Anschauliche analytische Geometrie

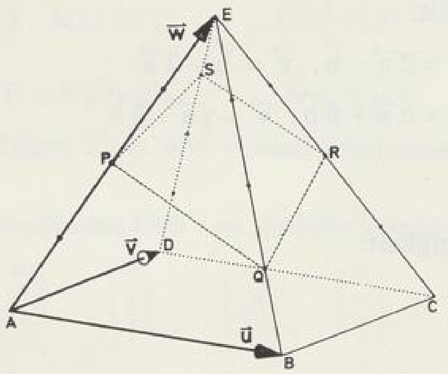
Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Anwendungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

17. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ spannen die Pyramide ABCDE auf mit A(2 | – 3 | 0), B(2 | 5 | 0), D(–2 | –1 | 0) und E(0 | 2 | 7). ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.



18. $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen die Pyramide ABCDE auf. ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.

2. Anwendungen

Mit der linearen Unabhängigkeit kann man Teilverhältnisse in ebenen und räumlichen Figuren bestimmen und außerdem untersuchen, ob sich Geraden im Raum schneiden. Dazu zwei Beispiele.

$\boxed{1}$ Die Seitenhalbierenden im Dreieck teilen sich im Verhältnis 2 : 1 von der Ecke aus.

Vektorbeweis

Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spannen das Dreieck ABC auf.

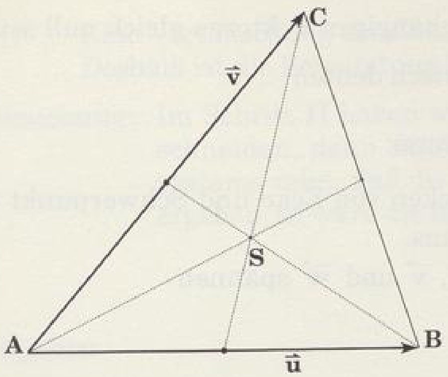
Geschlossene Vektorkette mit S als Ecke: $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \vec{o}$

Wir drücken die drei Vektoren der Vektorkette mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus:

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{u}$

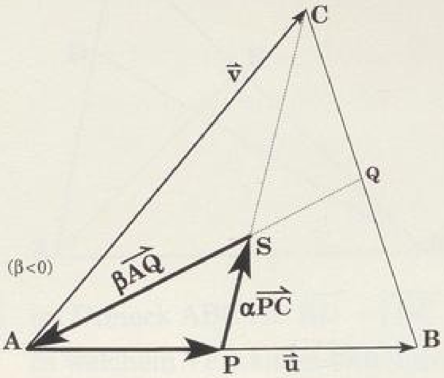
$\overrightarrow{PS} = \alpha\,\overrightarrow{PC} = \alpha(-\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v})$

$\overrightarrow{SA} = \beta\,\overrightarrow{AQ} = \beta(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v})$ (β ist negativ!)



Einsetzen in die Vektorkette: $\frac{1}{2}\vec{u} + \alpha(-\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \vec{o}$

Sortieren: $\vec{u} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \vec{v} \cdot (\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \vec{o}$



Weil $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten der Nullsumme gleich null sein:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0$$
$$\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = -\frac{2}{3}$.

Das heißt, $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ oder $\mathbf{\overline{PS} : \overline{SC} = 1 : 2}$ und $\overrightarrow{SA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$ oder $\mathbf{\overline{AS} : \overline{SQ} = 2 : 1}$.

Diese Teilverhältnisse ergeben sich unabhängig davon, welche Seitenhalbierende man nimmt. Deshalb gehen alle drei Seitenhalbierenden durch denselben Punkt S; dieser teilt sie im Verhältnis 2 : 1.

Dieses Beispiel zeigt das Prinzip, nach dem man solche Aufgaben löst:

I Skizze machen und Vektoren festlegen:
2 linear unabhängige Vektoren bei Aufgaben in der Ebene
3 linear unabhängige Vektoren bei Aufgaben im Raum

II geschlossene Vektorkette mit Teilpunkt als Ecke hinschreiben

III jeden Vektor der Vektorkette durch die linear unabhängigen Vektoren ausdrücken, dabei Variable für unbekannte Koeffizienten einführen

