Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

3. Mathematischer Hintergrund

8. Überbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ 4x_1 - x_2 &= -13 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

• e) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 &= -2 \end{aligned}$

9. Unterbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -2x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$

** 3 . Mathematischer Hintergrund

Zwischen den Lösungen eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems besteht ein einfacher Zusammenhang. Sind $(u_1 | u_2 | \ldots | u_n)$ und $(v_1 | v_2 | \ldots | v_n)$ zwei Lösungen eines inhomogenen m,n-Systems, dann ist $(u_1 - v_1 | u_2 - v_2 | \ldots | u_n - v_n)$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Das sieht man sofort ein, wenn man die i-ten Gleichungen des inhomogenen Systems nach dem Einsetzen voneinander subtrahiert

$$\begin{aligned} & a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \ldots + a_{in} u_n = b_i \\ & a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \ldots + a_{in} v_n = b_i \\ \Rightarrow\ & a_{i1}(u_1 - v_1) + a_{i2}(u_2 - v_2) + \ldots + a_{in}(u_n - v_n) = 0 \end{aligned}$$

Das ist die i-te Gleichung des zugehörigen homogenen Systems. Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems ist also eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Folglich ist **jede** Lösung des inhomogenen Systems darstellbar als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Lösung des homogenen Systems. Es kommen sogar **alle** Lösungen des homogenen Systems vor, es gilt nämlich:

Alle Lösungen des homogenen Systems ergeben sich als Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems.

Begründung: Ist $(h_1 | h_2 | \ldots | h_n)$ irgendeine Lösung des homogenen Systems und $(v_1 | v_2 | \ldots | v_n)$ irgendeine Lösung des inhomogenen Systems, dann ist $(h_1 + v_1 | h_2 + v_2 | \ldots | h_n + v_n)$ eine Lösung des inhomogenen Systems: Setzt man $(h_1 + v_1 | h_2 + v_2 | \ldots | h_n + v_n)$ in die linke Seite der i-ten Gleichung des inhomogenen Systems ein, dann ergibt sich:

$$a_{i1}(h_1 + v_1) + a_{i2}(h_2 + v_2) + \ldots + a_{in}(h_n + v_n) =$$
$$\underbrace{(a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + \ldots + a_{in}h_n)}_{\mathbf{0}} + \underbrace{(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n)}_{\mathbf{b}_i} = b_i$$

qed.

Das alles faßt man zusammen in dem Satz:

Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems läßt sich darstellen als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

Unter allgemeiner Lösung versteht man eine Lösung, die mindestens einen Parameter enthält. Eine allgemeine Lösung beschreibt eine Lösungsmenge. Ersetzt man in einer allgemeinen Lösung alle Parameter durch Zahlen, dann bekommt man eine spezielle Lösung. Genau das haben unsere Beispiele ergeben:

inhomogenes System

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zugehöriges homogenes System

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung des inhomogenen Systems}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems}}}$$

Jedes homogene System hat mindestens eine Lösung, nämlich die triviale. Gibt es eine weitere Lösung, dann gibt es gleich unendlich viele. (Nr. 4 der folgenden Aufgaben)

Ein homogenes System kann nur genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.
Ein inhomogenes System kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.

Ferner gilt: **Wenn ein homogenes System genau eine, also nur die triviale Lösung hat, dann hat auch jedes zugehörige inhomogene System genau eine Lösung.**

Den Beweis bringen wir später.

Übersicht über die Anzahlen von Lösungen

das inhomogene System hat	das zugehörige homogene System hat
keine Lösung	∞^1 oder ∞^2 oder ... Lösungen
genau eine Lösung	genau eine Lösung (die triviale)
∞^1 Lösungen	∞^1 Lösungen
∞^2 Lösungen	∞^2 Lösungen
usw.	usw.

das homogene System hat	jedes zugehörige inhomogene System hat
genau eine Lösung	genau eine Lösung
∞^1 Lösungen	keine oder ∞^1 Lösungen
∞^2 Lösungen	keine oder ∞^2 Lösungen
usw.	usw.

Aufgaben

$\boxed{1.}$ **a)**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Jemand behauptet, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ liefere Lösungen des Gleichungssystems. Wie ist eine Probe möglich?

b) Begründe den Satz:

Sind $\begin{pmatrix} \dots \\ x_i \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ r_i \\ \dots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \dots \\ u_i \\ \dots \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \dots \\ v_i \\ \dots \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Lösungen des Gleichungssystems

mit der i-ten Zeile $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, dann erfüllt $\begin{pmatrix} \dots \\ r_i \\ \dots \end{pmatrix}$ das

Gleichungssystem und $\begin{pmatrix} \dots \\ u_i \\ \dots \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} \dots \\ v_i \\ \dots \end{pmatrix}$ das zugehörige homogene

Gleichungssystem.

2.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Löse das Gleichungssystem.

Zeige: **b)** Ist $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$ eine Lösung, dann ist es auch $k \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$.

c) Sind $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \dots \\ b_i \\ \dots \end{pmatrix}$ Lösungen, dann ist es auch $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i + b_i \\ \dots \end{pmatrix}$.

• **3.** Zeige allgemein:

a) Hat man eine Lösung eines homogenen Systems, dann ist auch jedes Vielfache eine Lösung.

b) Hat man zwei Lösungen eines homogenen Systems, dann ist auch ihre Summe eine Lösung.

c) **a)** und **b)** sind falsch für echte inhomogene Systeme.

4. Zeige: Hat ein homogenes System mehr als eine Lösung, dann hat es gleich unendlich viele.

5. **Unendlich viel oder nichts**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Bestimme die Lösung.

b) Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das keine Lösung hat.

c) Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das ∞^1 Lösungen hat.

d) Warum gibt es kein zugehöriges inhomogenes System, das genau eine Lösung oder ∞^2 Lösungen hat?

• **6.** Zeige: Kommt eine Unbekannte x_i, $1 \le i \le n$, in einem homogenen System nicht vor, dann gibt es unendlich viele Lösungen.
Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme!
Zeige dies durch ein Gegenbeispiel.

• **7.** Zeige: Ein homogenes System mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.
Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme!
Zeige dies durch ein Gegenbeispiel.