Anschauliche analytische Geometrie

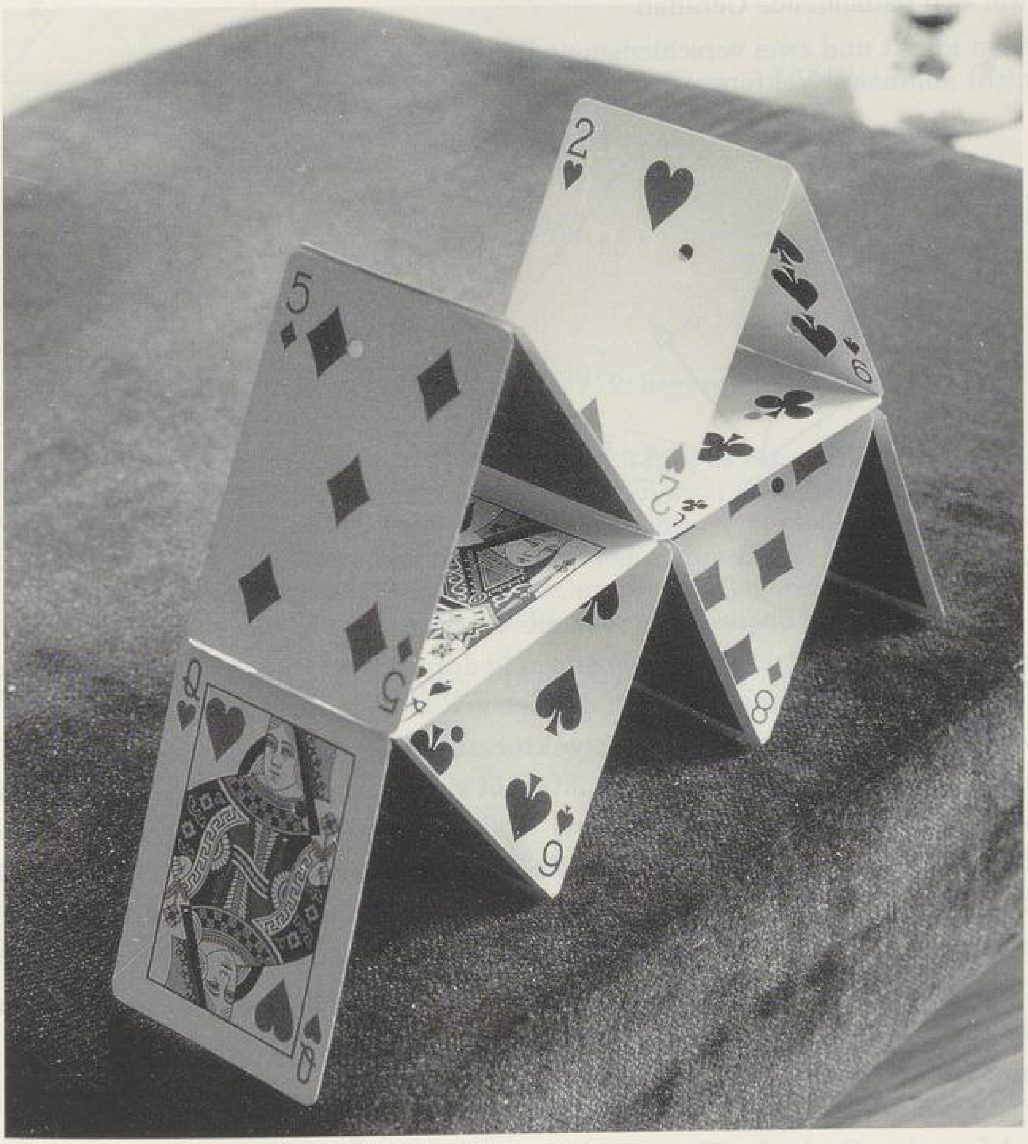
Barth, Elisabeth

München, 2000

VIII. Ebenen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

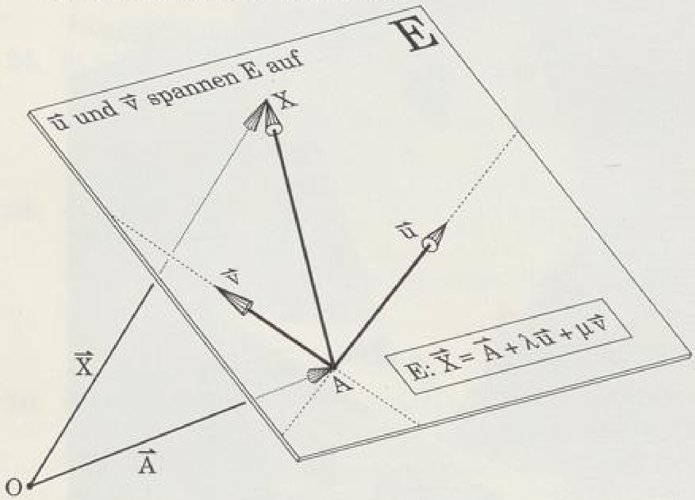
VIII. Ebenen



1. Ebenengleichungen

Eine Ebene im Raum ist eindeutig bestimmt durch

- drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen
- eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt
- zwei echt parallele Geraden
- zwei sich schneidende Geraden
- einen Punkt und zwei verschiedenene Richtungen (nicht kollineare Vektoren)



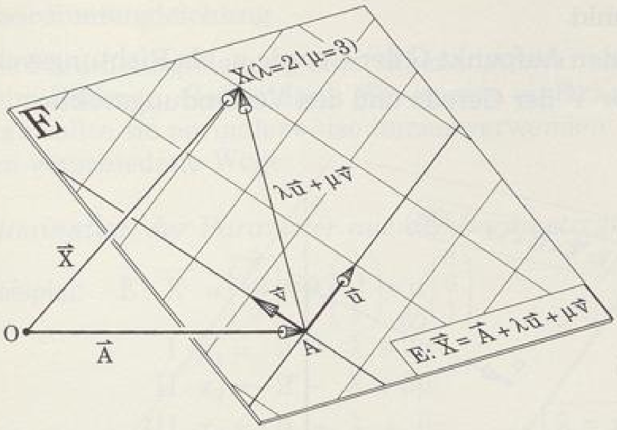
Eine Gleichung einer Ebene beschreibt die Ortsvektoren $\vec{X}$ aller Ebenenpunkte. Für diese Beschreibung eignet sich die Festlegung durch einen Punkt und zwei Richtungen am besten. Man wählt einen Punkt A der Ebene E als **Aufpunkt** und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als **Richtungsvektoren**, die parallel zur Ebene liegen. Der Ortsvektor $\vec{X}$ eines beliebigen Ebenenpunkts läßt sich dann darstellen als Summe von $\vec{A}$ und einer Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. λ, μ heißen **Parameter** des Punkts X. Die Gleichung heißt **Parametergleichung** oder Punkt-Richtungs-Gleichung der Ebene.

Jeder Punkt der Ebene ist eindeutig durch das Parameterpaar $(\lambda \mid \mu)$ festgelegt. $\vec{A}, \vec{u}$ und $\vec{v}$ bestimmen in der Ebene also ein (meist) schiefwinkliges Koordinatensystem mit A als Ursprung und $(\lambda \mid \mu)$ als Punktkoordinaten.

Zusammenfassung

> Ist A irgendein Punkt der Ebene E und sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei zu E parallele, nicht kollineare Vektoren, dann nennt man $\mathbf{E:}\ \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{A}} + \lambda\vec{\mathbf{u}} + \mu\vec{\mathbf{v}} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
> eine Parametergleichung von E.
> A heißt Aufpunkt, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen Richtungsvektoren,
> λ und μ heißen Parameter der Ebenengleichung.

Die Bedingung $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ läßt man aus Bequemlichkeit meist weg.



Beispiel: $\quad E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

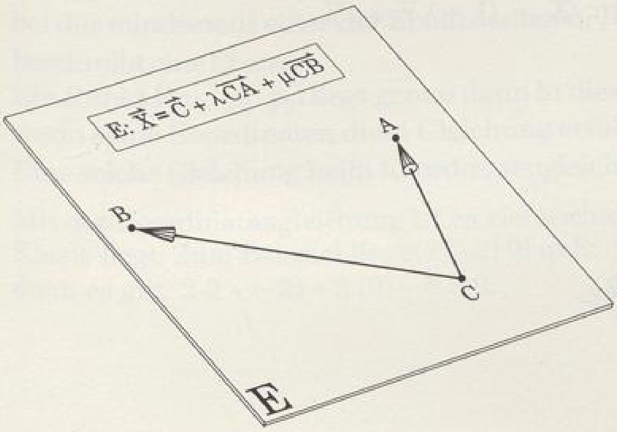
zu $\lambda = -1$, $\mu = 2$ gehört $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, P(5 | 7 | 2) liegt in E.

Je nach Wahl von Aufpunkt und Richtungsvektoren gibt es für eine Ebene (wie bei einer Gerade) verschiedene Parametergleichungen. Bei zwei Parametergleichungen, die ein und dieselbe Ebene beschreiben, müssen die Richtungsvektoren komplanar sein. Komplanarität sieht man gewöhnlich nicht auf den ersten Blick: Bei Ebenen erkennt man Parallelität oder Identität erst nach Rechnung (im Gegensatz zur Gerade). Die Ebene E (oben) kann zum Beispiel auch die Gleichung haben

$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, es gilt nämlich: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

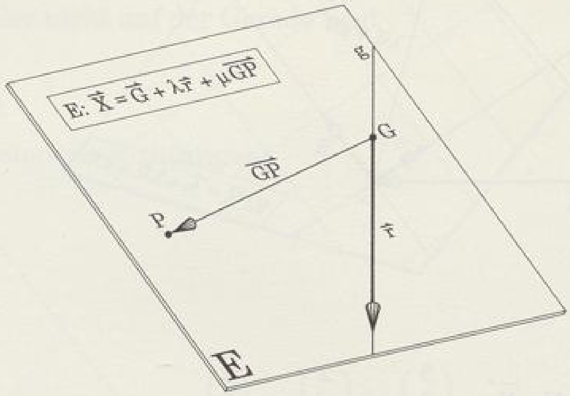
Ebene durch drei Punkte

Als Aufpunkt wählt man einen der drei Punkte. Als Richtungsvektoren wählt man zwei linear unabhängige der 6 möglichen Verbindungsvektoren,
zum Beispiel: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{C} + \lambda\,\overrightarrow{CA} + \mu\,\overrightarrow{CB}$.



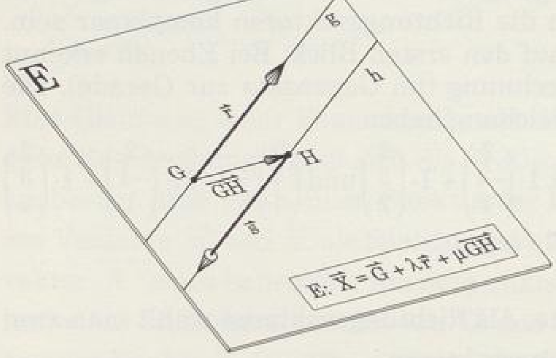
Ebene durch eine Gerade und einen Punkt

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt G der Gerade g, als Richtungsvektoren zum Beispiel den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Gerade und den Verbindungsvektor $\overrightarrow{GP}$: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{r} + \mu \overrightarrow{GP}$.



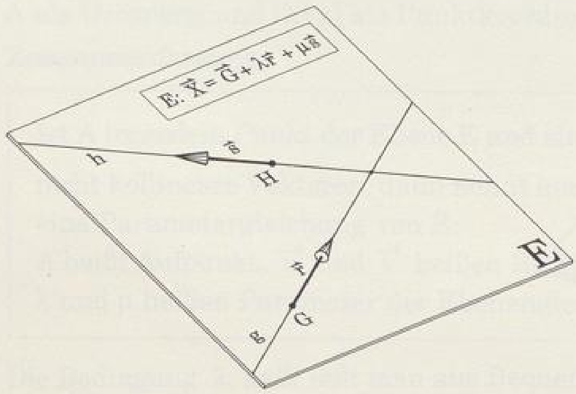
Ebene durch zwei Parallelen

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt G der Gerade g, als Richtungsvektoren zum Beispiel den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Gerade g und den Vektor $\overrightarrow{GH}$, der die Aufpunkte der Geraden g und h verbindet: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{r} + \mu \overrightarrow{GH}$.



Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt G der Gerade g, als Richtungsvektoren am besten gleich die der Geraden: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s}$.



Koordinatengleichung

Die Parametergleichung einer Ebene ist zwar recht anschaulich, aber sehr unhandlich beim Rechnen. Gottseidank gibt es eine einfachere Beschreibung mit einer Gleichung, man sollte sie normalerweise immer verwenden: die Koordinatengleichung. Zu ihr führen verschiedene Wege:

Elimination der Parameter aus der Parametergleichung

Beispiel: $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 = 2 + \lambda + 3\mu \\ \text{II} & x_2 = -2 - \lambda + 3\mu \\ \text{III} & x_3 = 0 + \lambda + \mu \qquad \boxed{\lambda = x_3 - \mu} \\ \text{I'} & x_1 = 2 + x_3 + 2\mu \qquad \boxed{2\mu = x_1 - 2 - x_3} \\ \text{II'} & x_2 = -2 - x_3 + 4\mu \\ \text{II''} & x_2 = -6 - 3x_3 + 2x_1 \end{array}$$

II'' ist die Beziehung zwischen den Koordinaten des allgemeinen Ebenenpunkts $X(x_1 | x_2 | x_3)$. Wir ordnen um und bekommen die Koordinatengleichung: $E: \ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$

Man kann zeigen, daß jede solche lineare Koordinatengleichung (bei der nicht alle Koeffizienten zugleich null sind) eine Ebene beschreibt. Zum Beweis braucht man nur zwei der Koordinaten als freie Parameter zu nehmen. Wir führen es an unserm Beispiel vor:

$$\begin{array}{ll} E: & 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0, \\ & x_1 = \sigma, \\ & x_3 = \tau, \\ & x_2 = -6 + 2\sigma - 3\tau \quad \text{oder vektoriell geschrieben:} \end{array}$$

$$E: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ -6 + 2\sigma - 3\tau \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das ist eine der unendlich vielen Parametergleichungen von E.

Satz

Jede lineare Gleichung der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$,
bei der mindestens einer der Koeffizienten n_1, n_2, n_3 ungleich null ist,
beschreibt eine Ebene.
Ein Punkt $P(p_1 | p_2 | p_3)$ liegt genau dann in dieser Ebene,
wenn seine Koordinaten diese Gleichung erfüllen: $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_0 = 0$.
Eine solche Gleichung heißt Koordinatengleichung der Ebene.

Mit der Koordinatengleichung ist es viel leichter zu entscheiden, ob ein Punkt in einer Ebene liegt. Zum Beispiel liegt $(2 | -2 | 0)$ in $E: \ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$, denn es gilt $2 \cdot 2 - (-2) - 3 \cdot (0) - 6 = 0$.

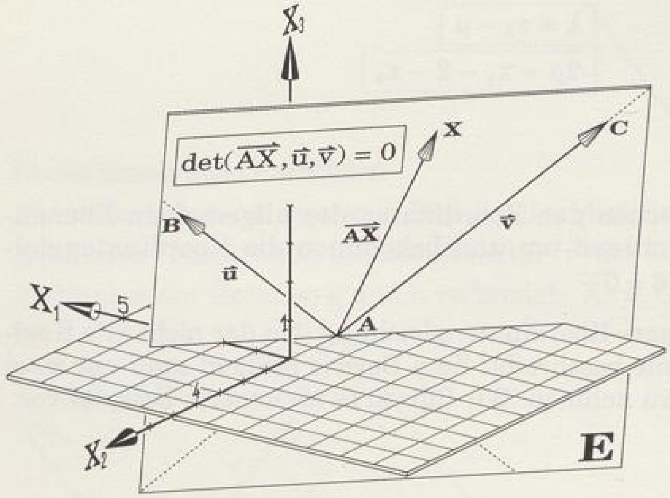
Multipliziert man eine Koordinatengleichung mit einer Zahl ($\neq 0$), so ändert sich die Lösungsmenge nicht, die beiden Gleichungen beschreiben dieselbe Ebene. Man vereinfacht eine Koordinatengleichung so, daß die Koeffizienten teilerfremde, ganze Zahlen sind,

Beispiel: E: $6x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 36 = 0 \;\|\; :3$ F: $-\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_2 - 3x_3 + 9 = 0 \;\|\; \cdot(-\frac{4}{3})$

E: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$ F: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$ (E = F !)

**Determinantenmethode*

Ein Punkt X liegt genau dann in der Ebene, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ komplanar sind, das heißt $\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Rechnet man diese Determinante aus, dann steht die Koordinatengleichung da.



Beispiel (von oben): $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{X} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}x_1-2\\x_2+2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1-2 & 1 & 3 \\ x_2+2 & -1 & 3 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1-2)\cdot(-4) - (x_2+2)\cdot(-2) + x_3\cdot 6 = 0$$
$$-4x_1 + 8 + 2x_2 + 4 + 6x_3 = 0$$
$$-4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 12 = 0 \;\|\; :(-2) \qquad E:\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$$

Sind von einer Ebene drei Punkte bekannt, so findet man die Koordinatengleichung direkt mit der Determinantenmethode (ohne Umweg über die Parametergleichung),

Beispiel: $A(0|-2|0)$, $B(2|2|4)$, $C(-6|-5|6)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix}x_1\\x_2+2\\x_3\end{matrix}}_{AX} & \begin{matrix}1\\2\\2\end{matrix} & \begin{matrix}2\\1\\-2\end{matrix} \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1)\cdot(-6) - (x_2+2)\cdot(-6) + x_3\cdot(-3) = 0$$
$$E:\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4 = 0$$

Zur Kontrolle empfiehlt es sich, den einen oder andern Punkt einzusetzen.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die den Punkt P(−2 | 1 | 7) enthält und von den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

$\boxed{2.}$ Gib die Punkte A, B, C und D an, die in der Ebene E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegen und die Parameterwerte haben
$A(\lambda = 0 \mid \mu = 0)$, $B(\lambda = 0 \mid \mu = 1)$, $C(\lambda = 1 \mid \mu = 0)$, $D(\lambda = 1 \mid \mu = 1)$.

$\boxed{3.}$ Untersuche, ob die Punkte A(1 | 4 | 6), B(5 | −7 | 0) und C(14 | 2 | 7) in der Ebene E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen, und nenne gegebenenfalls die zugehörigen Parameterwerte. Zeichnung im Koordinatensystem !

$\boxed{4.}$ Stelle eine Parametergleichung der Ebene E(ABC) auf mit den Punkten
a) A(2 | 1 | 3), B(−1 | 0 | 5), C(2 | −7 | 3)
b) A(2 | 1 | −3), B(7 | −1 | 5), C(−3 | 3 | −11) (!)

5. Gib eine Parametergleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch
a) U(1 | 0 | −1), V(0 | 0 | 0), W(−2 | −4 | 1)
b) P(1 | 2 | −1), g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
d) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, k: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{6.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$, f: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$
Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E, die g enthält und parallel ist zu f.

7. A(7 | −1 | 5), a: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, b: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die A enthält und parallel ist zu a und b.

• **8.** Welche Punktmenge beschreibt die Gleichung $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, wenn gilt: $-\infty < \lambda < +\infty$ und $-1 \leq \mu < 1$?

9. Welche Punktmengen beschreiben die Parametergleichungen ($\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$)

a) $\vec{X} = \vec{P} + \frac{1}{\mu}\vec{u}, \quad \mu \neq 0$ b) $\vec{X} = \frac{\mu}{\mu-1}\vec{u}, \quad \mu \neq 1$

c) $\vec{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda + \mu = 1$ d) $\vec{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda + \mu < 1$

• **10.** $A(3|0|2)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Bestimme eine Parametergleichung der Halbebene H, die den Punkt A enthält und von der Gerade g begrenzt ist? Zeichnung im Koordinatensystem!

11. Führe die Parametergleichungen über in Koordinatengleichungen:

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ b) $\vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ d) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{X} = \begin{pmatrix}10\\5\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\-5\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\15\\6\end{pmatrix}$ f) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\0\\7\end{pmatrix}$

12. Prüfe, welche der Punkte $A(1|2|-2)$, $B(0|0|0)$ und $C(2|0|1)$ in der Ebene liegen

a) $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ b) $F: 3x_1 - x_3 = 5$ c) $G: x_2 = 0$

13. Bestimme den Parameter so, daß $P(1|2|-5)$ in der Ebene liegt

a) $E: x_1 - 2x_2 + x_3 - a = 0$ b) $F: ax_1 + x_2 = 0$

c) $G: 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2a$

14. Gib Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen an.

15. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}$ b) $P(-1|3|3)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $A(1|1|-4)$, $B(0|2|1)$, $C(-3|-1|-2)$

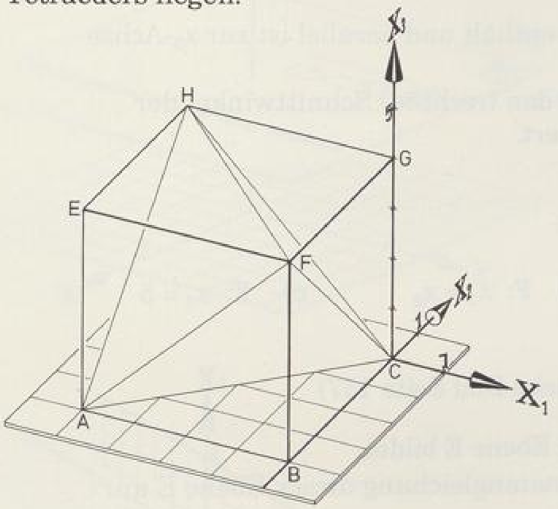
d) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

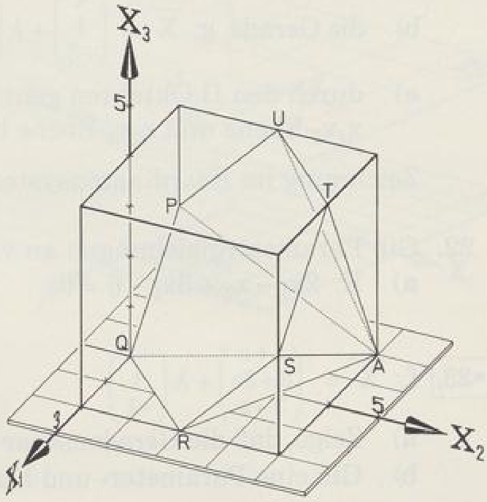
e) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $k: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

16. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}14\\-8\\17\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$

Zeige, daß sich g und h schneiden, und gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, in der g und h liegen.

17. Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Tetraeders liegen.



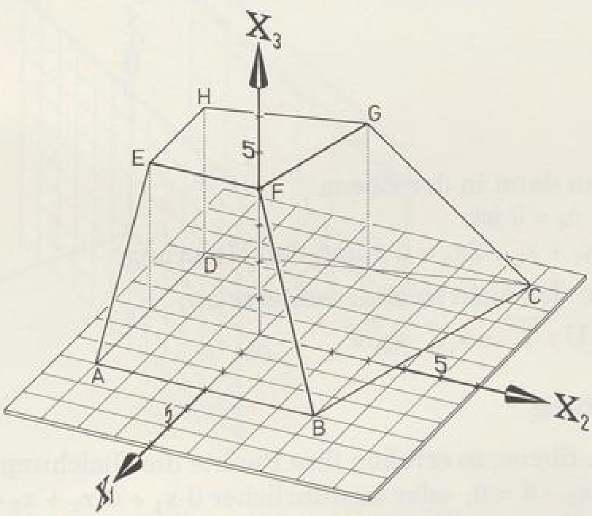


• **18.** In einem Würfel liegt eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Die Ecken ihrer Grundseite P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten des Würfels. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Grundfläche und die Seitenflächen der Pyramide liegen.