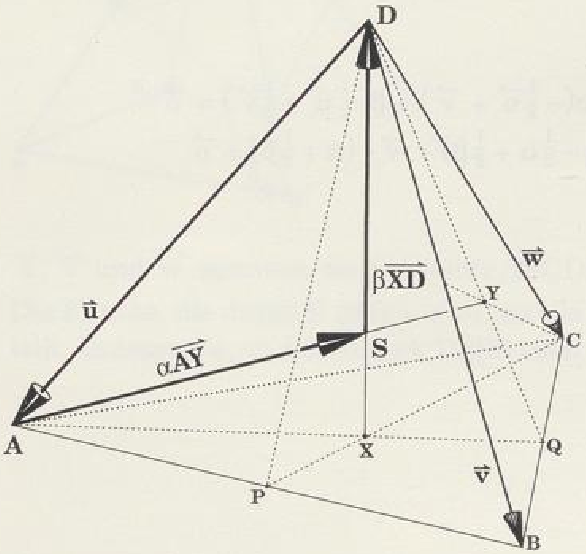
IV sortieren und die Koeffizienten der linear unabhängigen Vektoren gleich null setzen

V Gleichungssystem lösen und Ergebnis geometrisch deuten

Nach diesem Schema lösen wir eine Aufgabe im Raum:

$\boxed{2}$ Im Tetraeder teilen sich die Verbindungsstrecken von Ecke und Schwerpunkt der Gegenfläche im Verhältnis 3 : 1 von der Ecke aus.

Beweis: Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen das Tetraeder ABCD auf.



I $\vec{u} = \overrightarrow{DA},\ \vec{v} = \overrightarrow{DB},\ \vec{w} = \overrightarrow{DC}$

II $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DA} = \vec{o}$

III $\overrightarrow{AS} = \alpha\,\overrightarrow{AY} = \alpha(-\vec{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DQ}) = \alpha(-\vec{u} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}))$

$= \alpha(-\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w})$

$\overrightarrow{SD} = \beta\,\overrightarrow{XD} = \beta(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \vec{w}) = \beta(\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \vec{w}) - \vec{w})$

$= \beta(\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}) - \vec{w}) = \beta(-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w})$

$\overrightarrow{DA} = \vec{u}$

Einsetzen: $\alpha(-\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}) + \beta(-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}) + \vec{u} = \vec{o}$

IV $\vec{u}\cdot(1 - \alpha - \frac{1}{3}\beta) + \vec{v}\cdot(\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta) + \vec{w}\cdot(\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta) = \vec{o}$

$1 - \alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

$\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

$\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

V $\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{3}{4};\quad \overrightarrow{SD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{XD},\quad \mathbf{\overline{DS} : \overline{SX} = 3 : 1}$

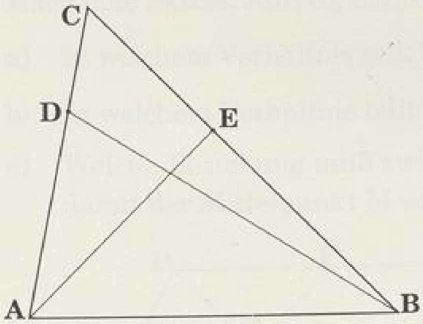
$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AY},\quad \mathbf{\overline{AS} : \overline{SY} = 3 : 1}$

Eine Vertauschung der Ecken hat keinen Einfluß aufs Ergebnis.
Deshalb ist die Behauptung bewiesen.

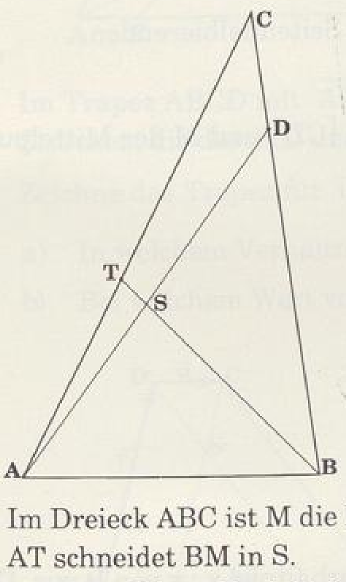
Bemerkung: Im Schritt **II** haben wir angenommen, daß sich die Geraden DX und AY schneiden, denn nur dann existiert S. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems zeigt, daß die Annahme richtig war. Hätte sich ein Widerspruch ergeben, so wäre die Annahme falsch gewesen.

Aufgaben

1. Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
In welchen Verhältnissen teilen sich [AE] und [BD] ?



