Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

4. Der Gauß-Algorithmus

4. Der Gauß-Algorithmus

Besonders schnell lassen sich lineare Gleichungssysteme lösen, wenn sie in »Dreieckform« vorliegen:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \qquad & \boxed{x_1 = 5 - 3x_2 - x_3} \\ x_2 - 2x_3 &= 6 & \boxed{x_2 = 6 + 2x_3} \\ x_3 &= -2 & \boxed{x_3 = -2} \end{aligned}$$

Jede Gleichung kann man unabhängig von den andern nach einer Unbekannten auflösen (hier sogar ohne lästige Divisionen): Man setzt wieder von unten nach oben in die eingerahmten Gleichungen ein

$$x_3 = -2, \ x_2 = 2, \quad x_1 = 1 \qquad \textbf{Lösung:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für Gleichungssysteme in dieser praktischen Form hat man eigene Bezeichnungen eingeführt. Ein System hat **Dreieckform**, wenn jede Gleichung **genau** eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende. Noch ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Die Dreieckform ist ein Sonderfall der Stufenform. Ein System hat **Stufenform**, wenn jede Gleichung **mindestens** eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende. Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Der bedeutendste deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUß (Braunschweig 1777 bis 1855 Göttingen) hat 1810 ein Verfahren angegeben, mit dem sich lineare Gleichungssysteme auf Stufenform bringen und dann bequem lösen lassen. Es war ein Nebenprodukt seiner mathematischen Untersuchungen des Planetoiden Pallas. Das Verfahren verallgemeinert das von den 2,2-Systemen her bekannte Additionsverfahren. GAUß zu Ehren bezeichnet man es als Gauß-Verfahren oder Gauß-Algorithmus.

Der Gauß-Algorithmus beruht auf zwei elementaren Umformungen, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern (Äquivalenzumformungen):

- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ($\neq 0$)
- Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer andern

Man überlegt sich leicht, daß dies Äquivalenzumformungen sind:
Wir bringen die Konstanten auf die linken Seiten und kürzen die Gleichungen ab mit $T = 0$ beziehungsweise $S = 0$. Mit X als Abkürzung für ein Lösungstupel gilt dann

$$T(X) = 0 \iff k \cdot T(X) = 0 \qquad \text{falls } k \neq 0$$

und $$\left.\begin{matrix} T(X) = 0 \\ S(X) = 0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} T(X) = 0 \\ S(X) + k \cdot T(X) = 0 \end{matrix}\right.$$

Wir führen das Gauß-Verfahren an Beispielen vor.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Die 1.Gleichung schreiben wir ab. In der 2. und 3. Gleichung beseitigen wir x_1, indem wir geeignete Vielfache der 1. Gleichung addieren:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\cdot(-3)$ + $\quad\cdot(-2)$ +

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ -10x_2 + x_3 &= -22 \\ -3x_2 + 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Jetzt beseitigen wir x_2 in der 3.Gleichung. Wir addieren ein geeignetes Vielfaches der 2.Gleichung zur dritten, die 1. und 2. Gleichung schreiben wir ab:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ -10x_2 + x_3 &= -22 \\ -3x_2 + 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

$\cdot(-\frac{3}{10})$ +

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ -10x_2 + x_3 &= -22 \\ \tfrac{17}{10}x_3 &= -\tfrac{17}{5} \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat jetzt Dreieckform. Wir besorgen uns die üblichen Rahmengleichungen und setzen von unten nach oben ein:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ -10x_2 + x_3 &= -22 \\ \tfrac{17}{10}x_3 &= -\tfrac{17}{5} \end{aligned}$$

$\boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3}$

$\boxed{x_2 = \frac{22}{10} + \frac{1}{10}x_3}$

$\boxed{x_3 = -2}$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bei der praktischen Durchführung läßt man der Einfachheit halber die Variablen weg und schreibt nur die Koeffizienten und die rechten Seiten hin. Zur besseren Übersicht trennt ein senkrechter Strich rechte und linke Seiten:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right\|$$

$\cdot(-3)$ + $\quad\cdot(-2)$ +

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array}\right\|$$

$\cdot(-\frac{3}{10})$ +

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & \frac{17}{10} & -\frac{17}{5} \end{array}$$

Das ist die Dreieckform. Jetzt schreibt man die Variablen am besten wieder hin und löst das System wie oben:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ -10x_2 + x_3 &= -22 \\ \tfrac{17}{10}x_3 &= -\tfrac{17}{5} \end{aligned}$$

$\boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3}$

$\boxed{x_2 = \frac{22}{10} + \frac{1}{10}x_3}$

$\boxed{x_3 = -2}$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Manchmal gehts sogar noch schneller, wenn man nicht stur die Unbekannten von links nach rechts beseitigt. Das Beispiel zeigt, was gemeint ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad \cdot(-3) \; + \quad \cdot(-2) \; + \quad \text{(wie gehabt)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array}\right) \quad \cdot(-2) \; + \quad \text{(in der 3. Gleichung } x_3 \text{ beseitigen)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \end{array}\right) \quad \text{Dreieckform (leicht vernebelt)}$$

