Anschauliche analytische Geometrie

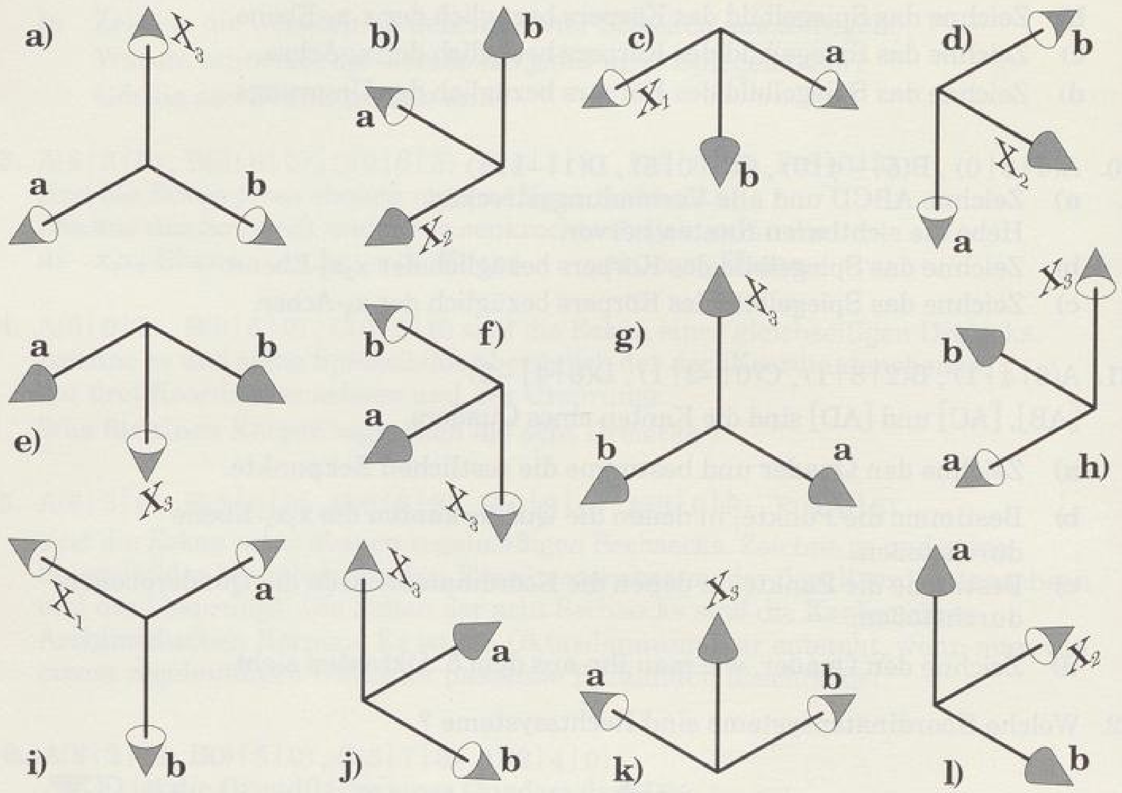
Barth, Elisabeth

München, 2000

2. Vektoren

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

23. Ersetze a und b so durch x_1, x_2 beziehungsweise x_3, daß ein Rechtssystem entsteht.



2. Vektoren

Wir wissen jetzt, wie man Punkte im Koordinatensystem darstellt. In der Analytischen Geometrie löst man geometrische Probleme durch Rechnung. Wie kann man mit Punkten beziehungsweise ihren Koordinaten rechnen ? Wie findet man zum Beispiel den Mittelpunkt der Strecke [AB] mit A(4 | 2 | 1) und B(−2 | 6 | −7) ? Die Lösung solcher und komplizierterer Aufgaben wird sehr unübersichtlich, wenn man nur mit Koordinaten arbeitet. Gottseidank haben HERMANN GÜNTHER GRAẞMANN (Stettin 1809 bis 1877 Stettin) und WILLIAM ROWAN HAMILTON (Dublin 1805 bis 1865 Dunsink) etwa Mitte des 19. Jahrhunderts ein nützliches Werkzeug geschaffen, das das Koordinatenrechnen sehr vereinfacht: die Vektoren.

HERMANN GRAẞMANN war ausgebildeter Theologe. Er lehrte als Gymnasiallehrer Religion, Chemie, Mineralogie, Physik, Mathematik, Deutsch und Latein. Obendrein war er ein bedeutender Sanskrit-Forscher, komponierte und gab eine Volksliedersammlung heraus. Doch war es ihm nicht gegeben, seine Ideen den Mitmenschen zu vermitteln. Er schaffte es nie, Universitätsprofessor zu werden, seine Bewerbungen wurden immer

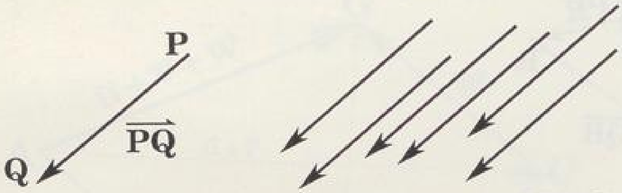
abgelehnt mit dem Urteil: originell, aber unverständlich. Auch sein Hauptwerk »Die lineale Ausdehnungslehre« von 1844 – er stellte darin zum ersten Mal die Vektorrechnung vor – blieb lange Zeit verkannt.
Etwa gleichzeitig mit GRAßMANN entwickelte WILLIAM HAMILTON die Quaternionenrechnung als Erweiterung des Rechnens mit komplexen Zahlen. Er war es, der darin die Bezeichnung »Vektor« eingeführt hat.
JOSIAH WILLARD GIBBS, amerikanischer Mathematiker und Physiker, (New Haven 1839 bis 1903 New Haven) und OLIVER HEAVISIDE, englischer Physiker, (London 1850 bis 1925 Homefield in Torquay) haben die Vektorrechnung vor allem für physikalische Anwendungen ausgebaut.
Nach und nach fanden auch die Mathematiker Gefallen an diesem neuen Instrument. Anfang des 20. Jahrhunderts hat sich die Vektorrechnung durchgesetzt. In vielen mathematischen und technischen Disziplinen ist sie heute unentbehrlich.

Was sind Vektoren?