• **19.** Die oberen vier Ecken des Sechsflachs liegen gleich weit über der x_1x_2-Ebene.

a) Begründe, daß das Sechsflach ein Pyramidenstumpf ist, und berechne die Pyramidenspitze S.

b) Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Sechsflachs liegen.



20. Die Ebenen E und F haben eine besondere Lage im Koordinatensystem. Beschreibe diese und stelle Koordinatengleichungen der Ebenen auf.

E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

21. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die

a) durch $P(1\,|\,2\,|\,-2)$ geht und parallel ist zur x_1x_3-Ebene

b) die Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ enthält und parallel ist zur x_3-Achse

c) durch den II.Oktanten geht und den (rechten) Schnittwinkel der x_1x_3-Ebene und x_2x_3-Ebene halbiert.

Zeichnung im Koordinatensystem !

22. Gib Parametergleichungen an von:

a) E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ b) F: $x_1 = x_2$ c) F: $x_3 = 5$

•23. f_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 157)

a) Zeige, daß die Geradenschar eine Ebene E bildet.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene E an.

: 24. g_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 158)

a) Zeige, daß alle Geraden der Schar in einer Ebene F liegen.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene F an.

c) Welche Ebenenpunkte kommen in der Geradenschar nicht vor ?

25. j_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (siehe Bild Seite 159)

Zeige, daß die Geraden der Schar nicht in einer Ebene liegen.

2. Lage im Koordinatensystem

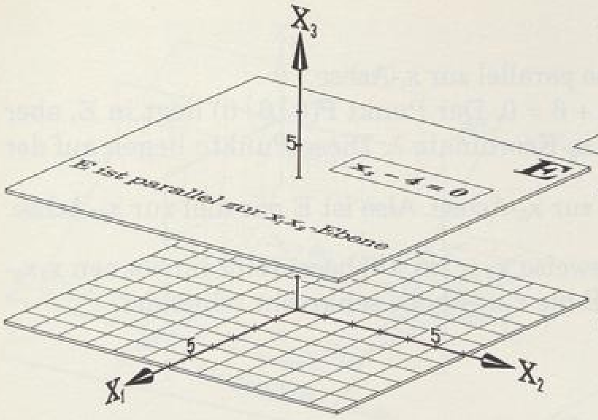
Ursprungsebene

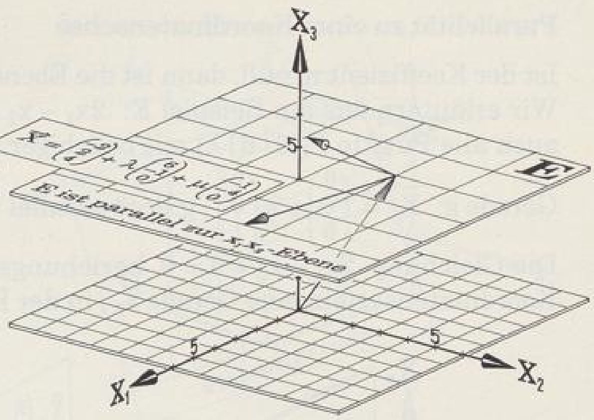
Der Ursprung $O(0\,|\,0\,|\,0)$ liegt genau dann in der Ebene
E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$, wenn $n_0 = 0$ ist.
Zum Beispiel geht die Ebene U: $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ durch den Ursprung.

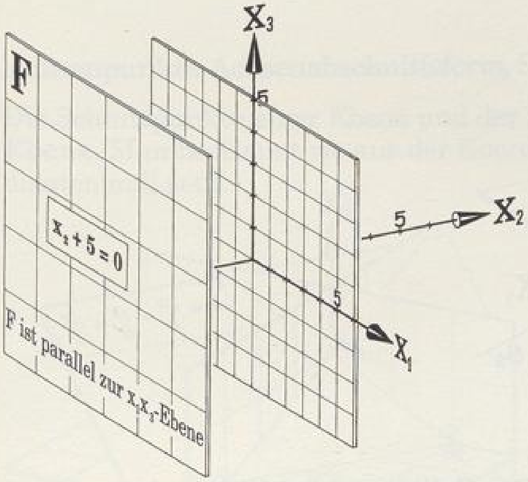
Der Parametergleichung sieht man das nicht so ohne weiteres an,
außer der Ursprung ist Aufpunkt, U : $\overrightarrow{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

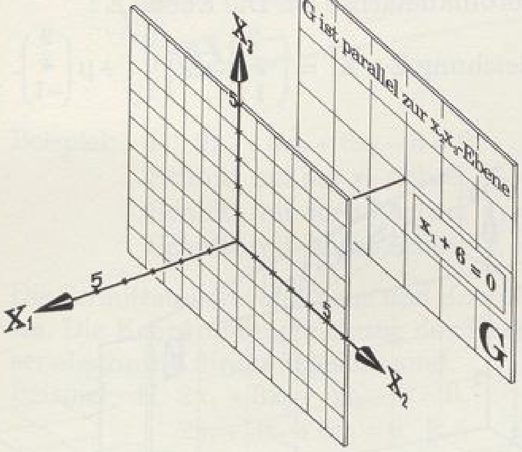
Parallelität zu einer Koordinatenebene

Liegt E im Abstand 4 über der x_1x_2-Ebene, so erfüllen ihre Punkte die Gleichung $x_3 = 4$.
Ihre Koordinatengleichung lautet $x_3 - 4 = 0$, oder ausführlicher $0{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + x_3 - 4 = 0$.
Allgemein gilt: Sind die Koeffizienten n_i und n_j gleich null,
so ist die Ebene parallel zur x_ix_j-Ebene.







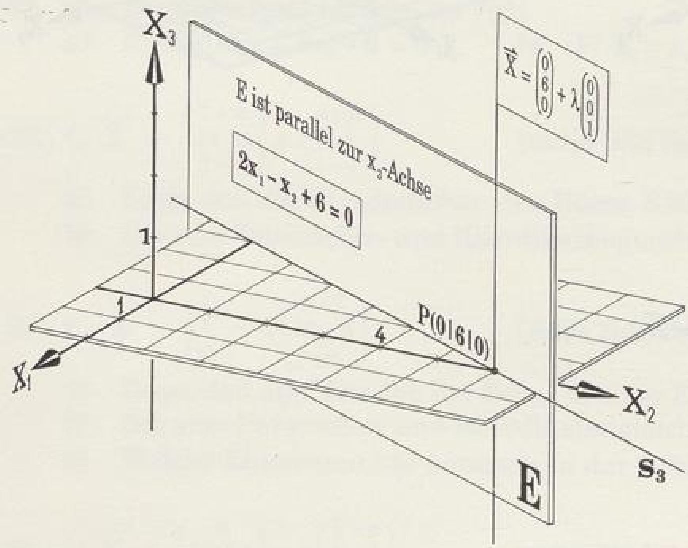


In der Parametergleichung erkennt man diese Parallelität daran, daß in beiden Richtungsvektoren dieselbe Koordinate null ist. Die Ebene E: $x_3 - 4 = 0$ hat zum Beispiel die

Parametergleichung $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

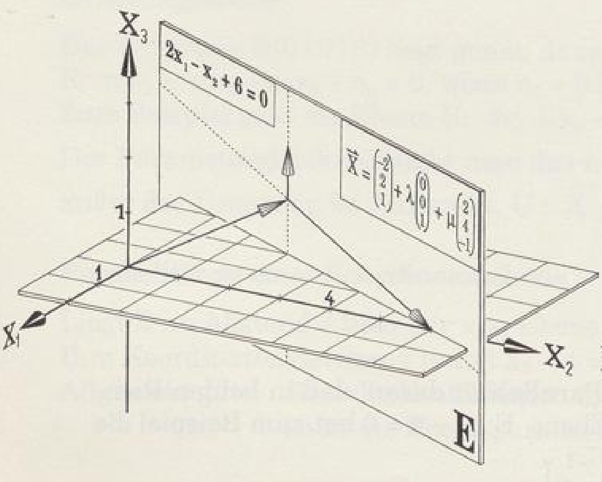
Parallelität zu einer Koordinatenachse

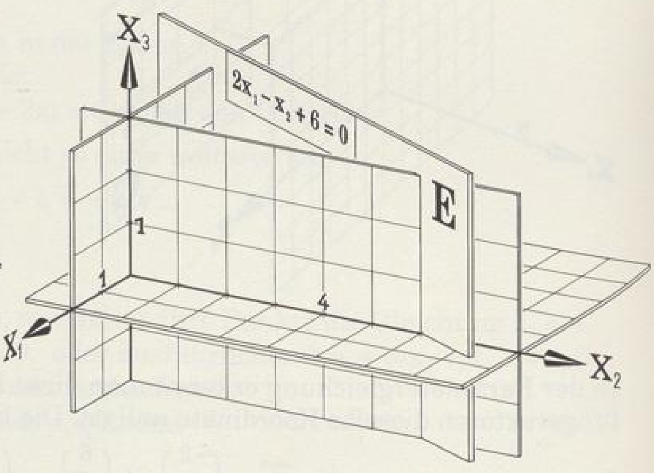
Ist der Koeffizient n_i null, dann ist die Ebene parallel zur x_i-Achse.
Wir erläutern das am Beispiel E: $2x_1 - x_2 + 6 = 0$. Der Punkt $P(0\,|\,6\,|\,0)$ liegt in E, aber auch alle Punkte $P_\lambda(0\,|\,6\,|\,\lambda)$ mit beliebiger x_3-Koordinate λ. Diese Punkte liegen auf der Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, g liegt parallel zur x_3-Achse. Also ist E parallel zur x_3-Achse.
Die Gleichung $2x_1 - x_2 + 6 = 0$ beziehungsweise $x_2 = 2x_1 + 6$ beschreibt im ebenen x_1x_2-Koordinatensystem eine Gerade s_3, in der E die x_1x_2-Ebene senkrecht schneidet.

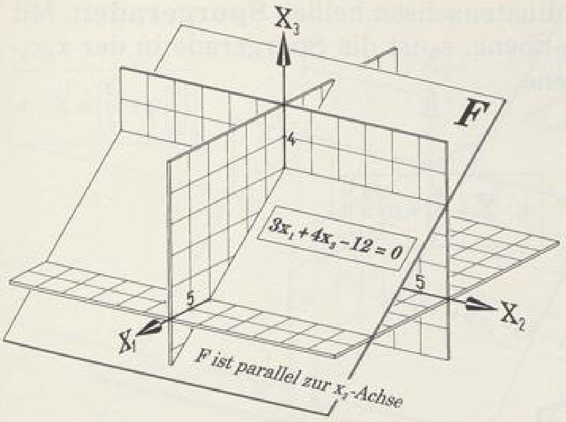


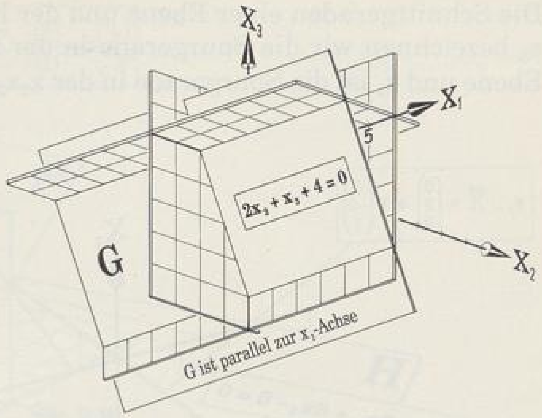
In der Parametergleichung erkennt man diese Parallelität auf Anhieb nur dann, wenn einer der Richtungsvektoren parallel zu einer Koordinatenachse ist. Die Ebene E :

$2x_1 - x_2 + 6 = 0$ hat zum Beispiel die Parametergleichung E : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$.