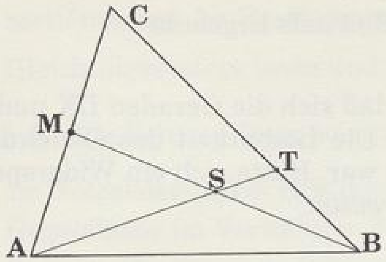
2. Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. BS schneidet AC in T.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AC] beziehungsweise S die Strecke [BT]?



3. Im Dreieck ABC ist M die Mitte von [AC]. T teilt [BC] im Verhältnis 1:2 von B aus. AT schneidet BM in S.

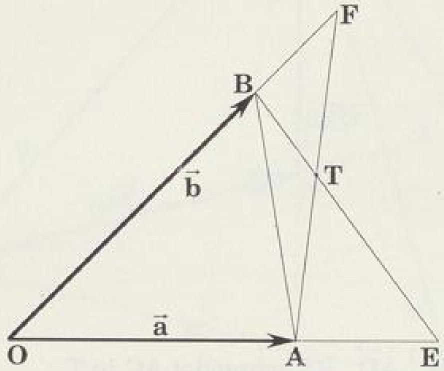
a) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [AT] von A aus ?

b) Nun sei A(0 | 0 | 0), B(2 | 2 | – 4) und C(8 | – 4 | –16). Berechne S.



4. Im Dreieck OAB ist $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = k\vec{a}$ und $\overrightarrow{OF} = m\vec{b}$.
EB und AF schneiden sich in T. Berechne

a) $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{BT}$ b) $\overline{ET} : \overline{TB}$, $\overline{AT} : \overline{TF}$

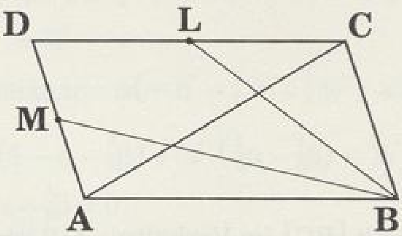


c) Berechne T für A(14 | 0), $k = \frac{3}{2}$ und B(12 | 12), $m = \frac{4}{3}$.

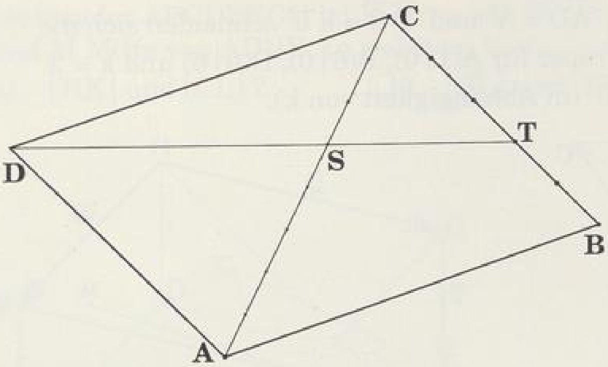
d) Zeige: Sind AB und EF parallel, so liegt T auf der Seitenhalbierenden von [AB] oder ihrer Verlängerung.

5. Im Parallelogramm ABCD ist L der Mittelpunkt von [CD] und M der Mittelpunkt von [DA]. In welchem Verhältnis teilen sich

a) [AC] und [BM] ? b) [AC] und [BL] ?



6. Im Parallelogramm ABCD teilt T die Seite [BC] im Verhältnis $x : y$ von B aus. DT schneidet AC in S. Mach eine Zeichnung für A(5 | 0), B(14 | 3), C(9 | 8), D(0 | 5) und $x : y = 2 : 3$. Zeige: S teilt die Diagonale [AC] im Verhältnis $r : s = x : y + 1$ von A aus.

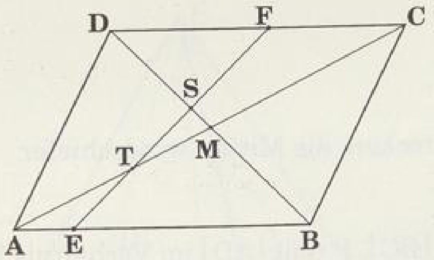


: 7. Im Parallelogramm ABCD gilt: $\overline{AE} : \overline{EB} = k$, $\overline{CF} : \overline{FD} = m$.
Mach eine Skizze: A(0 | 0), B(7,5 | 0), C(10 | 5), D(2,5 | 5), k = 1:4, m = 7:8

a) In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale [BD] ?

b) In welchem Verhältnis teilt T die Diagonale [AC] ?