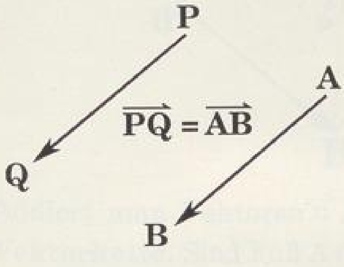
Die Addition von Zahlen läßt sich mit Pfeilen veranschaulichen. Pfeile addiert man, indem man sie »Fuß an Spitze« aneinanderhängt. Der Ergebnispfeil geht vom Fuß des ersten zur Spitze des letzten Pfeils. Diese Pfeilrechnung erweitern wir jetzt auf den Raum.

$$3 + (-9) = -6$$

Ein Pfeil ist festgelegt durch ein Paar von Punkten. Für einen Pfeil, der von P nach Q geht, schreibt man $\overrightarrow{PQ}$. Wie bei der Zahlen-Pfeilrechnung sind auch jetzt nur Länge und Richtung maßgebend. Wir nennen Pfeile **parallelgleich**, wenn sie dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben. Für parallelgleiche Pfeile verwenden wir das Gleichheitszeichen und schreiben $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



parallelgleiche Pfeile



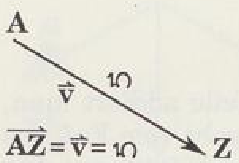
Als Sammelbegriff für die Menge aller parallelgleichen Pfeile verwenden wir die Bezeichnung **Vektor**. Jeder Pfeil dieser Menge heißt **Repräsentant** des Vektors. Oft nennt man auch die Pfeile selber kurz und bündig Vektoren.

Eine ähnliche Unterscheidung macht man auch bei den Brüchen. $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{-18}{-24}, \frac{51}{68}$ ... sind Repräsentanten des Bruchs mit dem Wert 0,75. Auch hier nennt man jeden Repräsentanten einfachheitshalber selber Bruch.

Wir fassen zusammen:

> **Definition**
>
> Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist die Menge aller zum Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ parallelgleichen Pfeile.

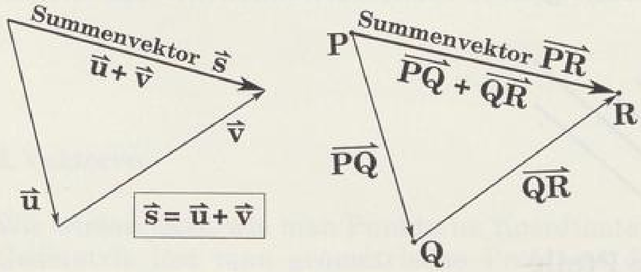
Der Vorteil dieser Definition besteht darin, daß ein Vektor an jedem Raumpunkt als Pfeil zur Verfügung steht.



Um einen Vektor unabhängig vom Repräsentanten zu bezeichnen, verwendet man auch kleine bepfeilte lateinische oder kleine deutsche Buchstaben.

Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren im Raum (und in der Ebene) ist so festgelegt:
Man hängt an einen Pfeil des 1. Summanden einen passenden Pfeil des 2. Summanden, das heißt, einen Pfeil, der da anfängt, wo der erste aufhört. Der Ergebnispfeil führt vom Fuß des ersten zur Spitze des zweiten Pfeils. Er legt den Ergebnisvektor fest.



Bezeichnet man die Anfangs- und Endpunkte der Pfeile mit Buchstaben, dann sieht die Addition so aus:

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}}$$

Regel von CHASLES (sprich schaal)

(Michel CHASLES, französischer Mathematiker, Epernon 1793 bis 1880 Paris)

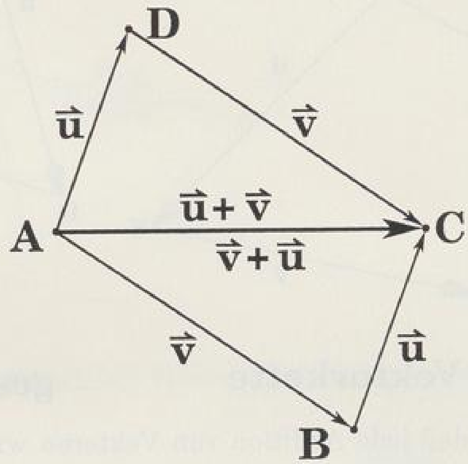
Für diese Vektoraddition gelten dieselben Rechenregeln wie für die Addition von Zahlen:

Kommutativgesetz der Vektoraddition

$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



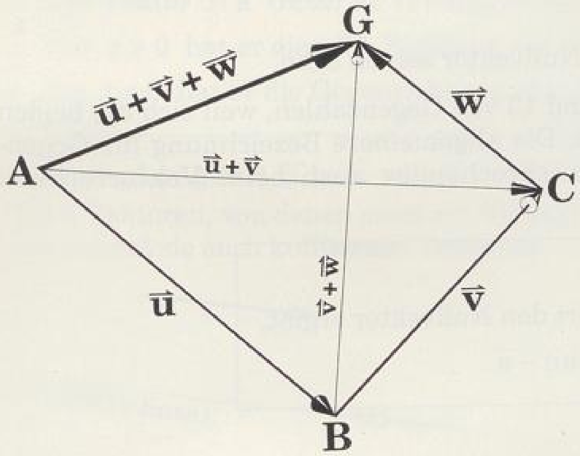
Assoziativgesetz der Vektoraddition

$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})}$

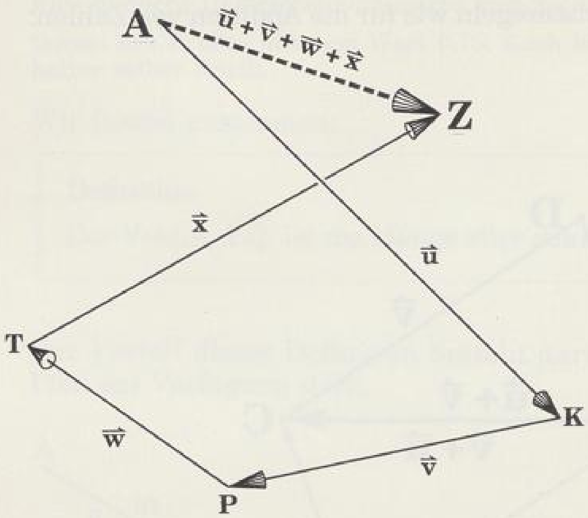
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$

