Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

4. Anwendungen der Orthogonalität

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

• **5.** Liegt überhaupt ein Skalarprodukt vor ? Bestimme gegebenenfalls die Strukturkonstanten des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$:

a) $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 + \sqrt{5}\,(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$

b) $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 - 3(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$

c) $\underline{a} * \underline{b} = 4a_1b_1 + 5(a_1b_2 - a_2b_1) + 3a_2b_2$

• **6.** Bestimmen die Strukturkonstanten ein Skalarprodukt ?

a) $\underline{e}_i^{\,2} = \alpha_i$ und $\alpha_i > 0,\qquad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 0$ für $i \neq j$

b) $\underline{e}_i^{\,2} = 1,\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = \alpha$ und $|\alpha| < 1,\qquad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

c) $\underline{e}_1^{\,2} = 1,\quad \underline{e}_2^{\,2} = 2,\qquad \underline{e}_3^{\,2} = 3,\qquad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 1$ für $i \neq j$

d) $\underline{e}_i^{\,2} = 1,\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 2,\qquad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

• **7.** Ist in einem n-dimensionalen Vektorraum durch den Term
$-x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + \ldots + (-1)^n x_ny_n$
die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts gegeben ?

• **8.** In einem Vektorraum mit der Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sei ein Skalarprodukt bestimmt durch die Strukturkonstanten
$\underline{e}_1^{\,2} = 1,\ \underline{e}_2^{\,2} = 2,\ \underline{e}_3^{\,2} = 3,\qquad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 1,\qquad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

a) Gib die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts an.

b) Zeige: $\underline{a}^2 > 0$ für $\underline{a} > \underline{0}$.

c) Berechne damit das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

d) Berechne die »Längen« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

e) Berechne den »Winkel« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

• **9.** Berechne im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor $\underline{n}$ der »Länge« 5, für den gilt $\underline{a} * \underline{n} = \underline{b} * \underline{n} = 0$; verwende das Skalarprodukt von **6. c)**. ($\underline{n}$ ist »Lotvektor« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.)

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

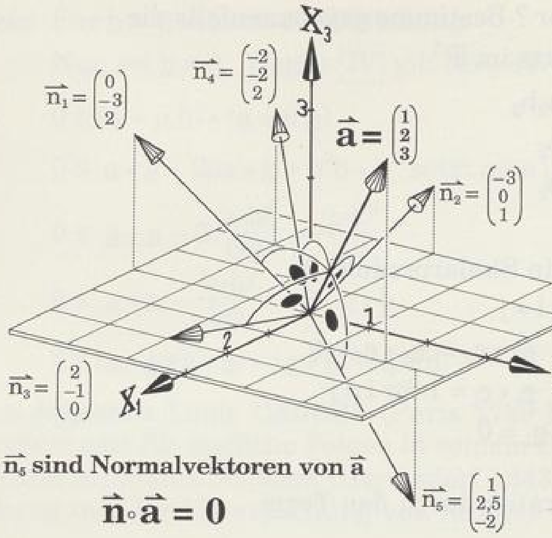
• **10.** Zeige die Gültigkeit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung für das

a) Standard-Skalarprodukt **b)** Skalarprodukt von **6. c)**.

4. Anwendungen der Orthogonalität

Vektor, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht: Normalvektor von $\vec{a}$

Vor gut 200 Jahren ist das Wort »normal« aus dem Lateinischen übernommen worden. Es leitet sich ab von *normalis* = der Norm entsprechend, im rechten Winkel gemacht. Die Bedeutung normal = senkrecht findet man zum Beispiel in »Normalprojektion«, »Normalbild«, »Normalkraft« und »Normalvektor«.