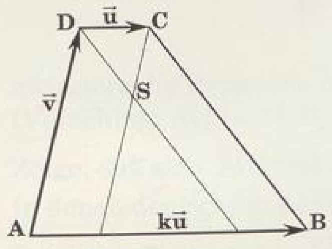
c) Welche Beziehung muß zwischen m und k bestehen, damit der Mittelpunkt M von ABCD auf [EF] liegt ?



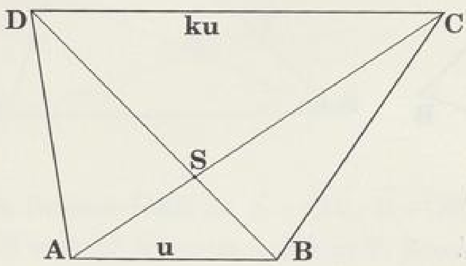
• 8. Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$ schneiden sich in S die Strecken, die durch D und C gehen und zu den Schenkeln parallel sind.
Zeichne das Trapez für $\vec{u} = \binom{2}{0}$, $\vec{v} = \binom{1,5}{6}$ und k = 4.

a) In welchem Verhältnis (in Abhängigkeit von k) teilt S die Strecken ?

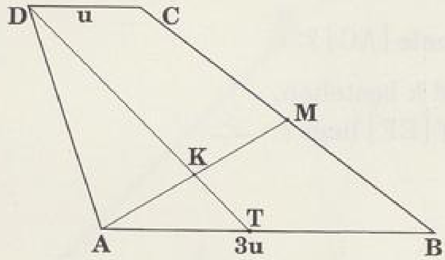
b) Bei welchem Wert von k liegt S auf AB ?



• **9.** Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{DC} = k\,\vec{u}$ schneiden sich die Diagonalen in S. Zeichne das Trapez für A(1 | 0), B(6 | 0), D(0 | 6) und k = 2. Berechne $\overline{AS} : \overline{SC}$ und $\overline{BS} : \overline{SD}$ (in Abhängigkeit von k).

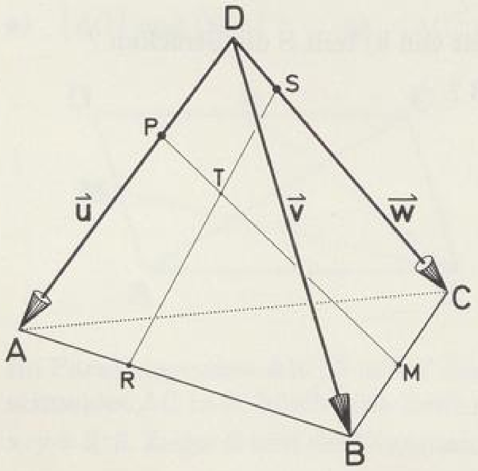


• **10.** Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{AB} = 3\,\vec{u}$ ist M die Mitte von [BC] und K die Mitte von [AM]. DK und AB schneiden sich in T. Zeichne das Trapez für A(2 | 0), B(11 | 0), D(0 | 6). Berechne $\overline{DK} : \overline{KT}$ und $\overline{AT} : \overline{TB}$.



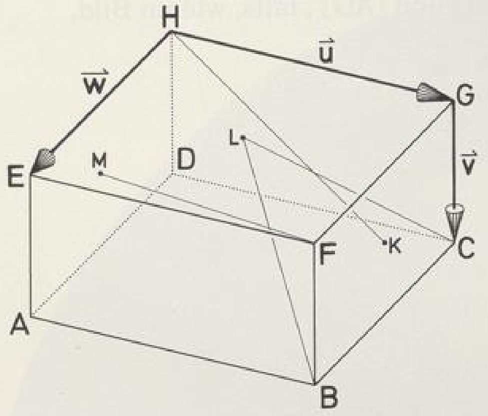
11. Zeige: Im Tetraeder halbieren sich die Strecken, die Mitten windschiefer Kanten verbinden.

12. Im Tetraeder ABCD halbiert M die Kante [BC], P teilt [AD] im Verhältnis 2 : 1. R liegt auf [AB] mit $\overrightarrow{AR} = r\,\overrightarrow{AB}$, S liegt auf [DC] mit $\overrightarrow{DS} = s\,\overrightarrow{DC}$.
Gib eine Beziehung für r und s so an, daß sich MP und RS schneiden.
In welchen Verhältnissen teilen sich [MP] und [RS] ?