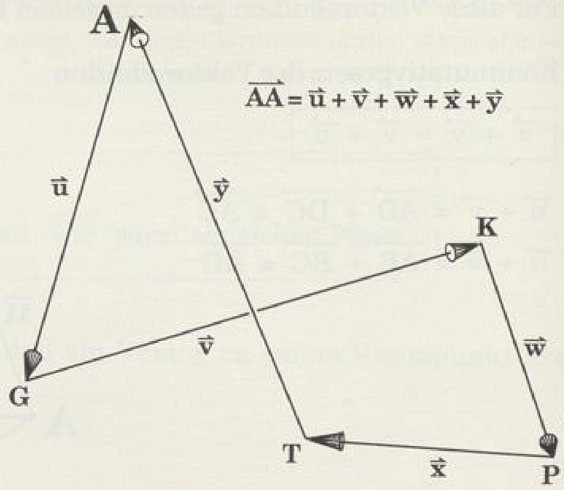
Weil die Reihenfolge der Additionen keine Rolle spielt,
läßt man die Klammern meist weg und schreibt $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



Addiert man Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ..., dann nennt man diese Aneinanderreihung auch **Vektorkette.** Sind Fuß A des ersten und Spitze Z des letzten Pfeils verschieden, so heißt die Vektorkette **offen**: der Summenvektor $\overrightarrow{AZ} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \ldots$ hat die Richtung von A nach Z. Fallen A und Z zusammen (Z = A), so heißt die Vektorkette **geschlossen**. Formal ergibt sich jetzt der Summenvektor $\overrightarrow{AA}$, ein Gebilde ohne Richtung und Ausdehnung.



offene Vektorkette



geschlossene Vektorkette

Wir verlangen, daß jede Addition von Vektoren wieder einen Vektor ergibt. Deshalb müssen wir $\overrightarrow{AA}$ als Vektor zulassen. Man nennt ihn Nullvektor. Wie die Zahl 0 bewirkt seine Addition nichts, er verhält sich »neutral«.

> **Definition des neutralen Elements**
> Der Vektor, der beim Addieren nichts ändert, heißt **Nullvektor**. Man schreibt ihn $\vec{o}$.

$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB} = \vec{o}$.

Der Nullvektor hat die Länge null.
Der Begriff der Richtung verliert beim Nullvektor seinen Sinn.

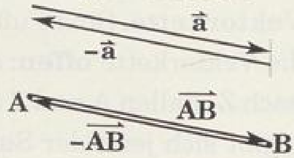
Beim Zahlenrechnen spricht man bei –13 und 13 von Gegenzahlen, weil sich die beiden beim Addieren aufheben, also null ergeben. Die allgemeinere Bezeichnung für Gegenzahl ist inverses Element. Weil man Entsprechendes auch beim Vektorrechnen braucht, definiert man:

> **Definition des inversen Elements**
> Der Vektor, der zu einem Vektor $\vec{a}$ addiert den Nullvektor ergibt, heißt **Gegenvektor** von $\vec{a}$. Man schreibt ihn $-\vec{a}$.

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$,

$\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{o}$, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

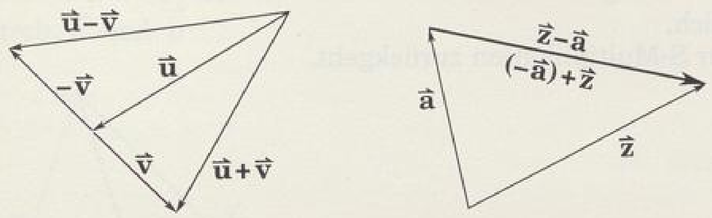
Gegenvektoren



$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$

Der Gegenvektor $-\vec{a}$ von $\vec{a}$ ist genau so lang wie $\vec{a}$ und hat die Gegenrichtung von $\vec{a}$. $\vec{a}$ ist Gegenvektor von $-\vec{a}$. $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ sind Gegenvektoren.
Statt $\vec{u} + (-\vec{v})$ schreibt man kurz $\vec{u} - \vec{v}$ und hat damit die Subtraktion von Vektoren auf die Addition zurückgeführt.

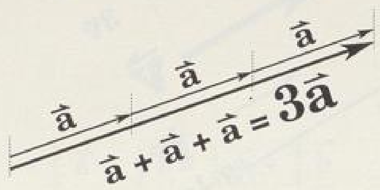
Subtraktion – Addition



S-Multiplikation

Wie beim Zahlenrechnen führt man auch bei Vektoren für Summen mit gleichen Summanden eine Abkürzung ein:

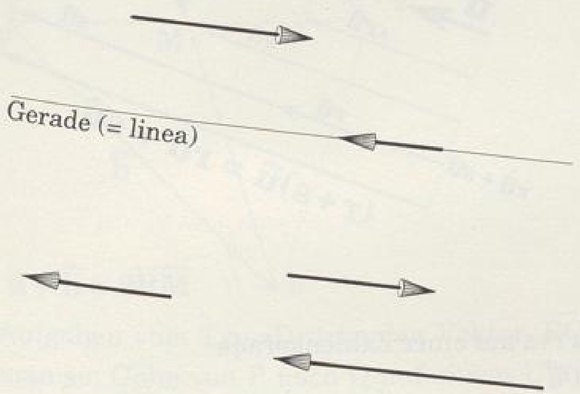
$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} =: 3 \cdot \vec{a} \quad (= 3\vec{a})$



Der Vektor $3\vec{a}$ ist also dreimal so lang wie $\vec{a}$ und hat dieselbe Richtung.
Wie bei Zahlen erweitert man diese Produktdefinition auf reelle Faktoren:

Definition
Der Vektor $r \cdot \vec{a}$ $(r \in \mathbb{R})$ ist $|r|$-mal so lang wie der Vektor $\vec{a}$.
Für $r > 0$ hat er dieselbe Richtung wie $\vec{a}$,
für $r < 0$ hat er die Gegenrichtung von $\vec{a}$.

Insbesondere gilt: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ und $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.
Zwei Vektoren, von denen einer ein Vielfaches des andern ist, sind parallel; man nennt sie auch **kollineare Vektoren**.

