

$$\begin{matrix}\downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{matrix}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{c}\circ\vec{a})\,\vec{b}-(\vec{c}\circ\vec{b})\,\vec{a}\qquad(\bullet)$$





Der Vergleich von $(*)$ und $(\bullet)$ zeigt, daß das Assoziativgesetz nicht gilt.

Zum Beweis von (*) überlegt man sich, daß der Vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ senkrecht auf dem Lot von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht, also eine Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sein muß:

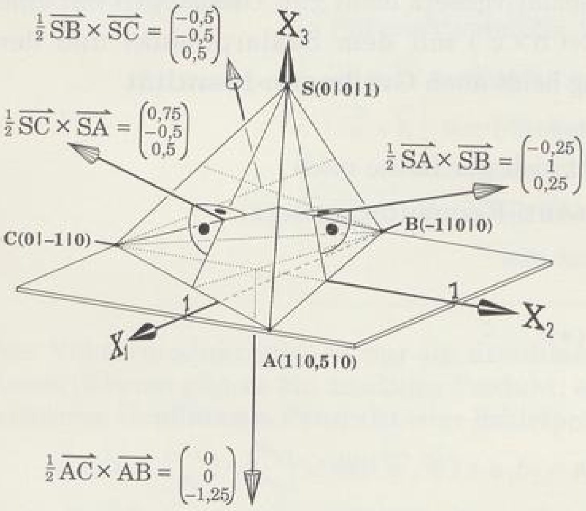
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} \quad \Big\| \circ\vec{a}$$
$$0 = \lambda\vec{a}\circ\vec{b} + \mu\vec{a}\circ\vec{c}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $\lambda = \vec{a}\circ\vec{c}$, $\mu = -\vec{a}\circ\vec{b}$. Damit gilt

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = k[(\vec{a}\circ\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c}]$. Die Koordinatenrechnung zeigt: $k = 1$.

Als Anwendung beweisen wir einen Satz aus der Raumgeometrie:

In jedem Tetraeder ist die Summe der nach außen gerichteten Flächenvektoren gleich dem Nullvektor.



Mit *Flächenvektor* meint man einen Vektor, der senkrecht steht auf einem ebenen Flächenstück und dessen Länge gleich ist dem Inhalt dieses Flächenstücks.

$$\vec{F} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{SB}\times\overrightarrow{SC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{SC}\times\overrightarrow{SA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$$

Beweis: $2\vec{F} = (\vec{A}-\vec{S})\times(\vec{B}-\vec{S}) + (\vec{B}-\vec{S})\times(\vec{C}-\vec{S}) + (\vec{C}-\vec{S})\times(\vec{A}-\vec{S}) + (\vec{C}-\vec{A})\times(\vec{B}-\vec{A}$

$$= \vec{A}\times\vec{B} - \vec{A}\times\vec{S} - \vec{S}\times\vec{B} + \vec{S}\times\vec{S} + \vec{B}\times\vec{C} - \vec{B}\times\vec{S} - \vec{S}\times\vec{C} + \vec{S}\times\vec{S} +$$
$$+ \vec{C}\times\vec{A} - \vec{C}\times\vec{S} - \vec{S}\times\vec{A} + \vec{S}\times\vec{S} + \vec{C}\times\vec{B} - \vec{C}\times\vec{A} - \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{A} = \vec{o}$$

Dieser Satz stimmt nicht nur für Tetraeder, sondern für beliebige Polyeder:

Ist $\vec{n_i}$ der nach außen gerichtete Flächenvektor der i-ten Fläche

(von insgesamt k Flächen), dann gilt $\sum_{i=1}^{k}\vec{n_i} = \vec{o}$.

Zum Beweis denke man sich das Polyeder in lauter Tetraeder zerlegt.

Flächenvektoren spielen eine große Rolle in der grafischen Datenverarbeitung. Zum Beispiel ist eine Seitenfläche eines konvexen Vielflachs genau dann unsichtbar, wenn ihr Flächenvektor mit dem Blickvektor $\overrightarrow{OA_{uge}}$ einen stumpfen Winkel einschließt.