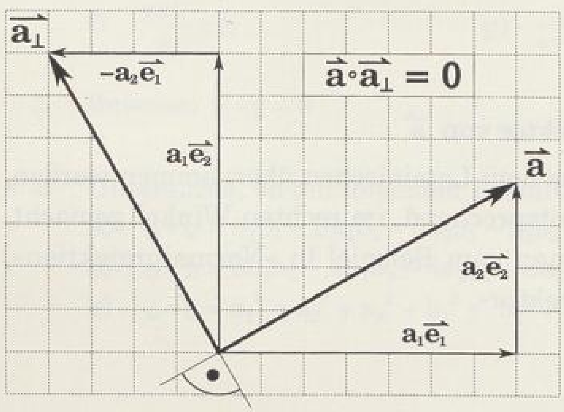


$\vec{n_1} \dots \vec{n_5}$ sind Normalvektoren von $\vec{a}$

$$\vec{n} \circ \vec{a} = 0$$

Die Aufgabe, Vektoren zu finden, die auf $\vec{a}\,(\neq \vec{o})$ senkrecht stehen, ist nicht eindeutig lösbar. Normalvektoren $\vec{n}\,(\neq \vec{o})$ von $\vec{a}$ müssen die Gleichung $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$ erfüllen: $n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 = 0$. Weil man zwei Koordinaten von $\vec{n}$ frei wählen und dann die dritte daraus bestimmen kann, gibt es ∞^2 Lösungen. Zum Beispiel ergibt sich für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Gleichung $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$; mögliche Lösungen sind $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Besonders leicht findet man Normalvektoren zweidimensionaler Vektoren.

$\vec{a_\perp} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor, der senkrecht ist zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und genau so lang ist. Die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{a_\perp}$ lassen die Bedingung aus der Analysis fürs Senkrechtstehen von Geraden erkennen: Geraden parallel zu $\vec{a}$ haben die Steigung $m = \frac{a_2}{a_1}$, und die parallel zu $\vec{a_\perp}$ haben die Steigung $m = -\frac{a_1}{a_2}$, aber nur, wenn keine Koordinate gleich 0 ist.



Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht: Normalvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, dann ist der Normalvektor $\vec{n}$ bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. Um $\vec{n}$ zu finden, muß man das Gleichungssystem:

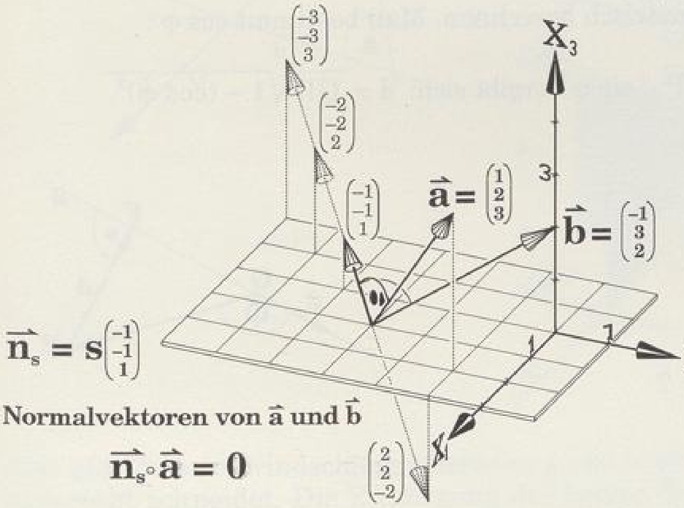
$\vec{n} \circ \vec{a} = 0$

$\vec{n} \circ \vec{b} = 0$ lösen. Dieses 2,3-System hat ∞^1 Lösungen.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