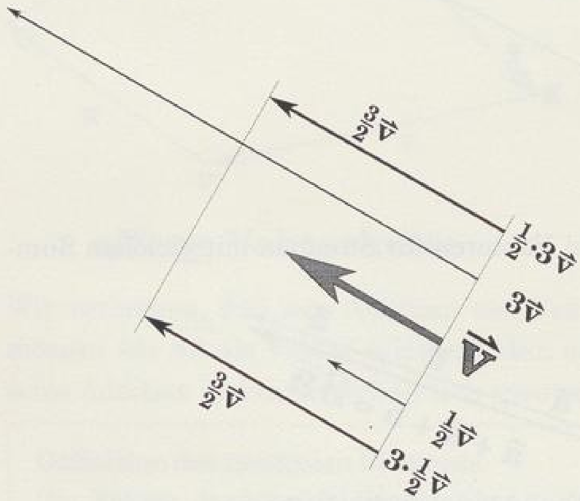


Manchmal nennt man reelle Zahlen im Gegensatz zu Vektoren auch Skalare.
Deshalb heißt die Produktbildung »Skalar·Vektor« auch **S-Multiplikation**.
Für die S-Multiplikation gelten ähnliche Gesetze wie für die Zahlen-Multiplikation:

Assoziativgesetz der S-Multiplikation

$\boxed{r\cdot(s\cdot\vec{u}) = (rs)\cdot\vec{u}}$ $r, s \in \mathbb{R}$

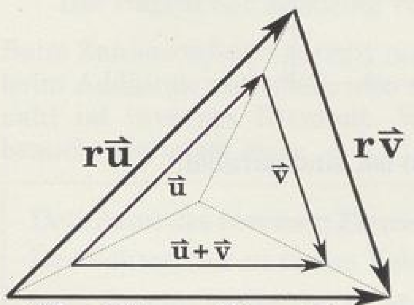
Die Begründung überlegt man sich,
indem man auf die Definition der S-Multiplikation zurückgeht.



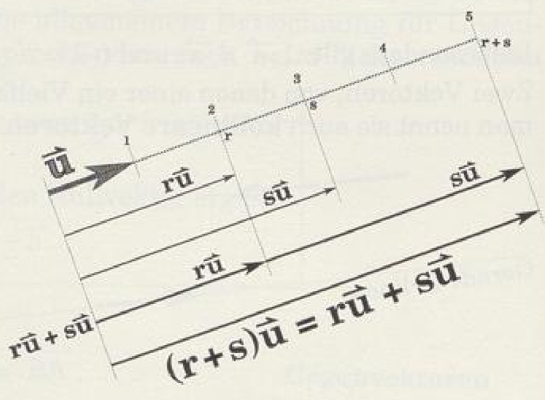
1. Distributivgesetz der S-Multiplikation

$\boxed{r\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = r\cdot\vec{u} + r\cdot\vec{v}}$ $r \in \mathbb{R}$

Die Begründung klappt mit dem Strahlensatz.



$r(\vec{u}+\vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$



2. Distributivgesetz der S-Multiplikation

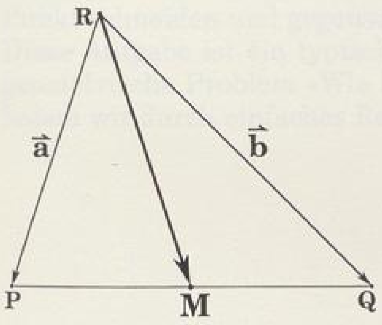
$\boxed{(r + s)\cdot\vec{u} = r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{u}}$ $r, s \in \mathbb{R}$

Dieses Gesetz beschreibt die Zahlenaddition r+s auf einer Zahlengerade
in Richtung $\vec{u}$, die Einheit ist die Länge von $\vec{u}$.

Beispiele zum Rechnen mit Vektoren

Seitenhalbierender Vektor

Die Seiten [RP] und [RQ] des Dreiecks PQR legen die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{RP}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{RQ}$ fest. Man sagt auch: »Die Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ spannen das Dreieck PQR auf«. M ist die Mitte von [PQ]. Gesucht ist eine Darstellung des seitenhalbierenden Vektors $\overrightarrow{RM}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

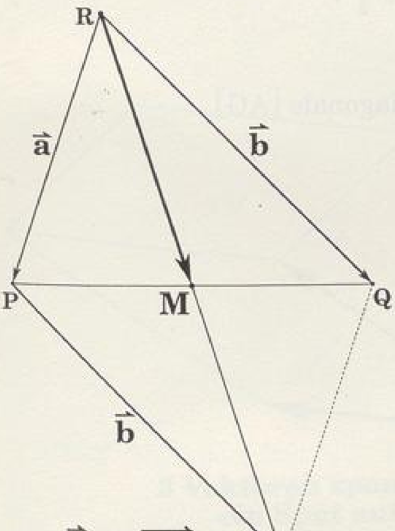


Lösung:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RM} &= \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PM}\\ &= \vec{a} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\\ &= \vec{a} + \tfrac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\mathbf{\overrightarrow{RM}} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

Der seitenhalbierende Vektor ist also das arithmetische Mittel der Vektoren, die ihn begrenzen. »Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.« Mit diesem Satz hätte man das Ergebnis gleich sehen können. Betrachte dazu das Parallelogramm RPSQ, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

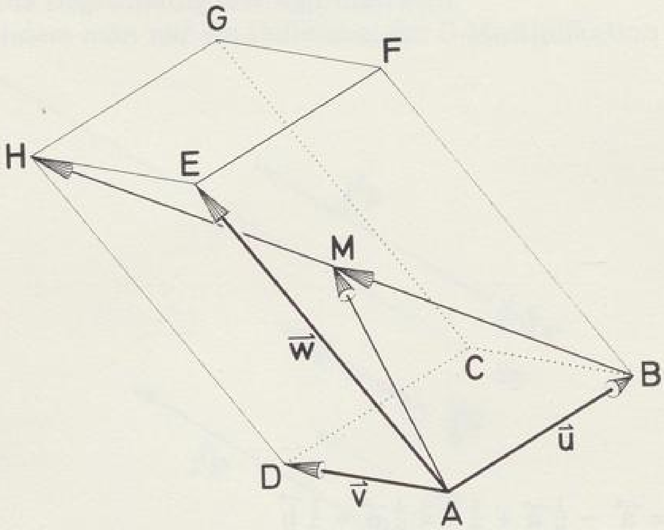


$\vec{a} + \vec{b} = 2\overrightarrow{RM}$

Aufgaben vom Typ »Drücke den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ mit den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus« löst man so: Gehe von P nach Q auf einem Umweg. Der Umweg setzt sich zusammen aus