Aufgaben

1. Berechne

a) $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10\\11\\12\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}5\\-15\\25\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\12\\-16\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}5\\-15\\25\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-12\\20\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}a\\a+1\\a+2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a+3\\a+4\\a+5\end{pmatrix}$

2. Berechne mit dem Vektorprodukt einen Normalvektor der Ebene:

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}17\\-21\\13\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ b) $\vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}-7\\1\\-7\end{pmatrix}$

3. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$

a) Berechne $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ und $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

b) Stelle $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

4. Bestätige für $\vec{a} = \begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-20\\5\end{pmatrix}$ die Beziehung $(\vec{a}\circ\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = a^2b^2$.

• 5. Zeige:

a) $\vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig $\Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \vec{o}$.

b) $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ linear unabhängig.

• 6. Welche besondere Lage haben $\vec{u}$ und $\vec{v}$, wenn gilt:

a) $|\vec{u}\times\vec{v}| = uv$ b) $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}\circ\vec{v}|$

• 7. Berechne $(\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{v}-\vec{w})$ und deute das Ergebnis elementargeometrisch.

• 8. Wo liegen die Punkte X, für die gilt:

a) $\vec{X}\times\vec{A} = \vec{o}$ b) $\vec{X}\circ(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

c) $2|\vec{X}\times\vec{A}| = |\vec{X}| = |\vec{A}| = 1$ d) $\vec{X}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{o}$

9. Zeige: Die Punkte X, die der Gleichung $\vec{v}\times\overrightarrow{AX} = \vec{o}$ genügen ($\vec{v}\neq\vec{o}$), bilden eine Gerade g.

Stelle eine Parametergleichung von g auf für $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ und A(2 | 3 | −1).

10. Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD

a) A(0 | 0 | 0) , B(1 | 0 | −3) , C(−4 | 6 | −1)

b) A(1 | 0 | −1) , B(1 | −3 | 3) , C(5 | 3 | 2)

11. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC

a) A(−2 | 2 | −3) , B(0 | 0 | 0) , C(3 | −2 | 0)

b) A(3 | 2 | 1) , B(5 | −2 | 1) , C(7 | −2 | −5)

12. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -25 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bestimme den Abstand von Punkt P(1 | 1 | 1) und Gerade g, indem du den Flächeninhalt eines geeigneten Dreiecks GHP (G und H liegen auf g) und die zugehörige Höhe h berechnest.

13. Zeige: Der Abstand d eines Punkts P und einer Gerade AB errechnet sich

mit der Formel $d = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{\overline{AB}}$.

Berechne mit dieser Formel den Abstand von Ursprung und g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

14. Zeige: Der Abstand d der Parallelen g: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \lambda \overrightarrow{u}$ und

h: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{H} + \mu \overrightarrow{u}$ errechnet sich mit der Formel $d = \frac{1}{u} | \overrightarrow{GH} \times \overrightarrow{u} |$.

Berechne mit dieser Formel den Abstand von

g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

• **15.** Bestimme die Lösung von $\overrightarrow{X} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, falls $x_1 = 1$.

16. A(5 | 2 | 6), B(7 | 0 | 9), C(0 | −2 | 1). Bestimme die Länge der Höhe h_c im Dreieck ABC.

• **17.** A(6 | 3 | 6) , B(4 | 8 | −8) , g: $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimme C auf g so, daß das Dreieck ABC den Flächeninhalt 54 hat.

• **18.** Zeige: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u}$ und $\vec{w}$ sind kollinear, wenn kein Nullvektor darunter ist.

•19. A(0 | 0 | 0) , B(6 | 9 | −6) , C(6 | 3 | 6) , D(−4 | −8 | 8)

a) Zeige: Das Viereck ABCD ist eben.

b) Zeige: Das Viereck ABCD ist nicht überschlagen, das heißt, keine Seite kreuzt eine andre.

c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

20. Begründe:

a) Ist $P_1P_2P_3P_4P_5$ ein ebenes konvexes Fünfeck, dann sind die Kreuzprodukte $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_{j+1}P_{j+2}}$ aufeinander folgender Seitenvektoren gleichsinnig parallel. Stimmt dieser Satz auch für konkave Fünfecke ?

b) I liege im Innern eines ebenen konvexen Fünfecks $P_1P_2P_3P_4P_5$
$\Leftrightarrow$ für alle Ecken P_j mit $P_1 = P_6$ gilt:
$\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_jI}$ ist bis auf einen positiven Faktor gleich $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$.
Wie merkt man, daß ein Punkt auf dem Fünfeck liegt ?