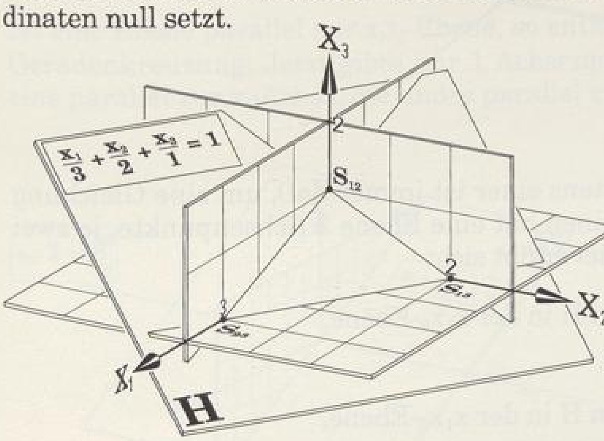






Achsenpunkte, Achsenabschnittsform, Spurgeraden

Die Schnittpunkte einer Ebene und der Koordinatenachsen heißen **Achsenpunkte der Ebene**. Man bestimmt sie aus der Koordinatengleichung, indem man jeweils zwei Koordinaten null setzt.



Beispiel: H: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$
Schnitt mit der x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = 3,\ S_{23}(3|0|0)$
Schnitt mit der x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 2,\ S_{13}(0|2|0)$
Schnitt mit der x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ S_{12}(0|0|1)$

Die Schnittstellen von Ebene und Koordinatenachsen heißen **Achsenabschnitte der Ebene**. Die Koordinatengleichung der Ebene läßt sich schnell so umformen, daß diese Achsenabschnitte direkt ablesbar sind.

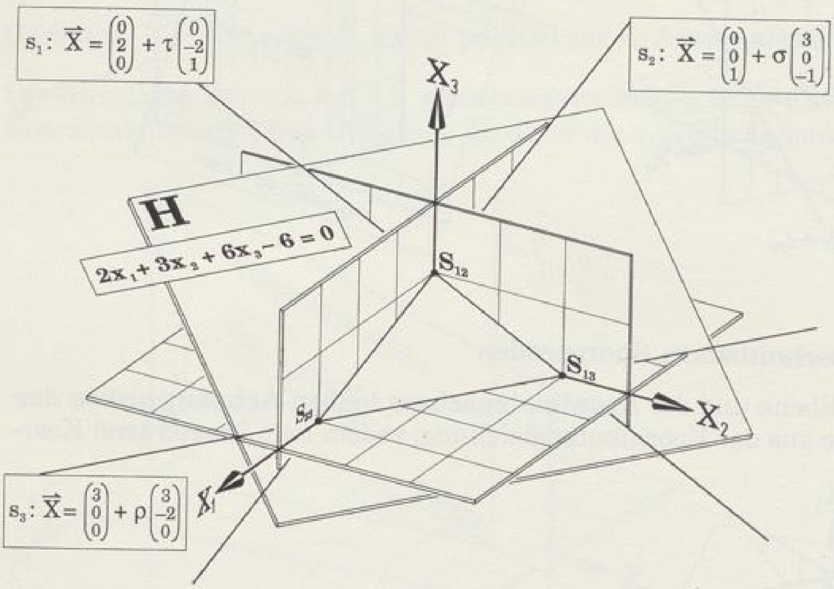
Beispiel: H: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$
$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \quad \|:6$

Achsenabschnittsform von H: $\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{1} = 1$,
H hat die Achsenabschnitte $a_1 = 3,\ a_2 = 2$ und $a_3 = 1$.

Allgemein:

Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$
die Achsenpunkte sind $(a_1|0|0)$, $(0|a_2|0)$ und $(0|0|a_3)$.

Die Schnittgeraden einer Ebene und der Koordinatenachsen heißen **Spurgeraden**. Mit s_3 bezeichnen wir die Spurgerade in der x_1x_2-Ebene, s_2 ist die Spurgerade in der x_1x_3-Ebene und s_1 ist die Spurgerade in der x_2x_3-Ebene.



Wir verwenden die Achsenpunkte (mindestens einer ist immer da!), um eine Gleichung einer Spurgerade aufzustellen. Im allgemeinen hat eine Ebene 3 Achsenpunkte, je zwei davon legen eine Spurgerade fest. Im Beispiel ergibt sich:

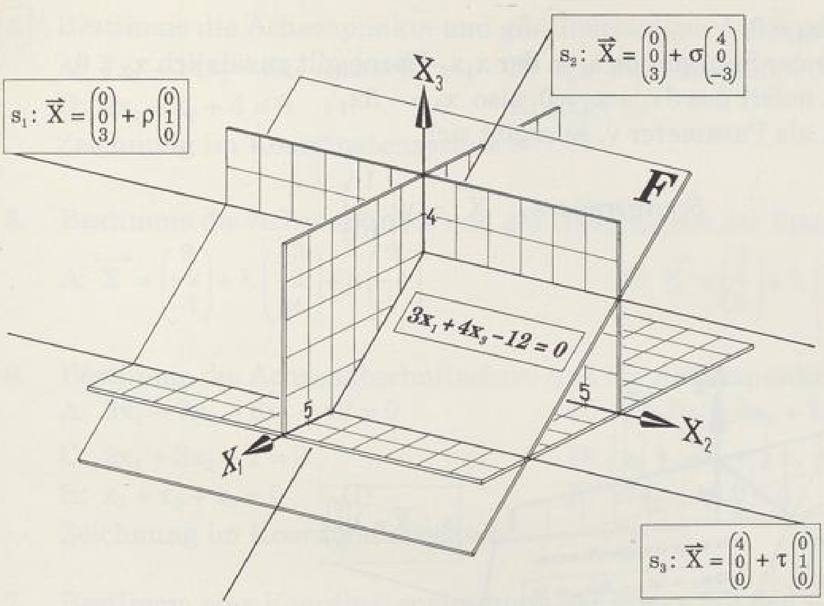
$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ ist die Spurgerade von H in der x_1x_2-Ebene,

$s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ ist die Spurgerade von H in der x_1x_3-Ebene,

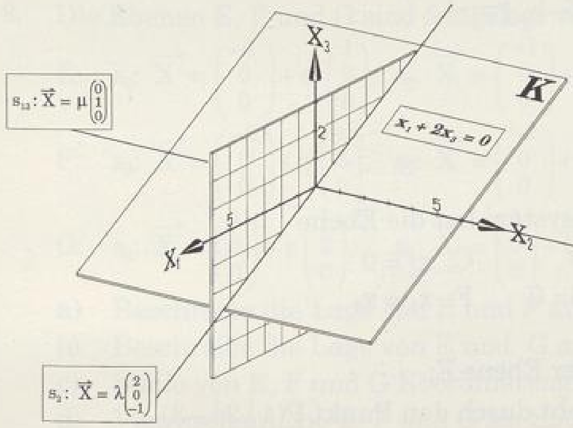
$s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ ist die Spurgerade von H in der x_2x_3-Ebene.

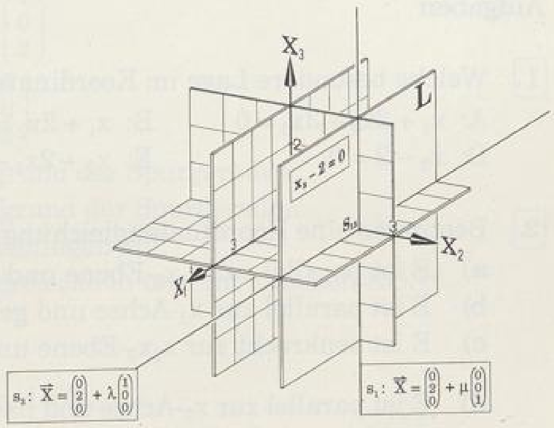
Im allgemeinen bilden die Spurgeraden ein Dreieck mit den Achsenpunkten als Ecken. Dieses Dreieck heißt **Spurdreieck**. Mit ihm läßt sich die Lage einer Ebene im Koordinatensystem besonders gut veranschaulichen.

Ist eine Ebene echt parallel zur x_i-Achse, so entartet das Spurdreieck zu einer Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar: Jetzt gibts nur 2 Achsenpunkte, 2 Spurgeraden sind parallel zur x_i-Achse und stehen senkrecht auf der 3. Spurgerade. Enthält eine Ebene die x_i-Achse, so entartet das Spurdreieck zu einer senkrechten Geradenkreuzung: die eine Spurgerade ist die x_i-Achse, die andre liegt in der x_jx_k-Ebene. Zum Beispiel enthält die Ebene K: $x_1 + 2x_3 = 0$ die x_2-Achse.



Ist eine Ebene parallel zur x_ix_j-Ebene, so entartet das Spurdreieck zu einer senkrechten Geradenkreuzung: Jetzt gibts nur 1 Achsenpunkt, von den beiden Spurgeraden ist die eine parallel zur x_i-Achse, die andre parallel zur x_j-Achse.





Am schwierigsten zu veranschaulichen und im Bild wiederzuerkennen sind Ebenen, die durch den Ursprung, aber nicht durch eine Koordinatenachse gehen: Die drei Achsenpunkte fallen im Ursprung zusammen, das Spurdreieck entartet zum Ursprung. Auch die Spurgeraden gehen durch den Ursprung; ihre Gleichungen findet man durch Lösen eines Gleichungssystems.

Beispiel: U: $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

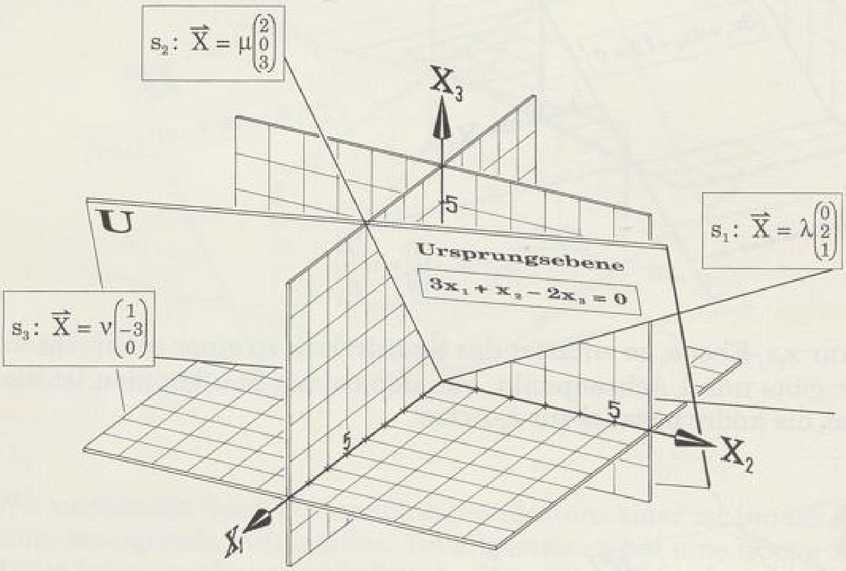
Für die Punkte der Spurgerade s_3 in der x_1x_2-Ebene gilt zusätzlich $x_3 = 0$, in U eingesetzt liefert das $3x_1 + x_2 = 0$, also $x_2 = -3x_1$.

Nimmt man x_1 als Parameter ν, so ergibt sich

$x_1 = \nu$

$x_2 = -3\nu$ Spurgerade s_3: $\overrightarrow{X} = \nu\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$

$x_3 = 0$



Aufgaben

1. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene

A: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ B: $x_1 + 2x_2 = 0$ C: $x_1 = 0$

D: $x_2 - 2 = 0$ E: $x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ F: $x_1 = x_2$

2. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E:

a) E ist parallel zur x_1x_2-Ebene und geht durch den Punkt $P(1\,|\,2\,|\,-3)$.

b) E ist parallel zur x_2-Achse und geht durch $P(1\,|\,0\,|\,0)$ und $Q(0\,|\,0\,|\,1)$.

c) E ist senkrecht zur x_2x_3-Ebene und geht durch O und $P(0\,|\,1\,|\,1)$.

d) E ist parallel zur x_2-Achse und hat die Spurgerade $s_2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

e) E ist senkrecht zur x_3-Achse und geht durch $P(\pi\,|\,\sqrt{17}\,|\,4)$.

3. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene

A: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ B: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

C: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ D: $\overrightarrow{X} = \lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

4. Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an

A: $7x_1 - 14x_2 - 6x_3 - 42 = 0$ B: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 15 = 0$ C: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

D: $2x_1 - x_2 + 4 = 0$ E: $2x_1 = x_2$ F: $x_2 + 2 = 0$

Zeichnung im Koordinatensystem !

5. Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an

A: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ B: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Bestimme die Achsenabschnittsform und die Achsenpunkte

A: $3x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 42 = 0$ B: $x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 21 = 0$

C: $2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$ D: $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5} = 0$

E: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (!) F: $17x_2 + 10{,}2 = 0$

Zeichnung im Koordinatensystem !

7. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene mit den Achsenpunkten:

a) $(1|0|0)$, $(0|2|0)$, $(0|0|3)$ **b)** $(-2|0|0)$, $(0|2|0)$, $(0|0|-2)$

c) nur $(0|-3|0)$ und $(0|0|5)$ **d)** nur $(0|0|7)$

Zeichnung im Koordinatensystem !

• **8.** Die Ebenen E, F und G sind festgelegt von zwei Spurgeraden:

E: s_3: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, s_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

F: s_3: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, s_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

G: s_3: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, s_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Lage von E und F aufgrund der Spurgeraden.

b) Beschreibe die Lage von E und G aufgrund der Spurgeraden.

c) Stelle von E, F und G Koordinatengleichungen auf.

d) Veranschauliche E, F und G als Spurdreiecke in unserm üblichen KOSY.

• **9.** s_3: $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und s_2: $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \neq 0$

seien Spurgeraden einer Ebene U.

Bestimme eine Gleichung der Spurgerade s_1 in Abhängigkeit von a, b, c und d.

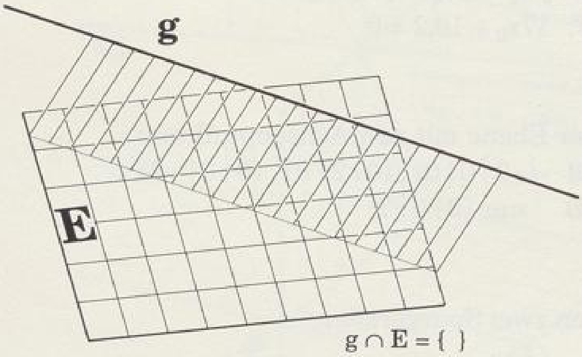
10. Eine Ebene sei so festgelegt, daß ihre drei Achsenpunkte vom Ursprung die Entfernung e (>0) haben.

a) Wieviel solcher Ebenen sind möglich ?
Beschreibe sie mit Koordinatengleichungen.

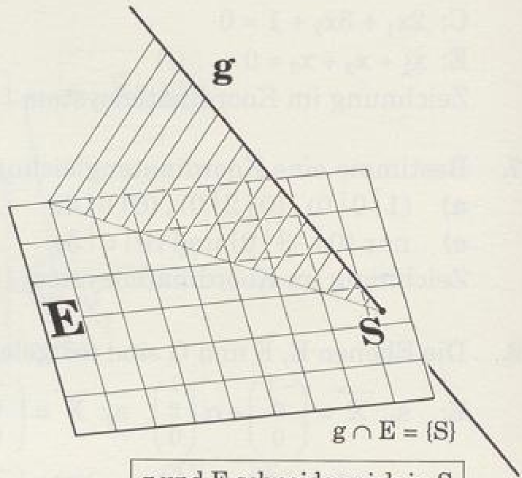
b) Welchen Körper begrenzen diese Ebenen ?
Berechne sein Volumen V und seine Oberfläche F.

3. Ebene und Gerade

Eine Gerade g kann eine Ebene E in einem Punkt schneiden, echt parallel zu E sein oder in E liegen.

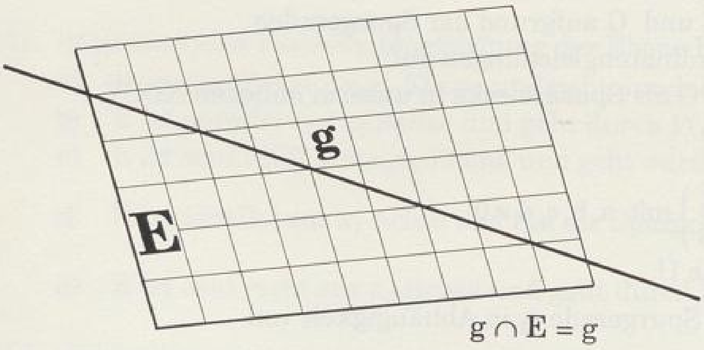


g und E sind echt parallel



g und E schneiden sich in S

Um den richtigen Fall herauszufinden, nehmen wir zunächst immer an, daß sich Gerade und Ebene schneiden, und suchen den Schnittpunkt.



g liegt in E

Parametergleichung der Ebene

Für die Berechnung des Schnittpunkts setzt man die Ortsvektoren der allgemeinen Punkte von Gerade und Ebene gleich. Es ergibt sich ein 3,3-Gleichungssystem für die drei Parameter.

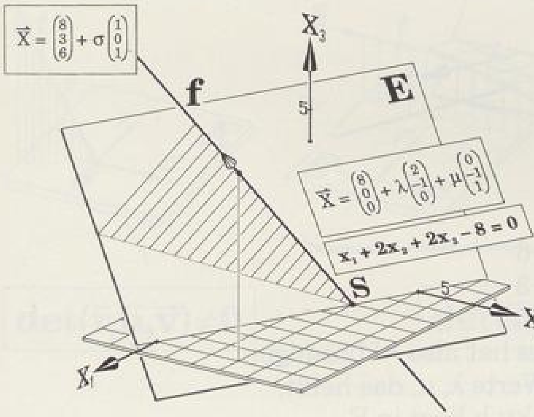
1. Beispiel:

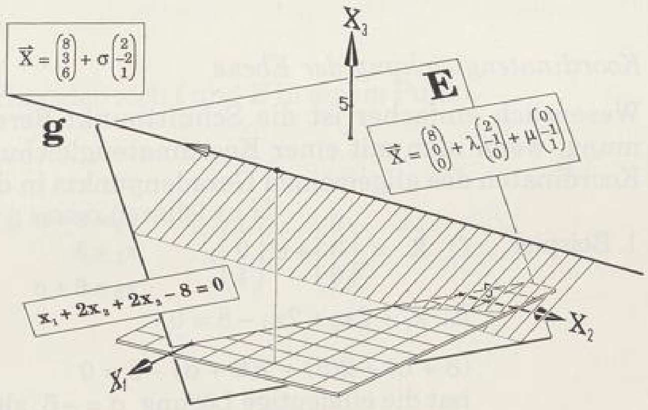
$$\left.\begin{aligned} f:\ \overrightarrow{X} &= \begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ E:\ \overrightarrow{X} &= \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}\right\}\ \text{» Gleichsetzen «}$$

Das System

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 2\lambda \quad - \quad \sigma & = & 0 \\ \text{II} & -\lambda - \mu & = & 3 \\ \text{III} & \quad\ \mu - \sigma & = & 6 \end{array}$$

hat die eindeutige Lösung $\sigma = -6,\ \mu = 0,\ \lambda = -3$.
Durch Einsetzen, zum Beispiel von σ in die Geradengleichung bekommt man den Schnittpunkt $S(2\,|\,3\,|\,0)$.





2. Beispiel:

$$\begin{aligned} g:\ \overrightarrow{X} &= \begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \\ E:\ \overrightarrow{X} &= \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das System

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 2\lambda \quad - \quad 2\sigma & = & 0 & \quad \boxed{\lambda = \sigma} \\ \text{II} & -\lambda - \mu + 2\sigma & = & 3 & \\ \text{III} & \quad\ \mu - \sigma & = & 6 & \end{array}$$

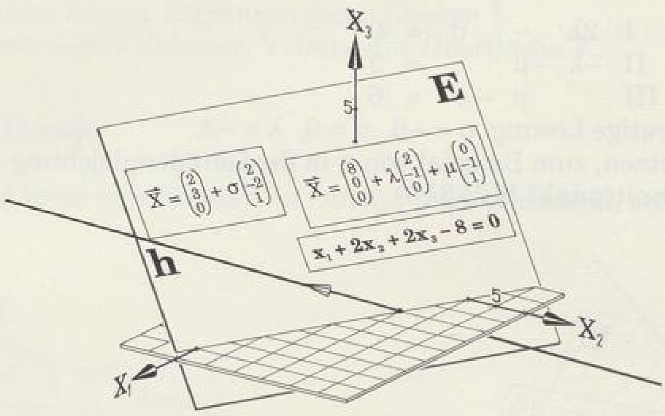
führt zu dem Widerspruch:

$$\begin{array}{llcl} \text{II}' & \mu - \sigma & = & -3 \\ \text{III}' & \mu - \sigma & = & 6 \end{array}$$

Es gibt also keinen Schnittpunkt: g und E sind echt parallel.

3. Beispiel: $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$



Das System

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2\lambda \quad - 2\sigma & = & -6 \\ \text{II} & -\lambda - \mu + 2\sigma & = & 3 \\ \text{III} & \mu - \sigma & = & 0 \end{array}$$

wird gelöst von $\mu = \sigma$, $\lambda = -3 + \sigma$; es hat also ∞^1 Lösungen:
zu jedem Wert σ gibt es passende Werte λ, μ, das heißt,
jeder Geradenpunkt ist Schnittpunkt: h liegt in E.

Koordinatengleichung der Ebene

Wesentlich einfacher ist die Schnittpunkt-Berechnung, und damit die Lagebestimmung, wenn man mit einer Koordinatengleichung der Ebene arbeitet. Man setzt die Koordinaten des allgemeinen Geradenpunkts in die Koordinatengleichung ein.

1. Beispiel: $f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\quad x_1 = 8 + \sigma$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6 + \sigma$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

$(8 + \sigma) + 2(3) + 2(6 + \sigma) - 8 = 0$
hat die eindeutige Lösung $\sigma = -6$, also schneiden sich f und E in $S(2\,|\,3\,|\,0)$.

2. Beispiel: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

$8 + 2\sigma + 2(3 - 2\sigma) + 2(6 + \sigma) - 8 = 0 \Rightarrow 18 = 0$. Wegen des Widerspruchs gibt es keinen Schnittpunkt: g und E sind echt parallel.

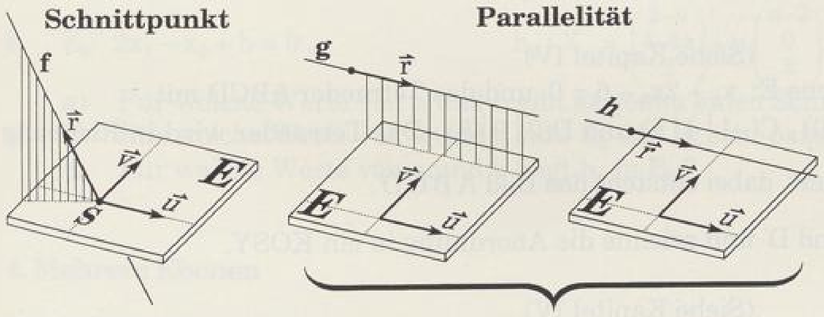
3. Beispiel: $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

$2 + 2\sigma + 2(3 - 2\sigma) + 2(\sigma) - 8 = 0 \Rightarrow 0 \cdot \sigma = 0$

Für σ ist alles erlaubt, jeder Geradenpunkt ist Schnittpunkt: h liegt in E.

Wenn man bloß wissen will, ob sich eine Gerade und eine Ebene (Parametergleichung!) in einem Punkt schneiden oder parallel sind, dann empfiehlt sich der Determinantentest:



$\boxed{\det(\vec{r},\vec{u},\vec{v}) \neq 0}$ $\boxed{\det(\vec{r},\vec{u},\vec{v}) = 0}$

In den drei Beispielen sieht das so aus:

1. Beispiel: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & -1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$, also schneiden sich f und E in einem Punkt.