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ oder aus Vektoren, die sich aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ berechnen lassen (offene Vektorkette). Dazu noch ein Beispiel:

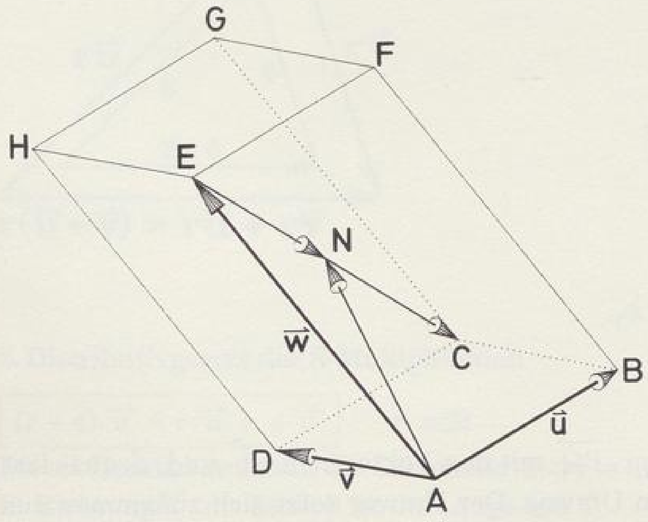
Spatmittelpunkt
Das Spat ist ein Prisma, das von sechs Parallelogrammen begrenzt ist (»schiefer Quader«). Es wird von drei Vektoren aufgespannt. Im Spat ABCDEFGH ist M der Mittelpunkt der Raumdiagonale [BH].



$\overrightarrow{AM}$ soll mit den Kantenvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ ausgedrückt werden.

Lösung:
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$
$$= \vec{u} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BH}$$
$$= \vec{u} + \tfrac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{w} + \vec{v}) = \tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{2}\vec{v}$$
$$\mathbf{\overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})}$$

Wegen $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ist M auch Mitte der Raumdiagonale [AG].

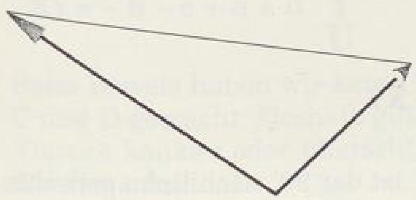


Ist N Mitte von [EC], dann gilt

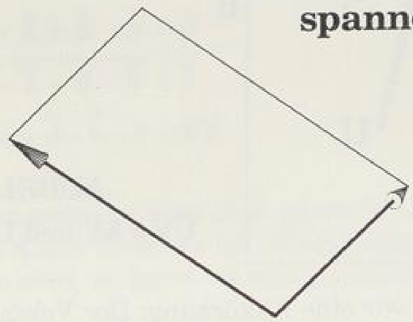
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN}\\ &= \vec{w} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}\\ &= \vec{w} + \tfrac{1}{2}(-\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}) = \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}\\ \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AM}\text{, also ist } N = M.\end{aligned}$$

Genau so kann man schließlich noch zeigen, daß M auch Mittelpunkt der Raumdiagonale [DF] ist. Damit ist bewiesen daß sich die vier Raumdiagonalen eines Spats in einem Punkt schneiden und gegenseitig halbieren.
Diese Aufgabe ist ein typisches Beispiel für die Kraft der Vektorrechnung. Das raumgeometrische Problem »Wie liegen die vier Raumdiagonalen eines Spats zueinander?« haben wir durch einfaches Rechnen mit Vektoren gelöst. Das ist Analytische Geometrie!