21. $A(4|3|0)$, $B(6|0|1)$, $C(-4|0|6)$, $D(-8|6|4)$, $E(0|6|0)$

a) Zeige: ABCDE ist ein ebenes konvexes Fünfeck.

b) $P(-8|3|6)$, $Q(-2|3|3)$, $R(-6|3|5)$, $S(0|0|4)$, $T(0|3|2)$, $U(-6|3|4)$.
Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Fünfecks ABCDE ?
Welche liegen drauf ?

22. $A(1|-2|0)$, $B(-3|-6|6)$, $C(3|10|12)$, $D(5|6|0)$

a) Zeige: ABCD ist ein ebenes konvexes Viereck.

b) $P(0|2|9)$, $Q(-4|-18|-9)$, $R(0|0|0)$, $S(2|2|3)$
Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Vierecks ABCD ?
Welche liegen drauf ?

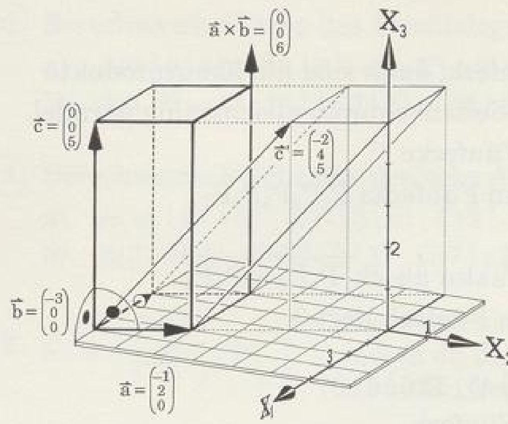
2. Spatprodukt und Spatvolumen

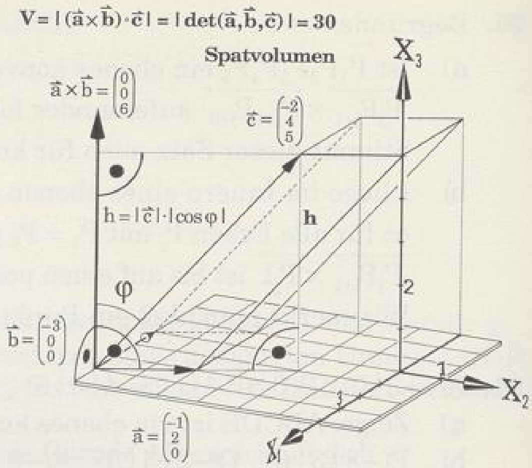
Das Volumen eines geraden Prismas berechnet man mit der Formel Grundfläche mal Höhe. Schert man ein Prisma parallel zur Grundfläche, dann bleiben Grundfläche G und Höhe h – und nach CAVALIERI – auch das Volumen $V = G \cdot h$ gleich.

Drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein Spat auf. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen eine Seitenfläche vom Inhalt $G = |\vec{a} \times \vec{b}|$ auf; $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu dieser Seitenfläche, also parallel zur Höhe h. Diese ist die Länge der senkrechten Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$h = |\vec{c}| \cdot |\cos\varphi| = |\vec{c}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$V_{Spat} = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$





Das gemischte Produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$ heißt auch **Spatprodukt** von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$; man schreibt es einfach $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. Der Ausdruck $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ist eine Zahl, deren Betrag das Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats angibt. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ist positiv, wenn $\cos\varphi$ positiv ist, das heißt, wenn $\vec{c}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ einen spitzen Winkel einschließen. Das bedeutet, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein Rechtssystem bilden.

Die Schreibweise $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ enthält keine Klammern, läßt also nicht erkennen, wo » ∘ « und wo » × « steht. Tatsächlich kommts nicht drauf an, solang man die Reihenfolge der Vektoren nicht ändert. Es gilt nämlich:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\circ\vec{a} \quad \text{(andere Grundfläche)} = \vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Berechnet man das Spatprodukt aus den Koordinaten von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, dann macht man eine überraschende Entdeckung:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

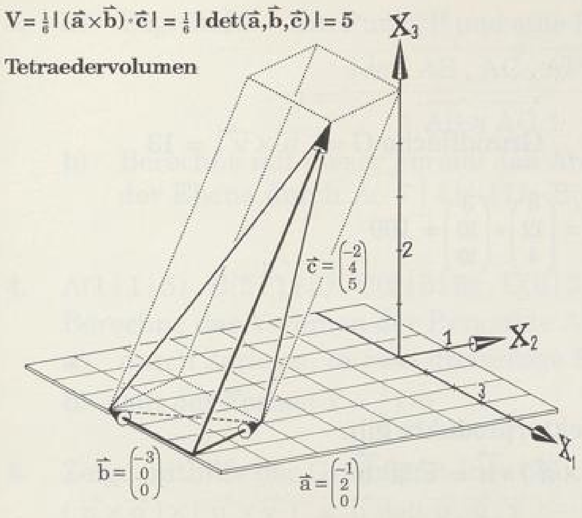
(Entwicklung nach der 3. Spalte)