2. Beispiel :
3. Beispiel $\begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\-2 & -1 & -1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$, also sind g und h parallel zu E.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $j: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$

Bestimme die Lage von Ebene und Gerade.
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

2. Gegeben sind die Ebenen und Geraden:

E: $x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$, F: $2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$

$a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c: \overrightarrow{X} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimme von jeder Gerade ihre Lage zu E und F.
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

• 3. **Parallelprojektion** (Siehe Kapitel IV)
Gegeben sind die Ebene E: $x_1 + 2x_3 - 6 = 0$ und das Tetraeder ABCD mit A(2 | 0 | 5) , B(−1 | 2 | 0) , C(−1 | 4 | 8) und D(2 | 0 | 8) . Das Tetraeder wird in Richtung $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.

• 4. **Zentralprojektion** (Siehe Kapitel IV)
Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 + x_2 - 6 = 0$, das Projektionszentrum Z(11 | 8 | 0) und das Tetraeder ABCD mit A(9 | 6 | 0) , B(5,5 | 7 | 3) , C(6 | 6 | 1) und D(8 | 6 | 2) . Das Tetraeder wird zentral in die Ebene E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.

5. Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. (Siehe Aufgabe **17.** auf Seite 177)

a) In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale HB die Ebene ACF?

b) In welchen Punkten schneidet die Gerade durch die Kantenmitten von [GC] und [AE] das Tetraeder ?

• **6.** $A(2\,|\,-1\,|\,0)$, $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet.
Berechne die Schnittpunkte.
Ein möglicher Lösungsweg führt über eine Hilfsebene H zum Ergebnis.
(Tip: H geht durch A und eine der beiden Geraden, Skizze hilft!).

7. $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad g_a: \overrightarrow{X} = \sigma\begin{pmatrix}1+a\\1-a\\1\end{pmatrix}$

Welche Schargerade ist parallel zu E ? Ist sie echt parallel ?

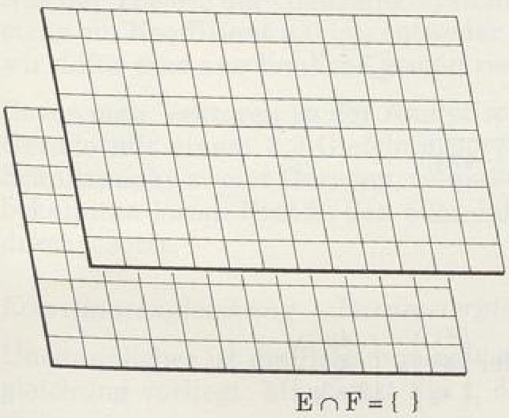
• **8.** E_b: $2x_1 - x_2 + b = 0$, $\quad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2-a\\4-2a\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}a-2\\0\\2\end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von a und b gibt es genau einen Schnittpunkt ?
b) Für welche Werte von a und b sind E_b und h_a echt parallel ?
c) Für welche Werte von a und b liegt h_a in E_b ?

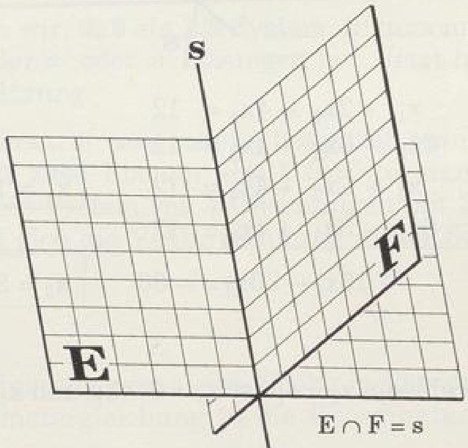
4. Mehrere Ebenen

Zwei Ebenen

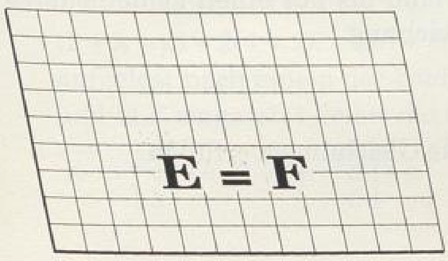
Zwei Ebenen können sich in einer Gerade schneiden, echt parallel oder identisch sein.



E und F sind echt parallel



E und F schneiden sich in s

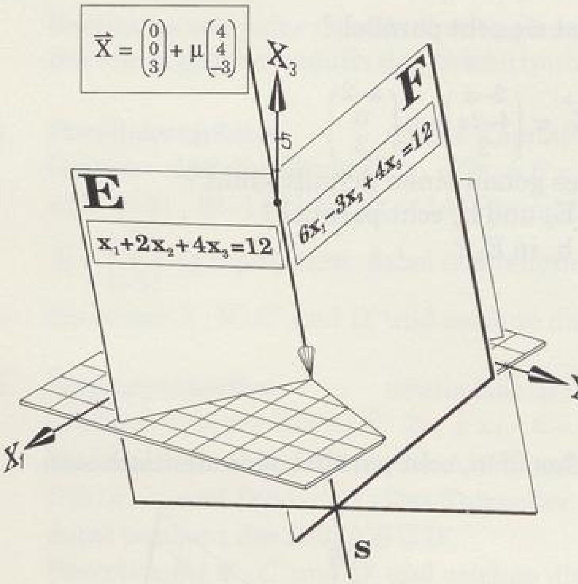


E und F sind identisch

Um den richtigen Fall herauszufinden, nehmen wir zunächst immer an, daß sich beide Ebenen schneiden, und suchen die Schnittgerade. Die Berechnung der Schnittgerade ist mit Koordinatengleichungen am einfachsten.

Koordinatengleichung – Koordinatengleichung

Die Koordinaten der Punkte, die in beiden Ebenen liegen, müssen beide Koordinatengleichungen erfüllen, also Lösungen eines 2,3-Gleichungssystems sein.



$$
\begin{array}{lrcl}
E: & x_1 + 2x_2 + 4x_3 &=& 12 \\
F: & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &=& 12
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl|l}
\text{I} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 &=& 12 & \boxed{x_1 = 12 - 2x_2 - 4x_3} \\
\text{II} & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &=& 12 & \\
\hline
\text{II}' & -15x_2 - 20x_3 &=& -60 & \boxed{x_3 = 3 - \frac{3}{4}x_2}
\end{array}
$$

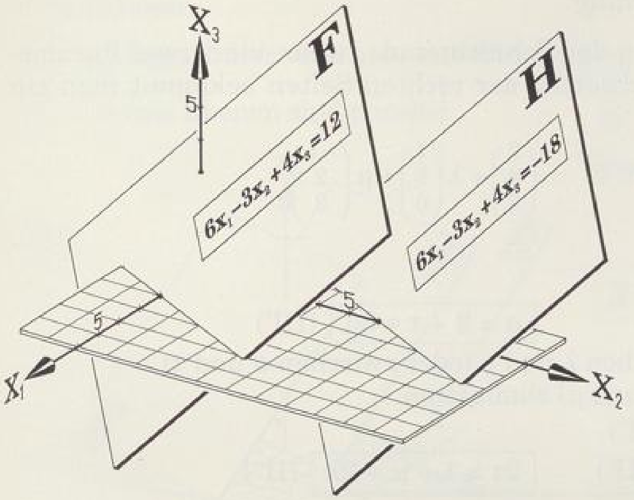
Bei Wahl von $x_2 = 4\mu$ ist $x_3 = 3 - 3\mu$ und $x_1 = 4\mu$, oder $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\mu\\4\mu\\3-3\mu\end{pmatrix}$

Gleichung der Schnittgerade s von E und F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$.

Die Parallelität zweier Ebenen erkennt man bei Koordinatengleichungen mit einem Blick: Die Koeffizienten der x_i der einen Gleichung sind bis auf einen gemeinsamen Faktor identisch mit den Koeffizienten der andern Gleichung:

$$
\begin{array}{lrcl}
F: & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &=& 12 \\
H: & 12x_1 - 6x_2 + 8x_3 &=& -36
\end{array}
$$

Es gibt keinen Punkt, dessen Koordinaten beide Gleichungen erfüllen.
H und F sind echt parallel.



Ist die ganze Gleichung der einen Ebene ein Vielfaches der andern, so sind beide Ebenen identisch:

F: $\quad 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$
G: $-3x_1 + 1{,}5x_2 - 2x_3 = -6$
Die Gleichung von F ist das (–2)-fache der Gleichung von G.
F und G sind identisch.

Aus der Theorie der Gleichungssysteme wissen wir, daß ein 2,3-System, in dem mindestens ein Koeffizient $\neq 0$ ist, entweder keine oder ∞^1 oder ∞^2 Lösungen hat. Jetzt haben wir dafür eine anschauliche geometrische Erklärung.

Bevor man Vektoren in der Analytischen Geometrie verwendete, beschrieb man eine Gerade mit einem 2,3-Gleichungssystem (mit zwei Ebenen also!). Suchte man den Schnittpunkt zweier Geraden, so mußte man ein System von 4 Gleichungen mit 3 Unbekannten lösen. Erst in den 60er-Jahren hat sich die Vektorrechnung in der Schule durchgesetzt.

Koordinatengleichung – Parametergleichung

Umständlicher ist die Bestimmung der Schnittgerade, wenn eine Ebene in Parametergleichung vorliegt. Man setzt die x_i der Parametergleichung in die Koordinatengleichung ein:

E: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$

F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\lambda-\mu\\4+2\lambda+2\mu\\3+3\mu\end{pmatrix}$ in E eingesetzt ergibt

$(2 + \lambda - \mu) + 2(4 + 2\lambda + 2\mu) + 4(3 + 3\mu) = 12, \quad 5\lambda + 15\mu = -10,$

aufgelöst nach einem der beiden Parameter $\quad \lambda = -2 - 3\mu$

und in F eingesetzt liefert die Gleichung der Schnittgerade

$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + (-2-3\mu)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$

Parametergleichung – Parametergleichung

Noch langwieriger wird die Berechnung der Schnittgerade, wenn man zwei Parametergleichungen verwendet. Durch Gleichsetzen der rechten Seiten bekommt man ein 3,4-System:

$$E\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\1\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-6\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad F\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & -6\sigma + 2\tau - \lambda + \mu = & -4 \\
\text{II} & \sigma + \tau - 2\lambda - 2\mu = & 3 \\
\text{III} & \sigma - \tau \quad - 3\mu = & 2 \qquad \boxed{\sigma = 2 + \tau + 3\mu}\ (\text{III}')
\end{array}$$

Wir brauchen eine Beziehung zwischen λ und μ (oder zwischen σ und τ).
Deshalb muß man σ und τ (oder λ und μ) eliminieren.

$$\begin{array}{lrl}
\text{III}' \text{ in I} & 4\tau + \lambda + 17\mu = -8 & (\text{I}') \\
\text{III}' \text{ in II} & 2\tau - 2\lambda + \mu = 1 & (\text{II}') \qquad \boxed{2\tau = 1 - \mu + 2\lambda}\ (\text{II}'') \\
\hline
\text{II}'' \text{ in I}' & 5\lambda + 15\mu = -10\,, &
\end{array}$$

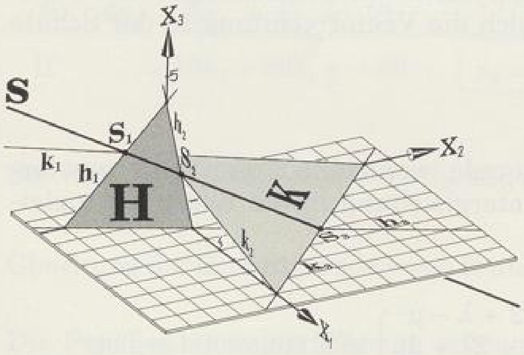
$\lambda = -2 - 3\mu$ eingesetzt in F liefert wieder die Gleichung der Schnittgerade.