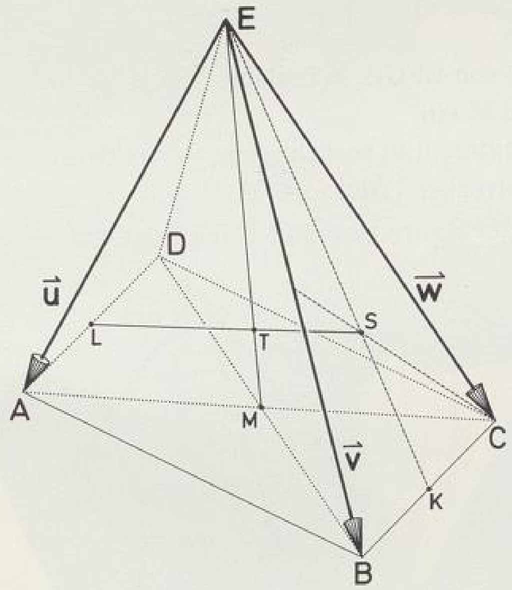


13. Im Quader ABCDEFGH ist K Mitte von BCGF, L Mitte von EFGH und M Mitte von ADHE. In welchem Verhältnis teilen sich

a) [HK] und [CL] ? b) [BL] und [FM] ?



• **14.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen die Pyramide ABCDE auf (Bild). ABCD ist ein Parallelogramm mit Mitte M, S ist der Schwerpunkt im Dreieck BCE, K und L sind Kantenmitten.



a) Skizziere die Pyramide und trage alle oben genannten Stücke ein. (Vorschlag: A(1 | −3 | 0), B(3 | 3 | 0), C(−1 | 3 | 0) und E(−1,5 | −2 | 5))

b) Zeige, daß sich ME und LS schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken [ME] und [LS] teilt.

c) Berechne T für A(1 | −3 | 0), B(3 | 3 | 0), C(−1 | 3 | 0) und E(−1,5 | −2 | 5).

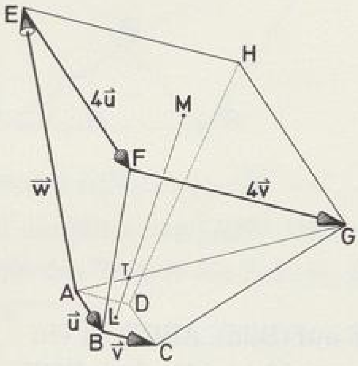
d) Die Gerade CT schneidet die Kante [AE] in X.
In welchen Verhältnissen teilt X die Strecken [AE] und [TS] ?

• **15.** $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen den Pyramidenstumpf ABCDEFGH auf.
L und M sind Mitten der Parallelogramme ABCD und EFGH.

a) Zeige, daß sich [LM] und [AG] schneiden, und berechne die Teilverhältnisse.

b) Berechne den Schnittpunkt T von [LM] und [AG], falls, wie im Bild,

$$A = O,\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$



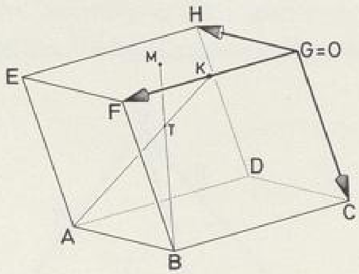
• **16.** $\vec{u} = \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ spannen

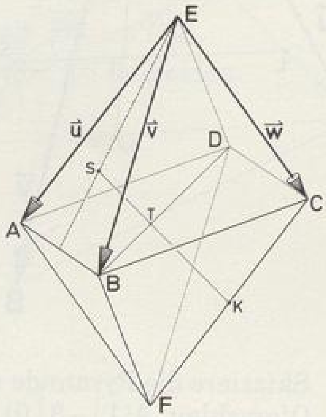
das Spat ABCDEFGH auf: M ist Mitte von EFGH, K halbiert [GF].

a) Zeichne das Spat und trage K und M ein.

b) Zeige, daß sich AK und BM schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken [AK] und [BM] teilt.

c) Berechne T und zeige, daß T auf der Raumdiagonale [DF] liegt.





• **17.** $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen das Oktaeder ABCDEF auf. ABCD ist ein Parallelogramm, sein Mittelpunkt halbiert [EF]. S ist Schwerpunkt von ABE.

a) Zeichne die Figur für A(1,5 | –2 | 0), B(2,5 | 0 | 0), C(–1,5 | 2 | 0) und E(–0,5 | 0 | 3,5).

b) In welchem Verhältnis muß K die Kante [CF] teilen, damit SK die Diagonale [BD] schneidet ?