Das Ganze wieder mit Variablen:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 & \quad & \boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3} \\ -10x_2 + x_3 &= -22 & & \boxed{x_3 = -22 + 10x_2} \\ 17x_2 &= 34 & & \boxed{x_2 = 2} \end{aligned}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Räumt man auch noch nach oben aus (Gauß-Jordan-Algorithmus), dann ergibt sich die **Diagonalform**: in jeder Gleichung gibt es eine Unbekannte, die nur in dieser Gleichung vorkommt. Aus der Diagonalform liest man die Lösung unmittelbar ab. Wieder unser Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad \cdot(-3) \; + \quad \cdot(-2) \; + \quad \text{(wie gehabt)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array}\right) \quad \cdot(-2) \; + \quad \cdot(-1) \; +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 0 & 29 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \end{array}\right) \quad \cdot\tfrac{10}{17} \; + \quad \cdot\left(-\tfrac{14}{17}\right) \; + \quad \cdot\tfrac{1}{17}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Diagonalform (leicht vernebelt)} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_3 &= -2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Nach Vertauschung der 2. und 3. Zeile (Gleichungen) ist die Diagonalform deutlicher und die Lösung augenfällig (rechte Spalte!):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Das Gauß-Verfahren funktioniert auch bei Gleichungssystemen, die keine oder unendlich viele Lösungen haben. Wir greifen die Beispiele von Seite 16 auf:

Keine Lösung

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Aus naheliegenden Gründen vertauschen wir die ersten beiden Zeilen:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right\| \quad \cdot(-2) + \quad \cdot(-3) +$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array}\right\| \quad \cdot(-2) +$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

↯ Widerspruch in $0 = -2$, keine Lösung!

Allgemein gilt: Hat eine Zeile links vom Strich lauter Nullen und rechts keine, dann hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Variablen weg:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right\| \quad \cdot(-2) + \quad \cdot(-4) +$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right\| \quad \cdot(-1) +$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \| \cdot(-1/5) \\ \text{»Nullzeile«, läßt man weg} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}$$

jetzt müssen die Variablen wieder her:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \qquad \boxed{x_1 = 6 - 2x_2 + 3x_3} \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \qquad \boxed{x_2 = 2 + 2x_3} \end{aligned}$$

freier Parameter $x_3 = \mu,\ x_2 = 2 + 2\mu,\ x_1 = 2 - \mu$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$

Zum Schluß ein homogenes 4,6-System, das nicht auf eine Dreieckform führt:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 &= 0\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 &= 0\\
2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 16x_4 + 10x_5 + 10x_6 &= 0\\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 0
\end{aligned}$$

Variablen weg!

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 0\\
2 & 2 & 6 & 16 & 10 & 10 & 0\\
1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot(-1)\ +\ \cdot(-2)\ +\ \cdot(-1)\ +$$

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 2 & 14 & 4 & 8 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot(-2)\ +$$

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\ +$$

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\| \quad \cdot 1/6$$

Nullzeile weglassen

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0
\end{array}$$

Variablen her!

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 &= 0\\
x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 &= 0\\
x_4 + 2/3\,x_6 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_4 = -\,2/3\,x_6}$$

$$\boxed{x_3 = -\,4x_4 - 2x_5 - 2x_6}$$

$$\boxed{x_1 = -\,x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 - x_6}$$

Die drei Variablen x_2, x_5 und x_6 kommen links nicht vor, sind also freie Parameter. Das System hat ∞^3-Lösungen. Um Brüche zu vermeiden, setzen wir: $x_6 = 3\lambda$, $x_5 = \mu$ und $x_2 = \nu$ und bekommen $x_4 = -2\lambda$, $x_3 = 2\lambda - 2\mu$ und $x_1 = -5\lambda + \mu - \nu$,

$$\textbf{Lösung:}\quad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5\\ 0\\ 2\\ -2\\ 0\\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Wegen des ständigen Abschreibens der Zahlentafeln braucht man beim Gauß-Algorithmus viel Zeit und Platz. Weil er so schematisch abläuft, läßt er sich gut im Computer programmieren und steht deshalb heute hoch im Kurs. Für den Handbetrieb aber eignet sich das Einsetzverfahren besser.

Das Additionsverfahren, auf dem der Gauß-Algorithmus beruht, wird gefährlich, wenn man sich nicht an die erlaubten Umformungen hält und kreuz und quer drauf losaddiert. Dazu ein **Warnungsbeispiel**:

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & -x_1 + x_2 + x_3 &=& 1 \\ \text{II} & x_1 + x_2 - x_3 &=& 1 \\ \text{III} & -4x_2 + 5x_3 &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Durch I+II beseitigen wir } x_1: & 2x_2 = 2 \\ \text{durch 2I+2II+III beseitigen wir } x_2: & 5x_3 = 5 \\ \text{III schreiben wir ab:} & -4x_2 + 5x_3 = 1 \end{array}$$

Das neue System hat die Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}.$

Von diesen ∞^1 Lösungen ist nur eine einzige, nämlich die für $\mu = 1$ auch Lösung des gegebenen Systems. Die verwegenen Umformungen haben uns ein System beschert, das zum ursprünglichen nicht äquivalent ist.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a) $\begin{array}{l} 10x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 5 \end{array}$ **f)** $\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}$

g) $\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}$ **h)** $\begin{array}{l} -\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{array}$

i) $\begin{array}{l} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{array}$ **j)** $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}$

2. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a) $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 = 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 15x_3 = 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 30x_3 = 0 \end{array}$

3. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 &= 12 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 &= -11 \\ x_2 - 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

4. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 15 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 35 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 3 \end{aligned}$$

• **5.** Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten x_1 bis x_4):

a) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -3 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ -x_4 &= 1 \end{aligned}$$

• **6.** Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten x_1 bis x_4):

a) $x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 1$

b) $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 1$

• **7.** Entscheide mit dem Gauß-Verfahren, für welche Werte von a, b und c es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= a \\ x_1 - 2x_2 &= b \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= b \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= c \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + ax_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ ax_1 + x_2 &= 3 - a \end{aligned}$$