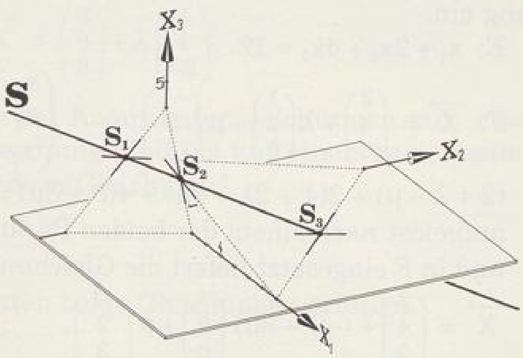
Kennt man die Spurgeraden zweier Ebenen, so geht die Zeichnung der Schnittgerade leicht von der Hand: Die Schnittgerade verbindet nämlich die Schnittpunkte von je zwei Spurgeraden in derselben Koordinatenebene.

Beispiel: H: $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$
hat die Achsenpunkte $H_{12}(0\,|\,0\,|\,4)$, $H_{13}(0\,|\,-4\,|\,0)$ und $H_{23}(2\,|\,0\,|\,0)$.

K: $x_1 + x_2 + 4x_3 - 8 = 0$
hat die Achsenpunkte $K_{12}(0\,|\,0\,|\,2)$, $K_{13}(0\,|\,8\,|\,0)$ und $K_{23}(8\,|\,0\,|\,0)$.

H und K schneiden sich in s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}$.





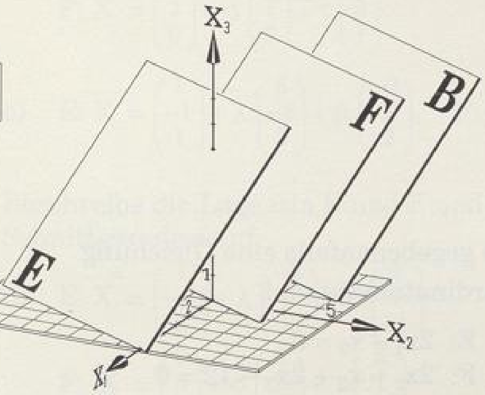
Drei Ebenen

Für die Lage dreier verschiedener Ebenen gibt es fünf charakteristische Fälle:

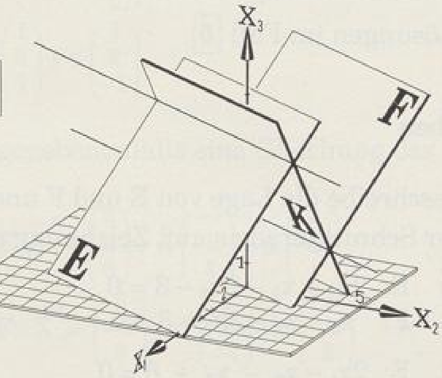
1 die drei Ebenen sind parallel

2 genau zwei Ebenen sind parallel; es gibt genau zwei parallele Schnittgeraden

1



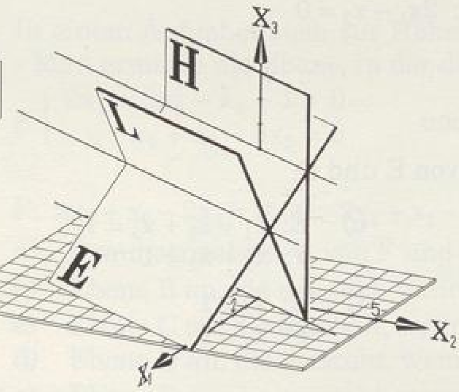
2



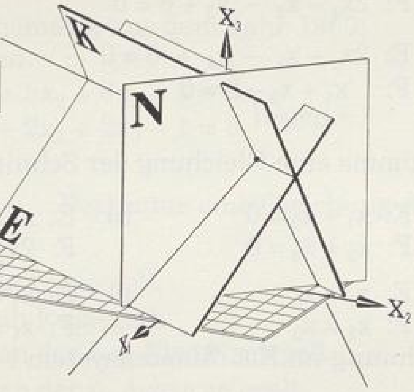
3 es gibt drei parallele Schnittgeraden

4 es gibt genau einen gemeinsamen Punkt

3

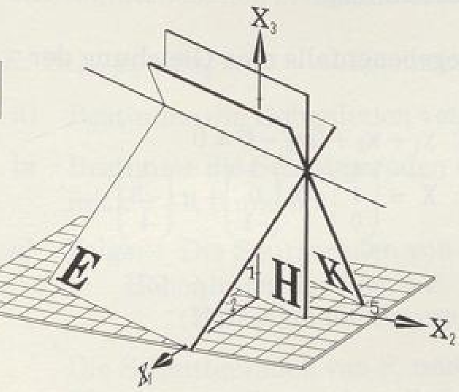


4



5 es gibt genau eine gemeinsame Schnittgerade

5



Sind die drei Ebenen durch Koordinatengleichungen gegeben (wir betrachten nur diesen Fall), dann müssen gemeinsame Punkte das zugehörige 3,3-Gleichungssystem erfüllen. Die fünf Fälle veranschaulichen die möglichen Lösungsmengen, die wir vom 3,3-System kennen:

- keine Lösung in den Fällen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ und $\boxed{3}$
- genau eine Lösung im Fall $\boxed{4}$
- ∞^1 Lösungen im Fall $\boxed{5}$

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf. Zeichnung im Koordinatensystem !

a) E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$
F: $x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

b) E: $2x_1 - x_2 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

c) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

d) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8 = 0$

e) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
F: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$

f) E: $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
F: $2x_1 - x_2 = 0$

g) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
F: $x_1 + x_2 - 3 = 0$

$\boxed{2.}$ Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F:

a) E: $x_1 + x_2 = 0$
F: $x_2 + x_3 = 0$

b) E: $x_1 = 0$
F: $2x_2 + x_3 = 1$

c) E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
F: $x_1 + x_2 = 1$

d) E: $x_1 = x_2$
F: $x_2 = x_3$

e) E: $x_1 = x_2$
F: $x_1 = x_3$

f) E: $x_1 = 1$
F: $x_2 = 2$

Zeichnung im Koordinatensystem !

3. E: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
F: $2x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0$
Wähle der Reihe nach x_1, x_2 und x_3 als Parameter und versuche, jeweils eine Gleichung der Schnittgerade zu bestimmen.

4. Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$
F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

b) E: $x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 = 0$
F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

5. Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F

a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

$F: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $F: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

c) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $F: \vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

6. Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}$ b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$

$F: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\7\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}$ $F: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

c) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $F: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

7. In einem Aufgabenbuch zur Höheren Mathematik aus dem Jahr 1960:
» Man ermittle die Ebene, in der die Geraden

$g: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ und $h: \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$ liegen.«

: 8. F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, G: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$. Bestimme eine Gleichung der

a) Symmetrieebene A von F und G.
b) Ebene B an, die entsteht, wenn man F an G spiegelt.
c) Ebene C an, die entsteht, wenn man G an F spiegelt.
d) Ebene D an, die entsteht, wenn man F an der x_1x_2-Ebene spiegelt.
e) Ebene E an, die entsteht, wenn man G an der x_2-Achse spiegelt.

9. E: $3x_1 + 2x_2 - x_3 + 18 = 0$
Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E, indem du E zum Schnitt mit den Koordinatenebenen bringst. Zeichnung im Koordinatensystem !

: 10. E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Bestimme die Höhenlinien von E in den Höhen –1, 0 und 5 über der x_1x_2-Ebene.
b) Bestimme die Schnittgeraden von E und Ebene $F_c: x_1 + 2x_2 + c = 0$ mit $c = -1$, 0 und 5 .
c) Zeige: Die Spurgeraden von F_c in der x_1x_2-Ebene stehen senkrecht auf den Höhenlinien der Ebene E.
(Betrachte die Spurgeraden im ebenen x_1x_2-Koordinatensystem.)

Die Schnittgeraden von F_c und E heißen auch *Fall-Linien* der Ebene E.
Eine Kugel rollt auf einer Fall-Linie hinab in die x_1x_2-Ebene.

$\boxed{\bullet 11.}$ $A(2 \mid -1 \mid 2)$, $B(0 \mid -2 \mid -1)$, $C(6 \mid 1 \mid 1)$
$R(-3 \mid 1 \mid -3)$, $S(-2 \mid 2 \mid -1)$, $T(-4 \mid 2 \mid -2)$
Die Abhänge eines Bergs seien angenähert die Ebenen ABC und RST.
Wegen der langen Verwitterung ist der Grat g nicht mehr vorhanden.
Dank Analytischer Geometrie läßt sich sein Verlauf rekonstruieren:
Bestimme eine Gleichung von g.
Berechne die Gratpunkte in den Höhen 0 und 9 über der x_1x_2-Ebene.
Zeichnung im Koordinatensystem !

12. Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!). Zeige, daß es nur die Lösung $(0 \mid 0 \mid 0)$ hat.
Was bedeutet das in den beiden Interpretationen ?

13. Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!).
Welche geometrische Bedeutung hat die Lösung ?

14.
$$\begin{aligned} A&: \; 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0 \\ B&: \; x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ C&: \; 2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0 \\ D&: \; 2x_1 - x_2 = 0 \\ E&: \; 2x_1 - x_2 + x_3 - 6 = 0 \end{aligned}$$
Bestimme eine Gleichung der Ebene F, die durch die Schnittgerade von D und E geht und den Schnittpunkt von A, B und C enthält.

15.
$$\begin{aligned} A&: \; 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ B&: \; 5x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ C&: \; 3x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \\ D&: \; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$
Zeige, daß sich die vier Ebenen in einem Punkt schneiden, und berechne diesen Punkt.

5. Ebenenscharen

Enthält eine Koordinatengleichung auch Parameter, dann beschreibt diese Gleichung eine Ebenenschar. Die Parameter heißen **Scharparameter**. Wir behandeln nur Scharen, bei denen die Parameter linear vorkommen, zum Beispiel

$$E_a\colon \; x_1 + (2-a)x_2 + (a-1)x_3 - 4 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

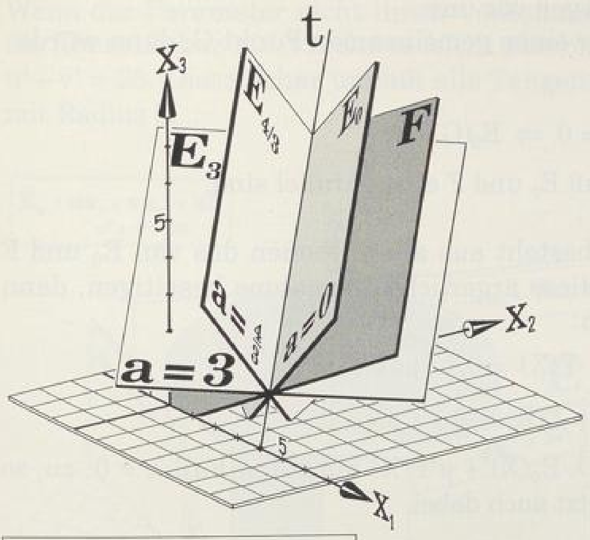
Um die Lage der Scharebenen besser zu überblicken, sortieren wir:

$$E_a\colon \; [x_1 + 2x_2 - x_3 - 4] + a[-x_2 + x_3] = 0$$

Eine Kurzschreibweise der Koordinatengleichung macht die Darstellung übersichtlicher. Die linke Seite einer Gleichung $E\colon\; n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ bezeichnen wir mit $E(X)$. Eine Ebene E ist damit festgelegt durch $E(X) = 0$, die Schar E_a durch $E_a(X) = 0$. In der Gleichung der Schar E_a erkennen wir jetzt zwei Ebenen E_0 und F

$$E_0\colon \; x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad F\colon -x_2 + x_3 = 0.$$

Kurzschreibweise für E_a: $\; E_0(X) + a \cdot F(X) = 0.$



E_a: $x_1 + (2-a)x_2 + (a-1)x_3 - 4 = 0$

Für einen gemeinsamen Punkt S von E_0 und F gilt: $E_0(S) = 0$ und $F(S) = 0$. Damit ist auch $E_a(S) = 0$. Also liegt *jeder* Schnittpunkt von E_0 und F auch in *jeder* Scharebene E_a. Zwei Ebenen mit *einem* gemeinsamen Punkt haben immer eine Gerade gemeinsam. Das heißt, alle Ebenen der Schar E_a gehen durch die Schnittgerade von E_0 und F.