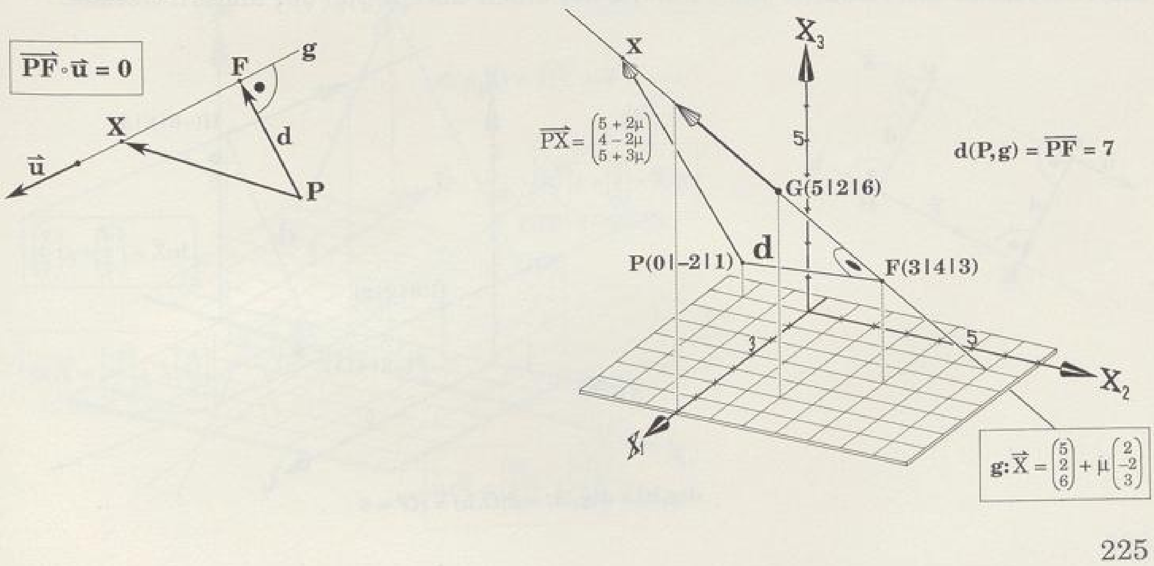
$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$

$-n_1 + 3n_2 + 2n_3 = 0$ Lösung $\vec{n_s} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Abstand von Punkt und Gerade; Lotfußpunkt

Der Abstand d ist die Länge des Lots von P auf g. Ist X allgemeiner Punkt der Gerade g: $\vec{X} = \vec{G} + \mu\vec{u}$, dann bestimmt man den Lotfußpunkt F aus der Gleichung $\overrightarrow{PX} \circ \vec{u} = 0$. Der Abstand ist dann $d = \overline{PF}$.



Beispiel: g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$, P(0 | −2 | 1)

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5+2\mu\\2-2\mu\\6+3\mu\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}5+2\mu\\4-2\mu\\5+3\mu\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PX}\circ\vec{u} = 0: \quad 2(5+2\mu) - 2(4-2\mu) + 3(5+3\mu) = 0$$

$$17\mu + 17 = 0 \Rightarrow \mu = -1 \text{ eingesetzt in } \overrightarrow{PX}:$$

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}, \text{ Abstand } d(P,g) = |\overrightarrow{PF}| = 7$$

zu $\mu = -1$ gehört der Lotfußpunkt F(3 | 4 | 3).
F ist derjenige Geradenpunkt, der P am nächsten liegt.

Der Abstand läßt sich auch trigonometrisch berechnen. Man bestimmt cos φ :

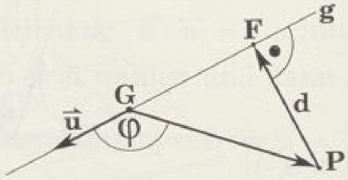
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\circ\overrightarrow{GP}}{u\cdot \overline{GP}}, \text{ und aus } d = \overline{GP}\cdot|\sin\varphi| \text{ ergibt sich: } d = \overline{GP}\sqrt{1-(\cos\varphi)^2}.$$

Im Beispiel von oben sieht das so aus:

$$\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\-5\end{pmatrix}, \qquad \overline{GP} = \sqrt{66}, \quad u = \sqrt{17}$$

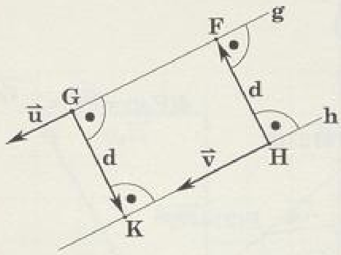
$$\cos\varphi = \frac{-17}{\sqrt{66}\sqrt{17}} = \frac{-\sqrt{17}}{\sqrt{66}};$$