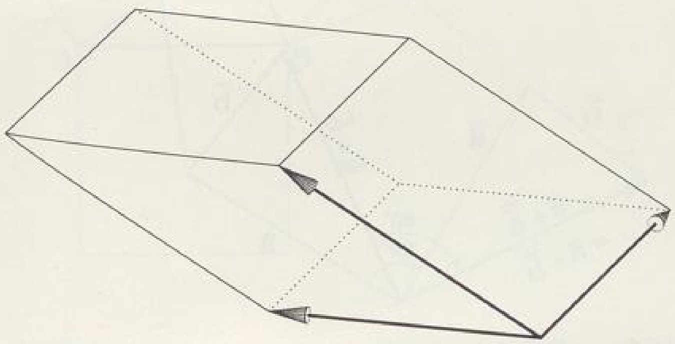
spannende Vektoren



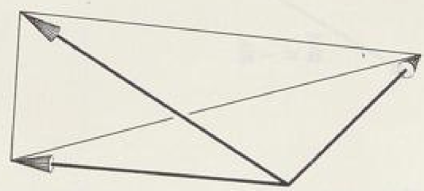
2 Vektoren spannen ein Dreieck auf



2 Vektoren spannen ein Parallelogramm auf



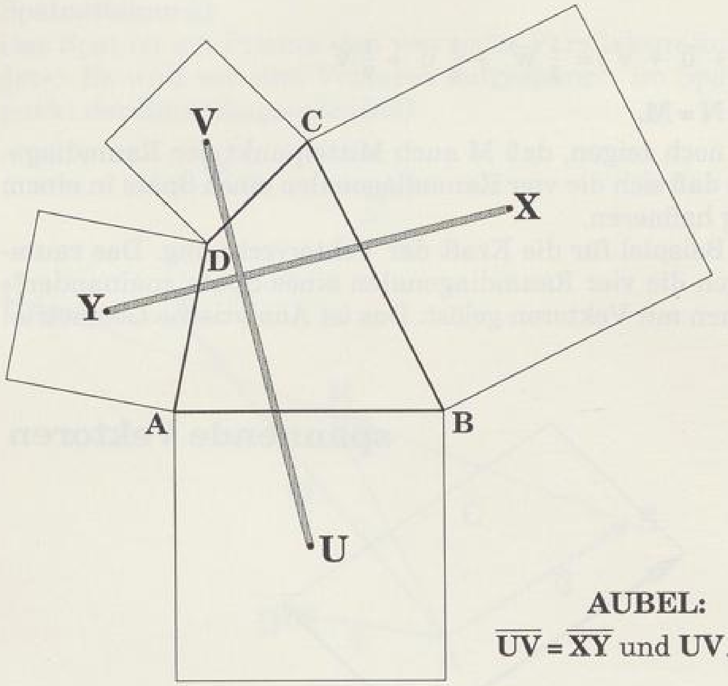
3 Vektoren spannen ein Spat auf



3 Vektoren spannen ein Tetraeder auf

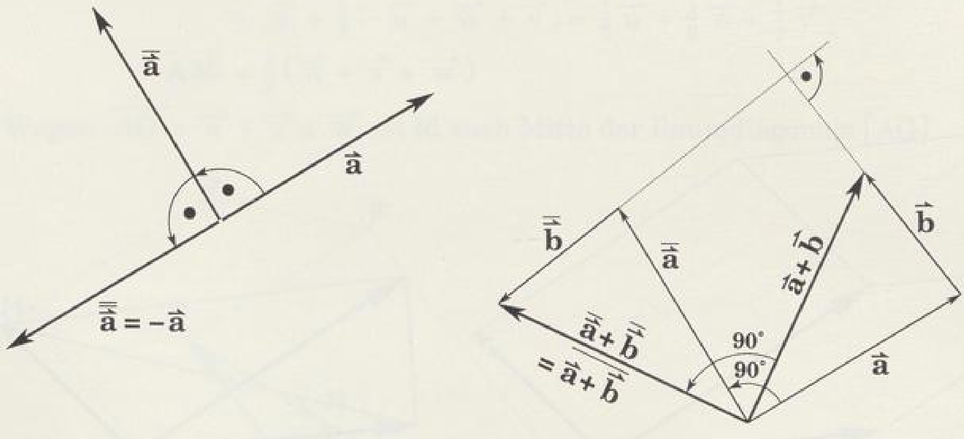
Auch für Probleme der ebenen Geometrie bietet die Vektorrechnung oft eine verblüffend einfache Lösung, zum Beispiel für den Beweis des Aubel-Theorems:

Über den Seiten eines beliebigen Vierecks zeichnet man die Außenquadrate. Verbindet man jeweils die Mitten zweier gegenüberliegender Quadrate, so entstehen zwei Strecken, die gleich lang und zueinander senkrecht sind.



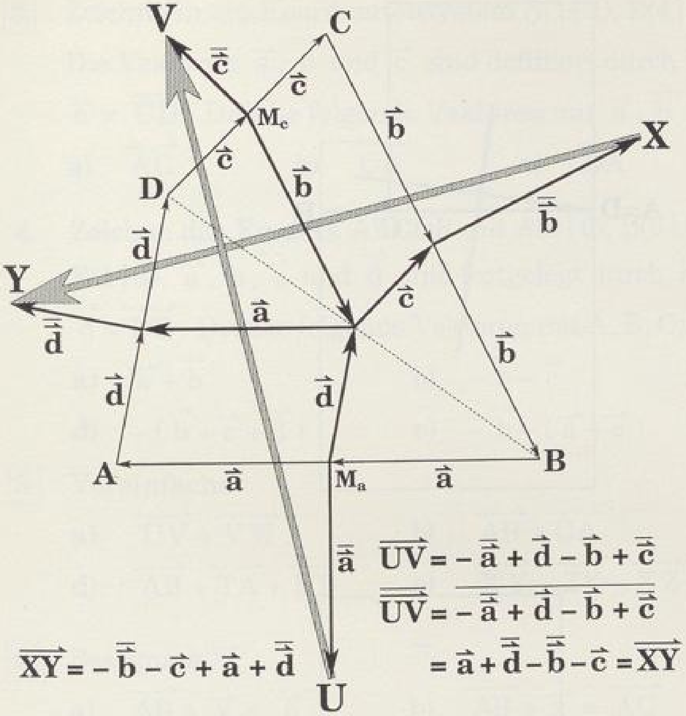
AUBEL:
$\overline{UV} = \overline{XY}$ **und** $UV \perp XY$

Im Beweis brauchen wir eine Abkürzung: Der Vektor $\overline{\vec{a}}$ ist der 90° nach links gedrehte Vektor $\vec{a}$. Dann ist $\overline{\overline{\vec{a}}} = -\vec{a}$ und $\overline{\vec{a}+\vec{b}} = \overline{\vec{a}} + \overline{\vec{b}}$. Der Beweis steht im Bild, er verwendet $\overrightarrow{M_aM_c} = \vec{d} - \vec{b}$.

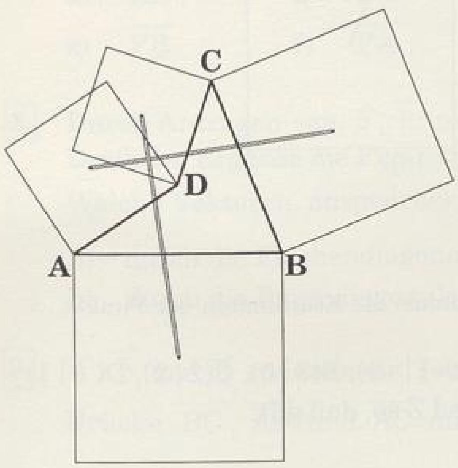


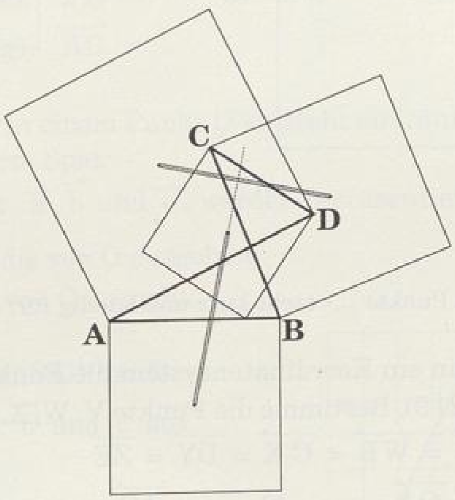
Entweder sieht man das direkt (Mittelparallelen in den Dreiecken ABD und BCD) oder erst nach trickreicher Vektorrechnung:

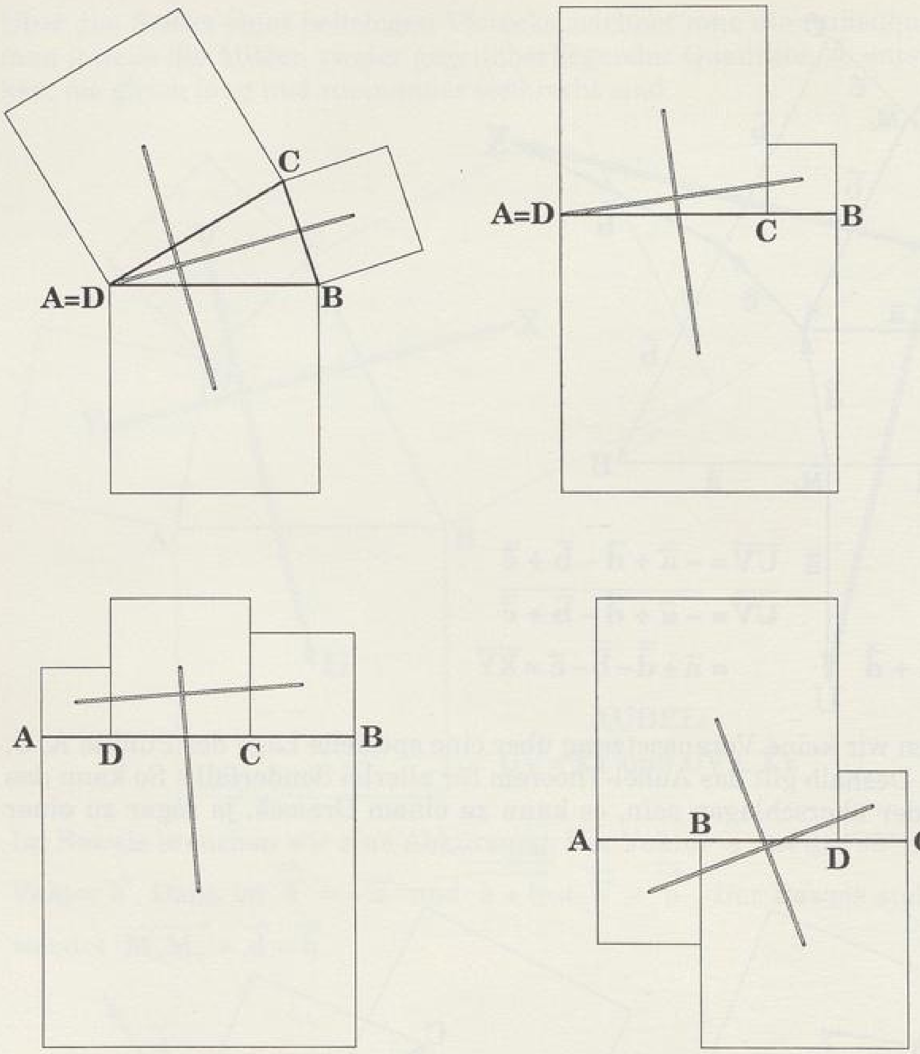
$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{M_aM_c} &= \vec{a} + 2\vec{d} + \vec{c} \\ \overrightarrow{M_aM_c} &= -\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} \end{aligned}\right\} \overrightarrow{M_aM_c} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{M_aM_c} + \overrightarrow{M_aM_c}\right) = \vec{d} - \vec{b}.$$



Beim Beweis haben wir keine Voraussetzung über eine spezielle Lage der Punkte A, B, C und D gemacht. Deshalb gilt das Aubel-Theorem für allerlei Sonderfälle: So kann das Viereck konkav oder überschlagen sein, es kann zu einem Dreieck, ja sogar zu einer Strecke entarten!







Aufgaben

»Bestimme die Punkte …« steht kurz und bündig für: »Bestimme die Koordinaten der Punkte…«

1. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte A(–1 | –2), B(3 | 0), C(2 | 2), D(0 | 1) und E(–2 | 3). Bestimme die Punkte V, W, X, Y und Z so, daß gilt:
$\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{WB} = \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{DY} = \overrightarrow{ZE}$

a) $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ **b)** $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$ **c)** $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$

2. Zeichne in ein Koordinatensystem A(2 | 0), B(8 | 4) und C(4 | 8).
Zeichne den Summenvektor.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

13
5 0 14
5

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ **e)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

3. Zeichne in ein Koordinatensystem A(1 | 1), B(4 | 1), C(6 | 3) und D(3 | 4).
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind definiert durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{BD}$

4. Zeichne das Fünfeck ABCDE mit A(0 | 0), B(3 | 0), C(4 | 1), D(4 | 4) und E(1 | 3). $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind festgelegt durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$. Drücke folgende Vektoren mit A, B, C, D und E aus:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $-\vec{b} - \vec{c}$ c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

d) $-(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ e) $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

5. Vereinfache

a) $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT}$ e) $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ}$

6. Bestimme $\vec{x}$

a) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{o}$ b) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

7. ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$.
Drücke mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

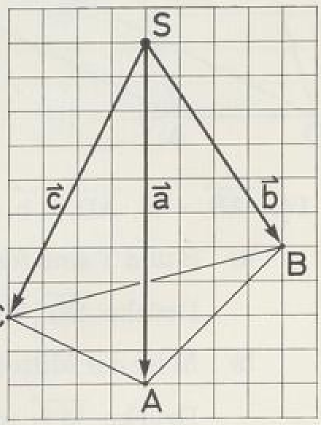
a) $\overrightarrow{ED}$ b) $\overrightarrow{DE}$ c) $\overrightarrow{FD}$ d) $\overrightarrow{FC}$

e) $\overrightarrow{FB}$ f) $\overrightarrow{FA}$ g) $\overrightarrow{AD}$

8. Durch Antragen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einem Punkt O entsteht ein räumliches Dreibein. Ergänze die Figur zu einem Spat.
Welche Vektoren, ausgedrückt mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, werden repräsentiert

a) durch die Flächendiagonalen, die von O ausgehen.
b) durch die Raumdiagonale, die von O ausgeht.