Die Menge der Ebenen, die sich alle in ein und derselben Gerade schneiden, heißt **Ebenenbüschel**. Die gemeinsame Schnittgerade heißt **Trägergerade**.
Um die Trägergerade t zu berechnen, bringt man E_0 und F zum Schnitt. In unserm Beispiel ergibt sich $\quad t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wie wir wissen, geht jede Scharebene mit der Gleichung $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$ durch die Trägergerade t. Es gilt aber auch (fast) die Umkehrung:
Jede Ebene (außer F) ist in der Schar vertreten, die die Trägergerade enthält.

Beweis: $T \neq F$ sei eine beliebige Ebene durch t und P einer ihrer Punkte, der nicht auf t liegt.
Wir hätten gern: $T(X) = E_0(X) + a_t F(X)$.
Setzen wir P ein, dann ergibt sich
$T(P) = 0 = E_0(P) + a_t F(P), \Rightarrow a_t = -\frac{E_0(P)}{F(P)}$
Der Nenner ist ungleich null, weil P nicht auf F liegt. $E_{a_t} = T$, qed.

Zusammenfassung

Schneiden sich E_0 und F in t, so besteht die Schar E_a: $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$ aus allen Ebenen (bis auf F), die die Trägergerade t enthalten.

Sind E_0 und F echt parallel, so besteht die Schar E_a: $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$ aus allen Ebenen (bis auf F), die parallel zu E_0 sind.

Als Begründung für den zweiten Teil überlegen wir uns:

Hätten zwei Ebenen $E_{a_1} \neq E_{a_2}$ der Schar einen gemeinsamen Punkt G, dann würde gelten

$$\left.\begin{array}{l} E_0(G) + a_1F(G) = 0 \\ E_0(G) + a_2F(G) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(G) = 0 \Rightarrow E_0(G) = 0 \lightning$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß E_0 und F echt parallel sind.

Die Schar E_a mit $E_a(X) = E_0(X) + a \cdot F(X)$ besteht aus allen Ebenen des von E_0 und F erzeugten Büschels, bis auf F. Will man diese ärgerliche Ausnahme beseitigen, dann muß man zwei Parameter in Kauf nehmen:

Setzt man $a = \frac{\mu}{\lambda}$, so ergibt sich $E_0(X) + \frac{\mu}{\lambda} \cdot F(X) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

beziehungsweise $\lambda \cdot E_0(X) + \mu \cdot F(X) = 0$

Läßt man in der Schar $E_{\lambda,\mu}$ mit $E_{\lambda,\mu}(X) = \lambda \cdot E_0(X) + \mu \cdot F(X)$ auch den Fall $\lambda = 0$ zu, so ergibt sich $E_{0,\mu} = F$ für alle $\mu \neq 0$, und F ist jetzt auch dabei.

Außer dem Nachteil des zusätzlichen Parameters müssen wir uns jetzt auch noch damit abfinden, daß jede Ebene E_a durch unendlich viele Paare λ,μ von Parametern beschrieben wird, von denen mindestens einer ungleich 0 sein muß. Es gilt nämlich $a = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{k\mu}{k\lambda}$ mit $k \neq 0$. Das Ebenenbüschel des Beispiels hat die Gleichung

$$E_{\lambda,\mu}\colon\ \lambda x_1 + (2\lambda - \mu)x_2 + (\mu - \lambda)x_3 - 4\lambda = 0 \quad (\lambda \mid \mu) \neq (0 \mid 0)$$

Die Menge der Ebenen, die genau einen Punkt T gemeinsam haben, heißt **Ebenenbündel**; der gemeinsame Punkt T heißt **Trägerpunkt**.

Schneiden sich die Ebenen E, F und G im Punkt T, dann enthält jede Ebene der Schar $E_{a,b}$ mit $E_{a,b}(X) = E(X) + a \cdot F(X) + b \cdot G(X)$ diesen Punkt, sie gehört also zum Bündel. Es gilt nämlich $E_{a,b}(T) = E(T) + a \cdot F(T) + b \cdot G(T) = 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

Die Ebenen F und G des Bündels fehlen in der Schar. Mit einem zusätzlichen Parameter können wir auch sie aufnehmen. Setzt man $a = \frac{\mu}{\lambda}$ und $b = \frac{\nu}{\lambda}$, so ergibt sich $E_{\lambda,\mu,\nu}(X) = \lambda \cdot E(X) + \mu \cdot F(X) + \nu \cdot G(X)$, wobei mindestens ein Parameter ungleich null sein muß. So gilt zum Beispiel $E_{0,\mu,0} = F$ für $\mu \neq 0$.

1. Beispiel: Die drei Koordinatenebenen E_i: $x_i = 0$ ($i = 1,2,3$) erzeugen das Bündel $E_{\lambda,\mu,\nu}$: $\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0$ mit dem Trägerpunkt $T(0 \mid 0 \mid 0)$.

2. Beispiel: $E_{\lambda,\mu,\nu}$: $(2\lambda+\mu+2\nu)x_1 + (\mu-\lambda-\nu)x_2 + (2\lambda-\nu)x_3 - (3\mu+12\lambda-6\nu) = 0$

Um die erzeugenden Ebenen zu erkennen, sortieren wir nach λ, μ und ν:

$\lambda(2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) + \mu(x_1 + x_2 - 3) + \nu(2x_1 - x_2 - x_3 + 6) = 0$

E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

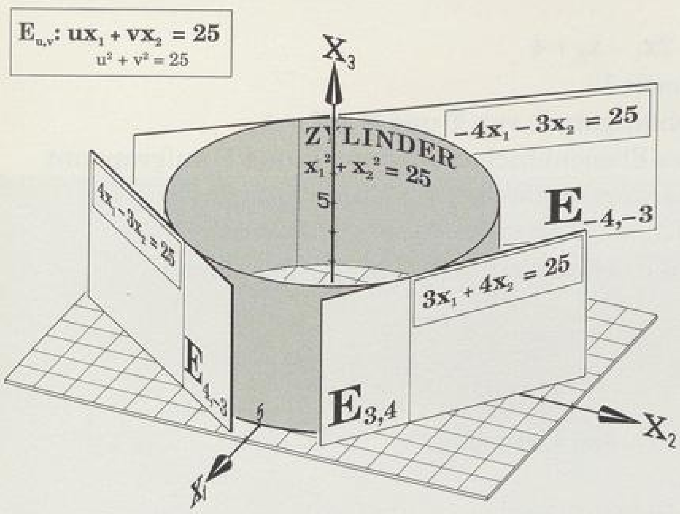
F: $x_1 + x_2 - 3 = 0$

G: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$

E, F und G erzeugen das Bündel; ihr Schnittpunkt $T(1 \mid 2 \mid 6)$ ist der Trägerpunkt (siehe Bild $\boxed{4}$ im Abschnitt 4). Dasselbe Bündel läßt sich auch einfacher darstellen, wenn man erzeugende Ebenen wählt, die parallel sind zu den Koordinatenebenen: $E_{\rho,\sigma,\tau}\colon\ \rho(x_1 - 1) + \sigma(x_2 - 2) + \tau(x_3 - 6) = 0$

$E_{\rho,\sigma,\tau}\colon\ \rho x_1 + \sigma x_2 + \tau x_3 - (\rho + 2\sigma + 6\tau) = 0$

Wenn der Parameter nicht linear vorkommt, dann läßt sich – außer in Sonderfällen – die Ebenenschar nicht mehr so leicht überblicken, zum Beispiel $E_{u,v}$: $ux_1 + vx_2 = 25$ mit $u^2 + v^2 = 25$. Diese Schar umfaßt alle Tangentialebenen eines Zylinders um die x_3-Achse mit Radius 5.



Aufgaben

$\boxed{1.}$ Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t der Schar E_a. Gib eine Gleichung der Ebene des zugehörigen Büschels an, die nicht in der Schar ist.

a) E_a: $ax_1 + (1+a)x_2 - 2x_3 = 6$

b) E_a: $(1-a)x_1 + (1+a)x_2 = a$

c) E_a: $x_1 + (2-3a)x_2 - (3-2a)x_3 = 0$

2. Die Schar E_a werde aufgespannt von den Ebenen E_0 und F.
Bestimme in der Schar E_a die Ebene, die den Punkt $P(1\,|-1\,|\,1)$ enthält.

a) E_0: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
F: $x_1 + x_2 = 2$

b) E_0: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
F: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

c) E_0: $2x_1 = 2$
F: $x_2 = 1$

d) E_0: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$
F: $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2$

• **3.** Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels $E_{\lambda,\mu}$ auf

a) mit der Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

b) mit der Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \tau\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

c) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur Ebene $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1992$

d) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur x_1-Achse und um Vektor $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ Zu

4. Von Ebenen, die in Parameterform vorliegen, findet man die Schnittgerade, wenn auch mühsam, durch Gleichsetzen (Seite 194). Jemand will dieses Verfahren auf die Koordinatengleichungen anwenden und setzt die beiden linken Seiten der Gleichungen gleich:

E: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

F: $2x_1 - x_3 + 4 = 0$

Gleichsetzen: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 2x_1 - x_3 + 4$

a) Was hat er wirklich bekommen ?

b) Stelle eine Gleichung der Schnittgerade von E und F auf.

c) Bestimme eine Gleichung des Ebenenbüschels, das von E und F aufgespannt wird. Für welchen Parameterwert ergibt sich die Ebene
H: $x_1 + x_2 - 3x_3 + 8 = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zu **a)** ?

d) Zeige durch Rechnung, daß die Schnittgerade von **b)** in jeder Ebene des Büschels liegt.

$\boxed{5.}$ E_a: $x_1 + ax_2 + (2-a)x_3 = 2a + 4$

a) Welche Scharebene geht durch den Ursprung, welche durch (1 | 1 | 1) ?

b) Welche Scharebene ist parallel zur x_3-Achse ?

c) Welche Scharebene hat ein gleichseitiges Spurdreieck ?

d) Welche Scharebene steht senkrecht auf der x_1x_3-Ebene ?

e) Welche Scharebene ist parallel zur Gerade $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

• 6. E_a: $x_1 + (1-2a)x_2 + ax_3 = 1$

F_b: $x_1 + bx_2 + (1-2b)x_3 = 1$

a) Begründe, daß keine Scharebene E_a durch den Ursprung geht.

b) Bestimme die Trägergerade von E_a. Welche Ebene fehlt in der Schar?

c) Die Schnittgeraden s_a von E_a und F_a bilden eine Schar mit dem Parameter a. Bestimme eine Gleichung von s_a. Was ist los bei $a = \frac{1}{3}$?

d) Für welche Werte von a und b ist die Schnittgerade von E_a und F_b parallel zur x_2-Achse ?

e) Kann die x_1-Achse Schnittgerade von E_a und F_b sein ?

• 7. E: $x_1 + x_2 = 0$

F: $x_2 + x_3 = 0$

G: $2x_1 - x_2 - x_3 = 4$

a) Stelle eine Gleichung des Ebenenbündels $H_{\lambda,\mu,\nu}$ auf, das von E, F und G aufgespannt wird. Gib den Trägerpunkt T an.

b) Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels $K_{\sigma,\tau}$ auf, das im Bündel $H_{\lambda,\mu,\nu}$ steckt und den Ursprung enthält.

c) Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t des Büschels $H_{\lambda,0,\nu}$.

d) Bestimme eine möglichst einfache Darstellung $L_{\alpha,\beta,\gamma}$ von $H_{\lambda,\mu,\nu}$.

e) Welche Scharebene von $H_{\lambda,\mu,\nu}$ ist parallel zur x_1x_2-Ebene ?
Welche Scharebenen sind parallel zur x_1-Achse ?