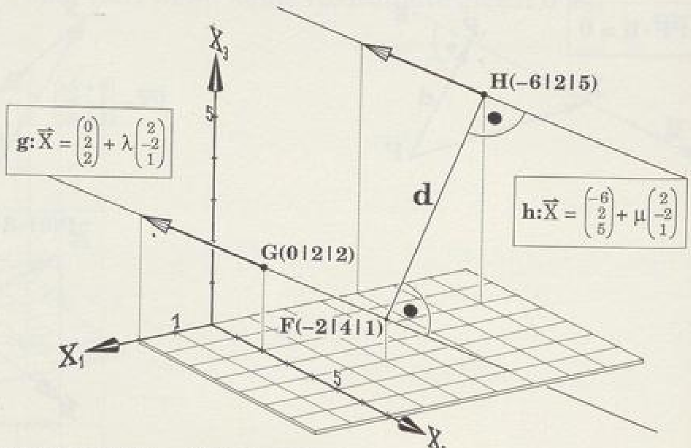
$$d = \sqrt{66}\sqrt{1-\frac{17}{66}} = \sqrt{66-17} = 7$$



Abstand zweier Parallelen

Man führt das Problem zurück auf die im letzten Abschnitt behandelte Aufgabe:
Man berechnet den Abstand eines Punkts der einen Gerade von der andern Gerade.

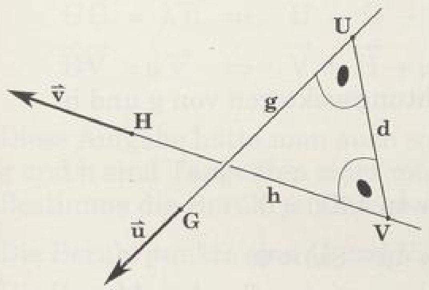


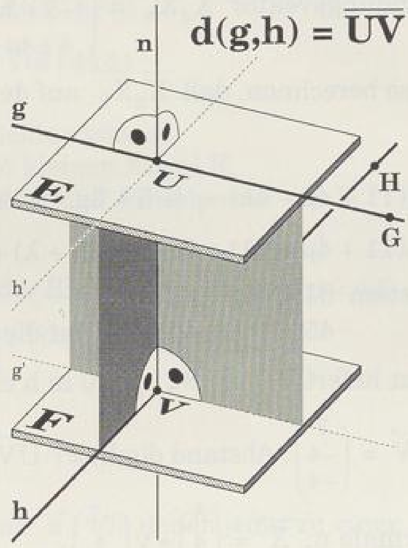


d(g,h) = d(g,H) = d(G,h) = $\overline{HF}$ = 6

Abstand zweier windschiefer Geraden

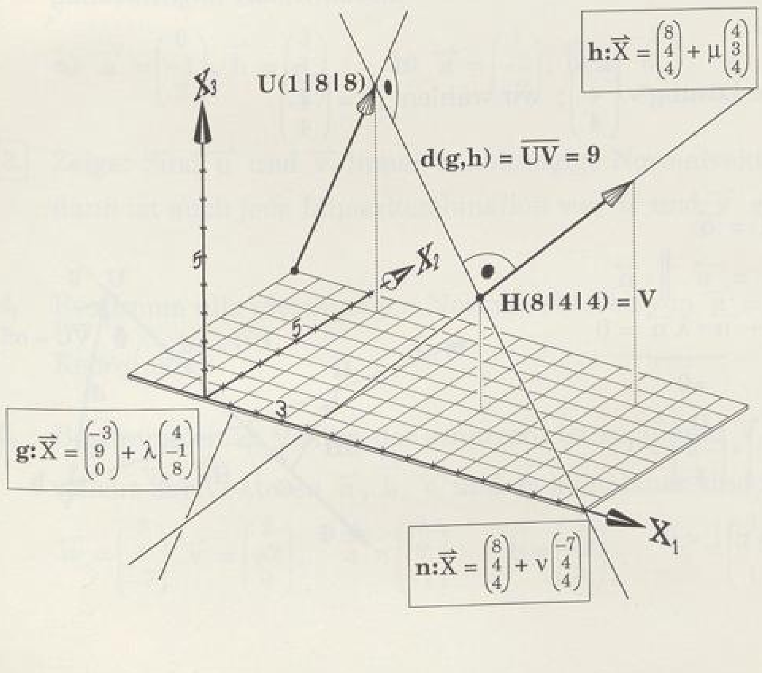
Der Abstand d(g,h) zweier windschiefer Geraden g und h ist die Länge der kürzesten Strecke, die einen Punkt von g mit einem Punkt von h verbindet. Legt man durch jede der beiden Geraden eine Ebene, die parallel ist zur anderen Gerade, dann haben diese Ebenen den Abstand d(g,h). Die Normalprojektion g' von g in F schneidet h im Fußpunkt V des gemeinsamen Lots n. (g' und h sind nicht parallel, weil g und h windschief sind.)