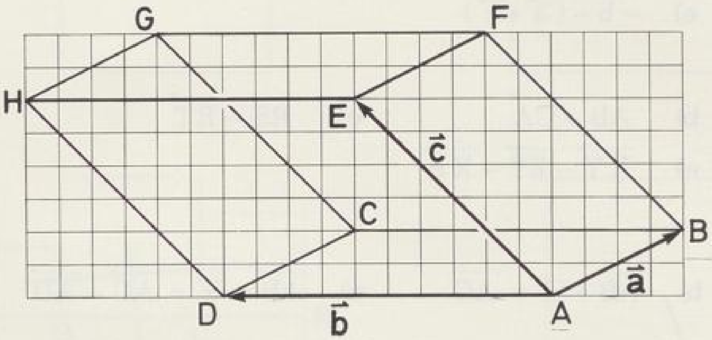
9. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein Tetraeder SABC auf.
Drücke $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



10. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ setzen im Ursprung an und bestimmen das Dreieck ABC mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. D, E und F sind die Mittelpunkte der Seiten [BC], [CA] und [AB]. Drücke $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{FD}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

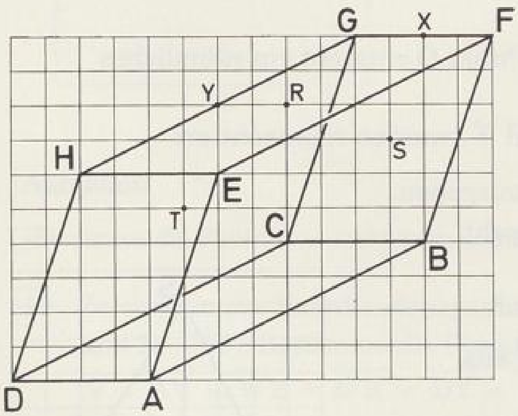
11. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ spannen das Parallelogramm ABCD auf. Nimm die Punkte E und F so an, daß gilt: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Drücke $\overrightarrow{EF}$ mit $\vec{d}$ und $\vec{b}$ aus.

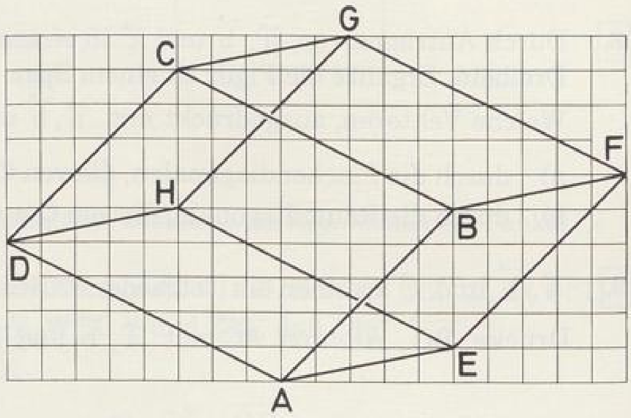
12. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf.
Drücke $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF}$ und $\overrightarrow{HB}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



13. $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf.
R, S und T sind die Mittelpunkte der Seitenflächen, X und Y sind Kantenmitten. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.

a) $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{HT}$, $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{HX}$, $\overrightarrow{YD}$ **b)** $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{YX}$, $\overrightarrow{YT}$, $\overrightarrow{XT}$, $\overrightarrow{ST}$





14. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf.

a) S und T sind festgelegt durch $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
Drücke $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{TF}$ und $\overrightarrow{ST}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

b) M ist der Mittelpunkt von [EC]. L liegt auf [EG] mit $\overrightarrow{LE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GE}$.
Drücke $\overrightarrow{ML}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

15. Zeige: In jedem Dreieck ist die Summe der drei Vektoren von den Ecken zum Schwerpunkt gleich dem Nullvektor.

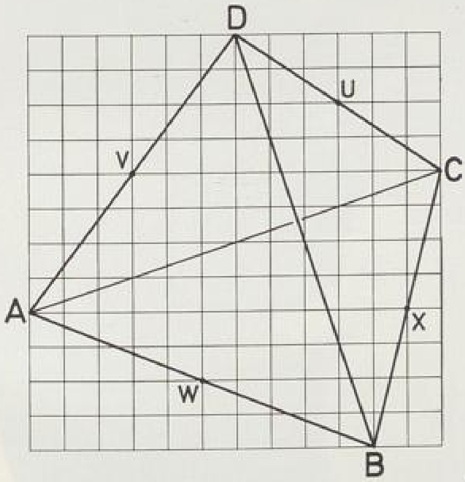
16. Eine Pyramide mit der Spitze S hat als Grundfläche das Rechteck ABCD. Die Pyramide ist festgelegt durch die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$. M ist der Mittelpunkt der Grundfläche, K ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCS. Drücke $\overrightarrow{MK}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

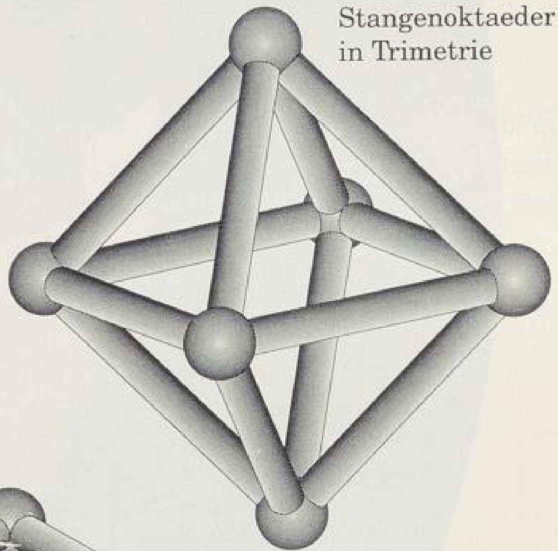
• **17.** $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ spannen das Tetraeder ABCD auf. U, V, W und X sind Kantenmitten des Tetraeders.

a) Drücke $\overrightarrow{VX}$ und $\overrightarrow{UW}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

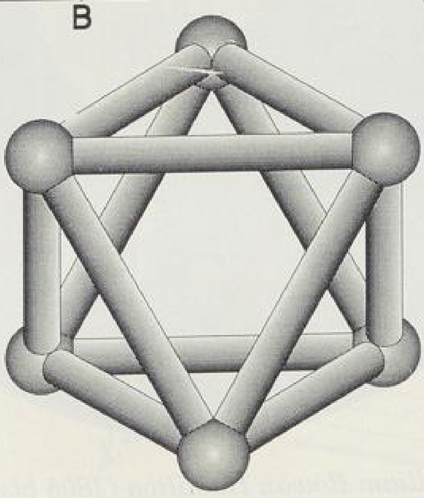
b) L ist Mittelpunkt von [VX], M ist Mittelpunkt von [UW]. Berechne $\overrightarrow{DL}$ und $\overrightarrow{DM}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Was folgt aus dem Ergebnis?

c) Berechne $\overrightarrow{UV}$ und $\overrightarrow{XW}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Was folgt aus dem Ergebnis?





Stangenoktaeder in Trimetrie



Stangenoktaeder in Isometrie