Damit gilt: $\boxed{V_{\text{Spat}} = |(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}| = |\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| =: |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|}$

Diese Volumenformel macht die Komplanaritätsbedingung anschaulich verständlich:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar $\Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

Das Spat hat die Höhe 0 und entartet zu einem Vieleck.



Drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen auch ein Tetraeder (= dreiseitige Pyramide) auf.

$V_{Tetraeder} = \frac{1}{3}\, G_{Tetraeder} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\, G_{Spat} \cdot h = \frac{1}{6}\, V_{Spat}$

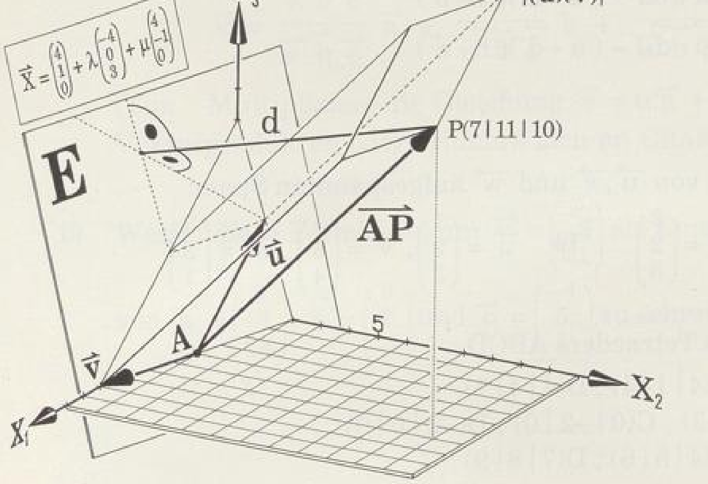
$$\boxed{V_{Tetraeder} = \tfrac{1}{6} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right| = \tfrac{1}{6} \left| \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|}$$

Als Anwendung des Spatprodukts berechnen wir den Abstand eines Punkts und einer Ebene in Parameterform:

$P(7 \mid 11 \mid 10),\ E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ spannen ein Spat auf. Der Abstand d(P,E) ist gleich der Spathöhe, die auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht steht:

$$d(P,E) = \frac{\left| (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AP} \right|}{\left| (\vec{u} \times \vec{v}) \right|} = 13$$



$$d(P,E) = \frac{V}{G} = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\circ\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\12\\4\end{pmatrix}; \qquad \text{Grundfläche } G = |\vec{u}\times\vec{v}| = 13$$

$$\text{Volumen } V = |(\vec{u}\times\vec{v})\circ\overrightarrow{AP}| = \begin{pmatrix}3\\12\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\10\\10\end{pmatrix} = 169$$

$$d(P,E) = \frac{V}{G} = \frac{169}{13} = 13.$$

Eigenschaften des Spatprodukts

Wegen der Eigenschaften des Skalar- und Vektorprodukts gilt:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \vec{c}\circ(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{a})\circ\vec{b} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$$

also $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$,

das heißt, zyklische Vertauschung ändert den Wert nicht. Andrerseits gilt:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\circ\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$$

also $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$,

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$

und $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$, das heißt, Vertauschung zweier Vektoren ändert das Vorzeichen.

Die Vertauschungseigenschaft des Spatprodukts führt zu einer weiteren Beziehung von Vektor- und Skalarprodukt, der *Lagrange-Identität*:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\circ\vec{c})(\vec{b}\circ\vec{d}) - (\vec{a}\circ\vec{d})(\vec{b}\circ\vec{c})$$

Zum Beweis setzen wir $\vec{c}\times\vec{d} = \vec{z}$. Damit ist:

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{z} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{z} = \vec{z}\,\vec{a}\,\vec{b} = (\vec{z}\times\vec{a})\circ\vec{b} = \\
&= [(\vec{c}\times\vec{d})\times\vec{a}]\circ\vec{b} \\
\text{(Graßmann)} \quad &= [(\vec{c}\circ\vec{a})\vec{d} - (\vec{d}\circ\vec{a})\vec{c}]\circ\vec{b} \\
&= (\vec{c}\circ\vec{a})(\vec{d}\circ\vec{b}) - (\vec{d}\circ\vec{a})(\vec{c}\circ\vec{b}) \\
&= (\vec{a}\circ\vec{c})(\vec{b}\circ\vec{d}) - (\vec{a}\circ\vec{d})(\vec{b}\circ\vec{c})
\end{aligned}$$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Berechne das Volumen V des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spats:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\0\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ Berechne das Volumen V des Tetraeders ABCD

a) A(1 | 1 | 1), B(1 | 4 | 4), C(4 | 1 | 4), D(4 | 4 | 1)
b) A(−1 | −1 | −1), B(0 | 0 | −2), C(0 | −2 | 0), D(−2 | 0 | 0)
c) A(0 | 0 | 0), B(1 | 2 | 3), C(4 | 5 | 6), D(7 | 8 | 9)

3. a) Begründe: Ein Punkt P und eine Ebene ABC haben den Abstand

$$d = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

b) Berechne mit dieser Formel den Abstand von P(−41 | 33 | 25) und der Ebene durch A(−7 | 4 | −17) , B(−7 | 1 | −13) und C(−3 | 7 | −14).

4. A(1 | 1 | 5) , B(5 | 1 | 5) , C(2 | 5 | 5) , D(0 | 3 | 5) , Spitze S(4 | 1 | −1)
Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS
a) durch Zerlegen in zwei dreiseitige Pyramiden.
b) mit der Formel $V = \frac{1}{3}Gh$

• 5. Zeige mithilfe der Graßmann-Identität:

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}\det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{v}) - \vec{v}\det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{u})$$
$$= \vec{q}\det(\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}) - \vec{p}\det(\vec{q}, \vec{u}, \vec{v})$$

• 6. **Jacobi-Identität** Zeige mithilfe der Graßmann-Identität

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{o}$$

• 7. a) Zeige: Die windschiefen Geraden g: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{u}$ und h: $\vec{X} = \vec{H} + \mu\vec{v}$

haben den Abstand $d = \dfrac{|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{GH}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

b) Bestimme mit dieser Formel den Abstand von

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8. Zerlegung eines Vektors $\vec{v}$ in seine Komponenten in Richtung $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

a) Zeige: Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, so gilt

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}\ \vec{b}\ \vec{c}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\vec{a} + \frac{\vec{a}\ \vec{v}\ \vec{c}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\vec{b} + \frac{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{v}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\vec{c}$$

(Tip: Multipliziere die Gleichung $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ mit geeigneten Vektorprodukten oder erinnere dich an CRAMER!)

b) Wende diese Formel an, um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination

von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu schreiben.

• **9.** Rechtfertige die Gleichheitszeichen

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\times\vec{d} = \vec{b}\;\vec{c}\times\vec{d}\;\vec{a}$$

$$= [\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\circ\vec{a} = [(\vec{b}\circ\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\circ\vec{c})\vec{d}]\circ\vec{a}$$

$$= (\vec{a}\circ\vec{c})(\vec{b}\circ\vec{d}) - (\vec{a}\circ\vec{d})(\vec{b}\circ\vec{c})$$

: 10. Quaternionen

William HAMILTON hat 1844 die komplexen Zahlen durch die Definition der *Quaternionen* erweitert. Eine Quaternion q ist ein Term der Form

$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ mit $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

und $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$

Hamilton betrachtete eine Quaternion q als Summe einer Zahl a_0 (Skalarteil) und eines dreidimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, also $q = a_0 + \vec{a}$.

Zeige: Multipliziert man zwei Quaternionen $q_1 = a_0 + \vec{a}$ und $q_2 = b_0 + \vec{b}$, dann entstehen alle uns bekannten Produkte:

$a_0 b_0$	Zahlenprodukt
$a_0\vec{b}$, $b_0\vec{a}$	S-Multiplikation
$\vec{a}\circ\vec{b}$	Skalarprodukt
$\vec{a}\times\vec{b}$	Vektorprodukt

und es gilt:

$$(a_0 + \vec{a}) * (b_0 + \vec{b}) = a_0 b_0 + a_0\vec{b} + b_0\vec{a} - \vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b},$$

» $*$ « bedeutet (distributive) Multiplikation zweier Quaternionen.