Also gilt: Zu zwei windschiefen Geraden g und h gibt es genau eine Gerade n, die beide senkrecht schneidet. Die Entfernung der beiden Schnittpunkte ist der Abstand von g und h. Die Gerade n heißt Normale oder gemeinsames Lot von g und h.

Es gibt mehrere Verfahren, die Schnittpunkte U und V, den Abstand d und die Normale n zu bestimmen. Zunächst führen wir zwei vor.



Methode »Allgemeiner Punkt«

g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{X_g} = \begin{pmatrix}-3+4\lambda\\9-\lambda\\8\lambda\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{X_h} = \begin{pmatrix}8+4\mu\\4+3\mu\\4+4\mu\end{pmatrix}$$

Allgemeiner Verbindungsvektor $\overrightarrow{X_gX_h} = \begin{pmatrix}11+4\mu-4\lambda\\-5+3\mu+\lambda\\4+4\mu-8\lambda\end{pmatrix}$

μ und λ muß man so berechnen, daß $\overrightarrow{X_gX_h}$ auf den Richtungsvektoren von g und h senkrecht steht:

$\overrightarrow{X_gX_h} \circ \vec{u} = 0$: $\quad 4(11+4\mu-4\lambda) - (-5+3\mu+\lambda) + 8(4+4\mu-8\lambda) = 0$

$\overrightarrow{X_gX_h} \circ \vec{v} = 0$: $\quad 4(11+4\mu-4\lambda) + 3(-5+3\mu+\lambda) + 4(4+4\mu-8\lambda) = 0$

Das Gleichungssystem $81 + 45\mu - 81\lambda = 0$

$45 + 41\mu - 45\lambda = 0$ hat die Lösungen $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

$\lambda = 1$ in g eingesetzt liefert U(1 | 8 | 8), $\mu = 0$ in h eingesetzt liefert V(8 | 4 | 4).

Abstandvektor $\overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix}7\\-4\\-4\end{pmatrix}$, Abstand $d(g,h) = |\overrightarrow{UV}| = 9$

Gleichung der Normale n: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$.

Methode »Vektorkette«

Zuerst bestimmt man den Richtungsvektor $\vec{n}$ der Normale, $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\vec{n} \circ \vec{u} = 0$: $\quad 4n_1 - n_2 + 8n_3 = 0$

$\vec{n} \circ \vec{v} = 0$: $\quad 4n_1 + 3n_2 + 4n_3 = 0$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $\nu\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$; wir wählen $\vec{n} = \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$.

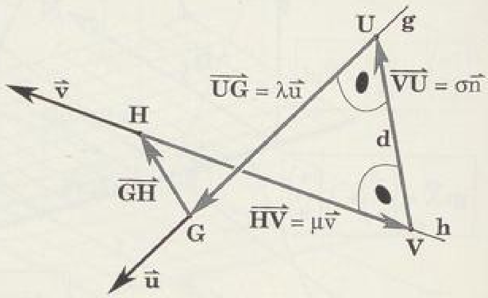
Geschlossene Vektorkette

$$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HV} + \overrightarrow{VU} + \overrightarrow{UG} = \vec{o}$$

$$\overrightarrow{GH} + \mu\vec{v} + \sigma\vec{n} + \lambda\vec{u} = \vec{o} \quad \| \circ \vec{n}$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{GH} + \underbrace{\vec{n} \circ \mu\vec{v}}_{=0} + \vec{n} \circ \sigma\vec{n} + \underbrace{\vec{n} \circ \lambda\vec{u}}_{=0} = 0$$

$$\sigma = -\frac{\vec{n} \circ \overrightarrow{GH}}{\vec{n}^2} = -\frac{1}{81}\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}11\\-5\\4\end{pmatrix} = 1$$



Abstand $d(g,h) = |\overrightarrow{VU}| = |\sigma\vec{n}| = 9$

Braucht man auch noch die Punkte U und V, dann setzt man σ und $\vec{n}$ in die Vektorkette ein und löst das Gleichungssystem für μ und λ:

$$\begin{pmatrix}11\\-5\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\1\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$4\mu - 4\lambda = -4$
$3\mu + \lambda = 1$
$4\mu - 8\lambda = -8$ Lösungen $\lambda = 1, \mu = 0$ (Zwei Gleichungen genügen!)

$\overrightarrow{UG} = \lambda\vec{u} \Rightarrow \vec{U} = \vec{G} - \lambda\vec{u}$, $U(1|8|8)$

$\overrightarrow{HV} = \mu\vec{v} \Rightarrow \vec{V} = \vec{H} + \mu\vec{v}$, $V(8|4|4)$

Diese Aufgabe hätte man auch so einkleiden können:
g und h sind Tangenten einer möglichst kleinen Kugel K.
Bestimme die Berührpunkte sowie Radius und Mittelpunkt von K.

Die Berührpunkte sind U und V.
Die Kugel hat den Durchmesser [UV]; der Radius ist $r = \frac{1}{2}d(g,h) = 4{,}5$.
Der Mittelpunkt halbiert [UV]: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{U} + \vec{V})$, $M(4{,}5|6|6)$.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Bestimme drei Normalvektoren von $\vec{a}$, von denen jeder zu einer Koordinatenebene parallel ist:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$

2. Bestimme einen Normalvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit teilerfremden, ganzzahligen Koordinaten:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\6\\\pi\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}19\\0\\-7\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}13\\0\\99\end{pmatrix}$

$\boxed{3.}$ Zeige: Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Normalvektoren von $\vec{a}$, dann ist auch jede Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Normalvektor von $\vec{a}$.

4. Bestimme alle gleichlangen Normalvektoren von $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit ganzzahligen Koordinaten.

5. Bestimme einen Vektor, der senkrecht ist zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, und untersuche, welche der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ komplanar sind zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\\-7\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}7\\0\\-7\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix}-7\\8\\-1\end{pmatrix}$

$\boxed{6.}$ g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, P(4 | 8 | −8)

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P und den Abstand von P und g.
b) Berechne den Abstand von g und Ursprung.

$\boxed{7.}$ Gib die Gleichung einer Ursprungsgerade u an,
die g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht schneidet.

$\boxed{8.}$ g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, P(1 | −1 | 1) Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P.
b) Gib eine Gleichung der Normale n von g durch P an.
c) Berechne den Abstand von P und g.
d) P' und P sind symmetrisch bezüglich g. Berechne P'.

9. Berechne den Abstand d(P,g) und die senkrechte Projektion F von P auf g:

a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, P(50 | 55 | 51)

b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 111 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 111 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$, P(1000 | 110 | 120)

• **10.** g: $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, P(1 | 2 | 3)

a) g an P gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von g' an.
b) P an g gespiegelt ergibt P'. Berechne P'.
c) h an g gespiegelt ergibt h'. Gib eine Gleichung von h' an.

$\boxed{\bullet 11.}$ g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$. Berechne d(g,h).

• **12.** A(29 | −5 | −4) , B(−3 | −27 | 12) , M(16 | 11 | −8) , P(4 | 8 | 19) , Q(1 | −19 | 31)
g ist die Gerade durch A und B.

a) Bestimme den Punkt N auf g, der P am nächsten liegt.
b) g ist Tangente einer Kugel um M.
Berechne den Berührpunkt T und den Kugelradius r_b.
c) Berechne Radius r_c und Mittelpunkt M_c der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und deren Mittelpunkte auf g liegen.
d) Berechne Radius r_d und Mittelpunkt M_d der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und g berühren. Berechne den Berührpunkt T.

e) Berechne Radius r_e und Mittelpunkt M_e der kleinsten aller Kugeln, die durch Q gehen und g als Zentrale haben.
Berechne die Schnittpunkte von g und dieser Kugel;
was für ein Dreieck bilden der Ursprung und die Schnittpunkte ?

f) Bestimme eine Gleichung der Normale n von g durch Q.

g) Q an g gespiegelt ergibt Q'. Berechne Q'.

• **13.** g ist die Gerade durch A(8 | 13 | 3) und B(14 | 20 | −3),
h ist die Gerade durch C(10 | 19 | 12) und D(−8 | −2 | 30).

a) Berechne den Abstand d(g,h) von g und h.

b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele m von g und h.

c) g an h gespiegelt ergibt u, und h an g gespiegelt ergibt v.
Bestimme Gleichungen von u und v.

d) Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die g und h berühren ?

e) Wo liegen die Mittelpunkte der kleinstmöglichen Kugeln, die g und h berühren ?

• **14.** g_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}$, M(−5 | 5 | 5) , V(6 | 18 | 6) , W(−6 | 12 | 0)

a) Beschreibe die Schar g_a, welchen Abstand haben benachbarte Schargeraden ?
Welche besondere Lage im KOSY hat die Mittelparallele von g_7 und g_{-7} ?

b) Welche Schargeraden haben vom Ursprung den Abstand 7 ?

c) Welche Schargeraden berühren die Kugel um M mit Radius 9 ?

d) Bezüglich welcher Schargerade sind V und W symmetrisch ?

$\boxed{\bullet 15.}$ Untersuche, ob g und h windschief sind, berechne gegebenenfalls den Abstand d(g,h) und die Endpunkte der gemeinsamen Lotstrecke.

a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. g: $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

g ist die Achse eines Zylinders Z mit Radius 11.
Berechne die Schnittpunkte von Z und h.

• **17.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

• **a)** Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf h und berührt g.
Bestimme ihren Mittelpunkt M und Radius r in Abhängigkeit von μ.
Für welchen Wert von μ ist der Radius minimal ?

b) Bestimme Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, deren Mittelpunkt auf h liegt und die g als Tangente hat.

c) Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel, die h und g als Tangenten hat.

5. Beweise

Mit dem Skalarprodukt ist es auch möglich, geometrische Sätze durch Rechnung zu beweisen. Drei Beispiele sollen das zeigen.

1. Beispiel: Hat ein Tetraeder zwei Paare orthogonaler Gegenkanten, dann sind auch die beiden restlichen Kanten orthogonal.

Vor.: $\vec{a} \circ (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \quad (2)$

Beh.: $\vec{c} \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

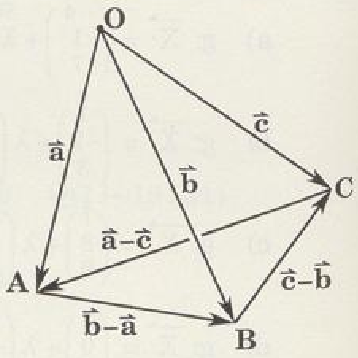
Bew.: $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0 \quad (2)$

(1) + (2): $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0$

$(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{c} = 0 \quad$ q.e.d.

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{OA \perp BC} \\ \mathbf{OB \perp CA} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{OC \perp AB}$$



Genauso elegant lassen sich viele bekannte Sätze aus der Planimetrie mit dem Skalarprodukt beweisen.